

19
中国人民大学函授教材

线性代数习题解答

2-44
中国人民大学函授学院

线性代数习题解答
中国人民大学函授学院 编

*

中国人民解放军工程兵机械学校印刷厂印刷

印数10000·字数200000

1986年5月第1次印刷 定价2.00元

目 录

习题一	(1)
习题二	(36)
习题三	(77)
习题四	(90)
习题五	(111)
习题六	(122)

习 题 一

1、计算二阶列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} \quad (7) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$$

解: (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 1 = 1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times (-1) = 5$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6 \times 12 - 9 \times 8 = 0$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a \cdot b^2 - b \cdot a^2 = ab(b-a)$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x+1) - 1 \cdot x = x^3 - 1 - x^2 = x^3 - x^2 - 1$

(6) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} - \frac{2t(-2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$
 $= \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - \log_b a \cdot \log_a b = 1 - 1 = 0$

2、用行列式解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$

解:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 7 - 5 \times 3 = -1$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 5 \times 2 = -3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 1$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{-1} = -1$$

所以方程组的解为 $x=3, y=-1$.

$$(2) \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 10 \\ 5x_1 + 7x_2 = 29 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6 \times 7 - (-4) \times 5 = 62$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 29 & 7 \end{vmatrix} = 10 \times 7 - (-4) \times 29 = 186$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = 6 \times 29 - 10 \times 5 = 124$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{186}{62} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{124}{62} = 2$$

所以方程组的解为 $x_1=3, x_2=2$.

$$(3) \begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \times (-2) - (-7) \times 1 = -3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - (-7) \times 0 = -2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times 0 - 1 \times 1 = -1$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

所以方程组的解为 $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$ 。

$$(4) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 = 0 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 4 \times (-7) - 5 \times 3 = -43$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{-43} = 0$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-43} = 0$$

所以方程组的解为 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 。

3、计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 1 \times 2 - 2 \times 3 \times 1 - 1 \times 3 \times 2 \\ &= (1 + 8 + 27) - (6 + 6 + 6) \\ &= 18. \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 1 \times 5 + 1 \times 4 \times 8 + 1 \times 9 \times 3 - 1 \times 1 \times 8 - 1 \times 3 \times 5 - 1 \times 9 \times 4 \\
 &= (5 + 32 + 27) - (8 + 15 + 36) \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 5 \times 1 + 0 \times 0 \times 0 + (-1) \times 4 \times 3 - (-1) \times 5 \times 0 - 0 \times 3 \times 1 - 1 \times 4 \times 0 \\
 &= (5 + 0 - 12) - (0 + 0 + 0) \\
 &= -7.
 \end{aligned}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 \times 0 \times 0 + a \times c \times 0 + 0 \times d \times b - 0 \times 0 \times 0 - a \times b \times 0 - 0 \times d \times c \\
 &= (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

4、证明下列等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

证:

$$\text{左} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3$$

$$\text{右} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$

$$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3$$

左=右

所以原等式成立.

5、用行列式解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=1 \times (-2) \times 4 + 1 \times 7 \times 2 + (-2) \times 5 \times (-5)$$

$$-(-2) \times (-2) \times 2 - 1 \times 5 \times 4 - 1 \times 7 \times (-5)$$

$$=-8 + 14 + 50 - 8 - 20 + 35$$

$$=63$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(-3) \times (-2) \times 4 + 1 \times 7 \times 4 + (-2) \times 22 \times (-5)$$

$$-(-2) \times (-2) \times 4 - 1 \times 22 \times 4 - (-3) \times 7 \times (-5)$$

$$=24 + 28 + 220 - 16 - 88 - 105$$

$$=63$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=1 \times 22 \times 4 + (-3) \times 7 \times 2 + (-2) \times 5 \times 4$$

$$-(-2) \times 22 \times 2 - (-3) \times 5 \times 4 - 1 \times 7 \times 4$$

$$=88 - 42 - 40 + 88 + 60 - 28$$

$$=126$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 22 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=1 \times (-2) \times 4 + 1 \times 22 \times 2 + (-3) \times 5 \times (-5)$$

$$-(-3) \times (-2) \times 2 - 1 \times 5 \times 4 - 1 \times 22 \times (-5)$$

$$= -8 + 44 + 75 - 12 - 20 + 110$$

$$= 189$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{63}{63} = 1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{126}{63} = 2$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{189}{63} = 3$$

所以方程组的解为 $x=1, y=2, z=3$.

(代入方程组检验, 确为方程组的解, 以下各题略)

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 3 + 4 \times 5 \times (-1) - 4 \times 1 \times 3 - 2 \times 5 \times 1 - 1 \times 2 \times (-1)$$

$$= 1 + 12 - 20 - 12 - 10 + 2$$

$$= -27$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 31 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 10 + 4 \times 29 \times (-1) - 4 \times 1 \times 10 - 2 \times 29 \times 1 - 31 \times 2 \times (-1)$$

$$= 31 + 40 - 116 - 40 - 58 + 62$$

$$= -81$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 29 \times 1 + 31 \times 2 \times 3 + 4 \times 5 \times 10 - 4 \times 29 \times 3 - 31 \times 5 \times 1 - 1 \times 2 \times 10$$

$$= 29 + 186 + 200 - 348 - 155 - 20$$

$$= -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \times 1 \times 10 + 2 \times 29 \times 3 + 31 \times 5 \times (-1) - 31 \times 1 \times 3 - 2 \times 5 \times 10 - 1 \times 29 \times (-1) \\
&= 10 + 174 - 155 - 93 - 100 + 29 \\
&= -135
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-81}{-27} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{-27} = 4$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-135}{-27} = 5$$

所以方程组的解为 $x_1=3, x_2=4, x_3=5$ 。

$$(3) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

解：将原方程组化为

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \times (-2) \times 2 + (-3) \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times (-3) \\
&\quad - 2 \times (-2) \times 5 - (-3) \times 6 \times 2 - 4 \times 3 \times (-3) \\
&= -16 - 45 - 36 + 20 + 36 + 36 \\
&= -5
\end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-4) \times (-2) \times 2 + (-3) \times 3 \times (-3) + 2 \times 5 \times (-3) \\
&\quad - 2 \times (-2) \times (-3) - (-3) \times 5 \times 2 - (-4) \times 3 \times (-3) \\
&= 16 + 27 - 30 - 12 + 30 - 36 \\
&= -5
\end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \times 5 \times 2 + (-4) \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times (-3) \\
&\quad - 2 \times 5 \times 5 - (-4) \times 6 \times 2 - 4 \times 3 \times (-3)
\end{aligned}$$

$$=40-60-36-50+48+36$$

$$=-22$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=4 \times (-2) \times (-3) + (-3) \times 5 \times 5 + (-4) \times 6 \times (-3)$$

$$(-4) \times (-2) \times 5 - (-3) \times 6 \times (-3) - 4 \times 5 \times (-3)$$

$$=24-75+72-40-54+60$$

$$=-13$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-22}{-5} = 4\frac{2}{5}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-13}{-5} = 2\frac{3}{5}$$

所以方程组的解为 $x_1=1$, $x_2=4\frac{2}{5}$, $x_3=2\frac{3}{5}$ 。

$$(4) \begin{cases} bx-ay & +2ab=0 \\ -2cy+3bz & -bc=0 \\ cx & +az=0 \end{cases}$$

其中 a, b, c 都不为零。

解：将原方程组化为

$$\begin{cases} bx-ay & =-2ab \\ -2cy+3bz & =bc \\ cx & +az=0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=b \times (-2c) \times a + (-a) \times 3b \times c + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$=-2abc-3abc$$

$$=-5abc$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=-2ab \times (-2c) \times a + 0 + 0 - 0 - (-a) \times bc \times a - 0$$

$$=4a^2bc+a^2bc$$

$$=5a^2bc$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= b \times bc \times a + (-2ab) \times 3b \times c + 0 - 0 - 0 - 0 \\ &= ab^2c - 6ab^2c \\ &= -5ab^2c \end{aligned}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + (-a) \times bc \times c + 0 - (-2ab) \times (-2c) \times c - 0 - 0 \\ &= -abc^2 - 4abc^2 \\ &= -5abc^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{5a^2bc}{-5abc} = -a$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-5ab^2c}{-5abc} = b$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-5abc^2}{-5abc} = c$$

所以方程组的解为 $x = -a, y = b, z = c$ 。

$$(5) \begin{cases} x_1 = 0.5x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 10 \\ x_2 = 0.4x_1 + 0.5x_3 + 20 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 12 \end{cases}$$

解：将原方程组化为

$$\begin{cases} 0.5x_1 - 0.3x_2 - 0.4x_3 = 10 \\ -0.4x_1 + x_2 - 0.5x_3 = 20 \\ -0.2x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 0.5 \times 1 \times 1 + (-0.3) \times (-0.5) \times (-0.2) + (-0.4) \times (-0.4) \times (-0.1) \\ &\quad - (0.4) \times 1 \times (-0.2) - (-0.3) \times (-0.4) \times 1 - 0.5 \times (-0.5) \times (-0.1) \\ &= 0.5 - 0.03 - 0.016 - 0.08 - 0.12 - 0.025 \\ &= 0.229 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} 10 & -0.3 & -0.4 \\ 20 & 1 & -0.5 \\ 12 & -0.1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 10 \times 1 \times 1 + (-0.3) \times (-0.5) \times 12 + (-0.4) \times 20 \times (-0.1) \\
&\quad - (-0.4) \times 1 \times 12 - (-0.3) \times 20 \times 1 - 10 \times (-0.5) \times (-0.1) \\
&= 10 + 1.8 + 0.8 + 4.8 + 6 - 0.5 \\
&= 22.9 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 0.5 & 10 & -0.4 \\ -0.4 & 20 & -0.5 \\ -0.2 & 12 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0.5 \times 20 \times 1 + 10 \times (-0.5) \times (-0.2) + (-0.4) \times (-0.4) \times 12 \\
&\quad - (-0.4) \times 20 \times (-0.2) - 10 \times (-0.4) \times 1 - 0.5 \times (-0.5) \times 12 \\
&= 10 + 1 + 1.92 - 1.6 + 4 + 3 \\
&= 18.32 \\
D_3 &= \begin{vmatrix} 0.5 & -0.3 & 10 \\ -0.4 & 1 & 20 \\ -0.2 & -0.1 & 12 \end{vmatrix} \\
&= 0.5 \times 1 \times 12 + (-0.3) \times 20 \times (-0.2) + 10 \times (-0.4) \times (-0.1) \\
&\quad - 10 \times 1 \times (-0.2) - (-0.3) \times (-0.4) \times 12 - 0.5 \times 20 \times (-0.1) \\
&= 6 + 1.2 + 0.4 + 2 - 1.44 + 1 \\
&= 9.16 \\
x_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{22.9}{0.229} = 100 \\
x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{18.32}{0.229} = 80 \\
x_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{9.16}{0.229} = 40
\end{aligned}$$

所以方程组的解为 $x_1 = 100$, $x_2 = 80$, $x_3 = 40$.

6. 求下列排列的逆序数, 并确定它的奇偶性:

(1) 41253

解: $N(41253) = 4$

所以是偶排列

(2) 3712456

解: $N(3712456) = 7$

所以是奇排列

(3) 36715284

解: $N(36715284) = 13$

所以是奇排列

$$(4) n(n-1)\cdots 21$$

$$\text{解: } N(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

$$= \frac{1}{2}[(n-1)+1](n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

当 n 为4的整数倍时, 即 $n=4k$, $k=0, 1, 2, \cdots$, 则 $N = \frac{1}{2}4k(4k-1) = 2k(4k-1)$, 不论 k 为奇数还是偶数, N 均为偶数。

$$\text{当 } n=4k+1, k=0, 1, \cdots, \text{时, 则 } N = \frac{1}{2}(4k+1)(4k) = 2k(4k+1) \text{ 为偶数。}$$

当 $n=4k+2$ 时, $N = \frac{1}{2}(4k+2)(4k+1) = (2k+1)(4k+1)$, 不论 k 为奇数还是偶数, N 均为奇数。

当 $n=4k+3$ 时, N 为奇数。

故当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时为偶排列

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列。

其中 $k=0, 1, 2, \cdots$

7. 在六阶行列式中, 下列各项应取什么符号?

$$(1) a_{16}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$$

$$\text{解: } N(532416) = 8$$

该项行标为按自然数顺序排列, 列标为偶排列, 所以该项符号为正。

$$(2) a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$$

$$\text{解: } N(162435) = 5$$

该项行标为按自然数顺序排列, 列标为奇排列, 所以该项符号为负。

$$(3) a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$$

解法一:

将 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 的行标按自然数顺序排列得

$$a_{16}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}a_{65} \quad \text{其列标排列的逆序数为}$$

$$N(614235) = 7$$

列标为奇排列, 所以该项符号为负。

解法二:

计算行标和列标排列逆序数之和

$$N(251463) + N(136254) = 6 + 5 = 11$$

所以该项符号为负。

$$(4) a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$$

解法一:

将 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 的行标按自然数顺序排列得

$$a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}, \quad \text{其列标排列的逆序数为}$$

$$N(362415) = 8$$

所以该项符号为正。

解法二：

该项列标为按自然数顺序排列(逆序数为0)，其行标的逆序数为

$$N(531462)=8$$

所以该项符号为正。

$$(5) a_{61} a_{52} a_{43} a_{34} a_{25} a_{16}$$

解法一：

将 $a_{61} a_{52} a_{43} a_{34} a_{25} a_{16}$ 的行标按自然数顺序排列得

$$a_{16} a_{25} a_{34} a_{43} a_{52} a_{61}, \quad \text{其列标排列的逆序数为}$$

$$N(654321)=15$$

所以该项符号为负。

解法二：

该项列标为按自然数顺序排列(逆序数为0)，其行标排列的逆序数为

$$N(654321)=15$$

所以该项符号为负。

8. 用行列式定义计算下列行列式：

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

行列式 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，但在第一行中只有 $a_{1n}=1 \neq 0$ ，即 $j_1=n$ ，所以 D 中只有含有 a_{1n} 的那些项可能不为零，其它项均为零。一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，但在第二行中只有 $a_{2,n-1}$ 的那些项可能不为零，其它项均为零。依此类推， D 中只有 $a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$ 这一项不为零，所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{N(n(n-1) \cdots 21)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{N(n(n-1) \cdots 21)} 1 \cdot 2 \cdots n \end{aligned}$$

而

$$N(n(n-1) \cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

$$= \frac{1}{2} [(n-1)+1](n-1)$$

$$= \frac{1}{2} n(n-1) \quad (\text{参看第6题(4)})$$

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} n!$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

行列式 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行,但在第一行中,只有 $a_{1j_1} = a_{12} = 1 \neq 0$,即 $j_1 = 2$,所以 D 中只有含有 a_{12} 的那些项可能不为零,其它项均为零;一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行,但在第二行中只有 $a_{23} = 2 \neq 0$,即 $j_2 = 3$,所以 D 中只有含有 a_{23} 的那些项可能不为零,其它项均为零;依此类推, D 中只有 $a_{12} a_{23} \cdots a_{n-1,n} a_{n1}$ 这一项不为零,所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{N(2\ 3 \cdots n1)} a_{12} a_{23} \cdots a_{n-1,n} a_{n1} \\ &= (-1)^{N(2\ 3 \cdots n1)} 1 \cdot 2 \cdots n \end{aligned}$$

而

$$N(2\ 3 \cdots n1) = n-1$$

所以

$$D = (-1)^{n-1} n!$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解:这是一个五阶行列式,其一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$$

其中 $a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$ 是分别取自行列式中第三、四、五行中不同列的元素,而在这三行中,

仅有两列元素不为零，这样在 a_{3j_3} 、 a_{4j_4} 、 a_{5j_5} 这三个元素中，至少有一个是零，所以该行行列式的值为零。

9. 用行列式的性质计算下列行列式：

$$(1) \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$$

解：从第一行中提出公因子 a ，从第二行中提出公因子 b ，则有

$$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab(b-a)$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times(-1) \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

（有两行的元素相同，行列式为0；或直接从前一行列式中看出，有两行的元素成比例，行列式为0）

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times(-1) \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$