



# 全国硕士研究生 入学统一考试

## 数学考试分析

(2011年版)

教育部考试中心



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

高等教育出版社  
2011年考研系列用书

- 全国硕士研究生入学统一考试思想政治理论考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试思想政治理论考试大纲解析 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试思想政治理论考试分析 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试英语(一)考试大纲(非英语专业) (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试英语(二)考试大纲(非英语专业) (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试英语(一)、英语(二)考试分析(非英语专业) (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试西医综合考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试中医综合考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试法律硕士(非法学)专业学位联考考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试法律硕士(非法学)专业学位联考考试分析 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试法律硕士(法学)专业学位联考考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试管理类专业学位联考综合能力考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试教育学专业基础综合考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试心理学专业基础综合考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试历史学基础考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试日语考试大纲(非日语专业) (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试俄语考试大纲(非俄语专业) (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考考试大纲 (2011年版)
- 全国硕士研究生入学统一考试计算机科学与技术学科联考计算机学科专业基础综合考试大纲 (2011年版)



ISBN 978-7-04-030574-6



9 787040 305746 >

定价 25.00 元



凭书后网卡可免费登录

“中国教育考试网” 获得增值服务  
[www.eduexam.com.cn](http://www.eduexam.com.cn)

2011

# 全国硕士研究生入学统一考试 数学考试分析

Quanguo Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Tongyi Kaoshi  
Shuxue Kaoshi Fenxi

(2011年版)

教育部考试中心



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING



### 图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析: 2011  
年版 / 教育部考试中心. —北京: 高等教育出版社,  
2010. 8

ISBN 978 - 7 - 04 - 030574 - 6

I. ①全… II. ①教… III. ①高等数学-研究生-人  
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 160906 号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 李 茜 封面设计 王凌波 版式设计 余 杨  
责任校对 王效珍 责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 北京中科印刷有限公司

开 本 787 × 1092 1/16  
印 张 11.75  
字 数 280 000

购书热线 010 - 58581118  
咨询电话 400 - 810 - 0598  
800 - 810 - 0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landraco.com>  
<http://www.landraco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2010 年 8 月第 1 版  
印 次 2010 年 8 月第 1 次印刷  
定 价 25.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30574 - 00

# 目 录

一、数学科考试说明 .....	1
(一) 考试性质 .....	1
(二) 指导思想 .....	1
(三) 基本原则 .....	2
(四) 参考答案及评分参考的制订说明 .....	2
(五) 试题、试卷和考试质量的评价指标 .....	3
二、2010 年数学考试分析 .....	7
(一) 总体评价 .....	7
(二) 统计数据分析 .....	7
(三) 数学一试题分析 .....	9
(四) 数学二试题分析 .....	26
(五) 数学三试题分析 .....	39
三、2009 年数学试题分析 .....	53
(一) 数学一 .....	53
(二) 数学二 .....	73
(三) 数学三 .....	92
四、2008 年数学试题分析 .....	115
(一) 数学一 .....	115
(二) 数学二 .....	137
(三) 数学三 .....	150
(四) 数学四 .....	171

## 一、数学科考试说明

### (一) 考试性质

全国硕士研究生入学统一考试数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试。

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试。所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大。我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征。数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用。从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试。

另一方面,从数学考试测量功能上看,数学考试又是水平考试。水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以《教学基本要求》和某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据。《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与《教学基本要求》没有直接的关系。数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力。数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学基本要求》不完全相同,《教学基本要求》中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于教学要求。可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试。

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从2009年开始,数学考试分为三个卷种,即数学一、数学二和数学三,对不同卷种的考试内容有不同的要求。这种对不同学科、专业考生提出不同的考试要求的特征也是水平考试的重要标志。

### (二) 指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想,即既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,在这两个“有利于”中,重点是有利于为国家选拔高层次的人才。

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习、深造。

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际,试题水平既能反映教学的实际水平,也能考查考生应当具备的知识和能力,同时,正确利用考试这根“指挥棒”引导高校教学向培养学生应用数学能力的方向发展,使得学生学而有用于,学而会用,从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用。

### (三) 基本原则

(1) 严格按照《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲(2011年版)》(以下简称《考试大纲》)规定的考试内容和考试要求进行命题。

《考试大纲》主要包括以下内容:考试性质、考查目标、试卷分类及使用专业、考试形式和试卷结构、考试内容和考试要求、参考试题等,它是法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据。

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定,各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致,试卷的难易度与参考试题的难易度基本一致,试卷中不出现超纲题、偏题和怪题。

(2) 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查。

(3) 试题编制要符合各种题型编制原则。

(4) 保持历年试题难度的稳定。

(5) 试题编制应科学、公正、规范。

### (四) 参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的重要组成部分,它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度,是考试公平性的重要保证。

数学填空题要求答案是确定的和唯一的,参考答案只给出应填的结果,不给出推导计算过程.一般每题4分,答对4分,答错0分.对于四选一的选择題有A、B、C、D四个备选项,其中三个是干扰项,一个是正确选项,参考答案只给出正确选项前的字母,不给出推导过程.选对得满分,选错得0分,不倒扣分,鼓励考生在不会作答时猜测选项.对于计算题、证明题以及其他解答题,一般提供一至两种参考解答和证明,有些试题有更多的解法甚至包括初等解法,但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法.参考答案的文字表述必须规范,推理过程必须表述清楚,避免因参考答案表述不清而造成评分误差.每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关.一般地说,综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大,分值较高;基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低.各题的分值设定之后,就需要确定评分参考,即运算过程中关键步骤的赋分权重.计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的,比如,完成一道分值为10分的计算题需要三个关键步骤,完成到第一个步骤给3分,完成到第二个步骤给6分,三个步骤全部完成给10分.对于文科试题常常是按照要点单独赋分.为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢?这是考虑到对于数学计算或证明题,只有做对了前面步骤,才能完成后面的步骤这一特点.对于有多个解法的试题,一般到达同一结果给相同的分数,每一步骤分的给定不是随意的,如同确定每题分值一样,需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度,关键的步骤分值较高,反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案

与评分参考对部分考卷进行试评,对评分参考作进一步的细化,制订评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分使其平均分较高,反之亦然.因此,评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

### (五) 试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生入学数学考试的性质,它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试,通常用难度和区分度评价试题的质量;用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况,同时也作为评价试卷质量的重要指标;用信度和效度评价考试的质量.

#### 1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,通常以小写的  $p$  表示,取值范围在 0 到 1 之间.由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同,因此,同一题目相对于不同的考生群体,其难度值是不同的,也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言,由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的,可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的),这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下的为难题,难度值在 0.3 ~ 0.8 之间的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题.试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中,为了保证试题的质量,需要估计题目难度.根据难度的定义,估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度,而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力.区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用  $D$  表示,一般  $-1 < D < 1$ .对于主观性试题,一般用积矩相关系数;对于客观性试题,如填空题和选择题,一般用双列相关计算公式.该公式比较复杂,可参考有关教育测量书籍,在此不作介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组,然后分别计算出高分组、低分组的得分率  $p(H)$ 、 $p(L)$ ,  $D = p(H) - p(L)$ .高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27% 的考生,低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27% 的考生.这种方法适合较小规模的考试,不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2 ~ 0.3 之间的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试题区分度通常较大.为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如表 1-1 所示.



表 1-1 试题的六大类型分类表

特征 类型	$P$	$D$	试题特征
I	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
II	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
III	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
IV	(0,0.3)	(0.3,1.0)	难度大但区分能力强
V	[0.3,0.8]	(0.3,1.0)	难度适中且区分能力强
VI	(0.8,1)	(0.3,1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现.我们认为,第V类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上).第I类试题属于“题太难谁都不会做”,第III类试题属于“题太易谁都会做”,它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题.同时,我们也不要求出现太多的第II类和第VI类试题.第IV类试题在选拔性的研究生入学数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

## 2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差越小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第V类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第V类试题在卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,若满分为150分,试卷的及格率是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差有关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标.

### 3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标。信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果。常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度。由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 $\alpha$ 系数。目前我们采用的是分半信度和 $\alpha$ 系数。效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西。常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度。关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍。

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标。



## 二、2010年数学考试分析

### (一) 总体评价

2010年数学一至三试卷符合《考试大纲》的要求,考查相关数学课程的主干知识、基本原理和基本方法.试卷命制科学、规范,试题背景公平,叙述严谨、准确,设问简洁、明了,没有科学性试题.所给试题答案和评分参考书写规范、步骤合理、逻辑清楚、可操作性强,便于阅卷评分.试题既注意了重点知识、重点考查,又具有一定的覆盖面,各部分内容所占比例适当.数学一、三的难度适中,数学二偏难.与往年相比,三份试卷的总体难度基本相当,难度适中,没有出现过大的起伏.试题注重对考生的抽象思维能力与综合运用数学知识、分析和解决问题能力的考查,各卷的标准差较大,区分度良好,有效地发挥了数学科考试在选拔中的作用.具体特点为:

(1) 试题注重对基本知识、基本能力的考查,这类题目在各份试卷中都占百分之七十以上,例如数学一的第15、16、18、20、21、22题;数学二的第15、17、18、19、22、23题;数学三的第15、16、17、20、21、22、23题等.这有利于引导大学数学基础课的教学注重基础,有利于相关高校数学公共课的教学;同时引导考生在平时的学习中重视对课程主干知识、基本思想和基本方法的理解和掌握.

(2) 试题突出了对基本方法和基本性质的考查,例如数学一的第4、6、8、14、17、19、21、23题;数学二的第2、7题;数学三的第11题等.这类问题体现了多想少算的思想,有利于区分不同水平的考生.

(3) 试题注意了对抽象思维能力与综合运用数学知识、分析和解决问题能力的考查.例如数学一的第19题将空间解析几何与曲面积分有机地结合在一起,对考生的综合能力提出了较高要求;数学二的第18题是应用题、第21题是抽象证明题,数学三的第19题是抽象证明题、第23题是概率应用题,这些都对考生的抽象思维能力与解决实际问题的能力进行了有效的考查.

(4) 试题稳中有变、稳中求新,有利于测评考生的真实水平、实现考试目的.例如数学一的第4、12、17、19、23题,数学二的第13、18题等.其中数学一的第4、23题是过去从没考过的新的问题,数学一的第12、19题及数学二的第13、18题是应用问题,尤其是数学二的第18题这一类型的应用题已多年没考,数学一的第17题的设问也是过去试卷中不常见的.这些新颖的试题有效地考查了考生的创新意识和应用能力,达到了区分考生的目的.

### (二) 统计数据分析

#### 1. 难度分析

2010年数学各卷种抽样统计数据如表2-1所示.除数学二外,各卷种难度值都在0.49左右,各卷种难度相对平衡.数学二较往年难度有所提高,主要是因为解答题的难度提高.

从表2-2各卷种在三种题型上的难度值,可以看出,各卷种三种题型的难度值均在中等难度范围内,解答题较选择题、填空题难度大一些,体现了不同题型不同的考查功能:选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解并能进行简单推理、判定、计算和比较;填空题主要考查“三基”及数学的重要性质,考查比较简单的大计算题;解答题除考查基本运算外,主要考查考生的逻辑推理和综合运用能力,因而对考生来说能力要求较高,试题难度相对较大.

表 2-1 2010 年数学各卷种抽样统计数据

卷种	样本量	平均分	难度	标准差	$\alpha$ 信度
数学一	3161	70.99	0.473	32.13	0.8860
数学二	3031	64.74	0.432	32.66	0.8680
数学三	3064	73.46	0.490	34.89	0.8885

表 2-2 2010 年数学各卷种在三种题型上的难度值

题型	数学一	数学二	数学三
选择题	0.613	0.625	0.608
填空题	0.538	0.470	0.540
解答题	0.409	0.356	0.436

## 2. 区分度分析

从表 2-3 可以看出,数学一、数学二区分度在 0.2 以下的试题只有 1 道,其余试题和数学三的试题区分度均在 0.2 以上,数学一有 92%、数学二、数学三有 97.3% 的试题都达到了 0.3 以上的合格水平. 试题的区分性能良好. 从考生分数分布直方图(图 2-1 至图 2-3)可以看出,数学一、数学二、数学三都呈正态分布,数学二略呈正偏态,各卷的标准差均在 30 以上,说明数学各卷对考生区分良好,为选拔提供了有效的分数.

表 2-3 2010 年数学各卷种区分度分布表

区分度区间	数学一	数学二	数学三
0.2 以下	2.7%	2.7%	0%
0.2~0.3	5.3%	0%	2.7%
0.3 以上	92%	97.3%	97.3%

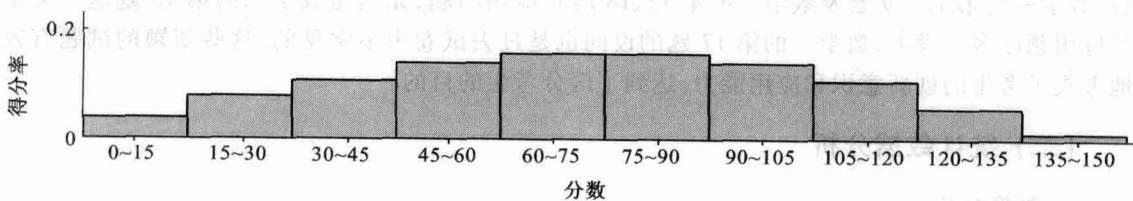


图 2-1 数学一考生分数分布直方图



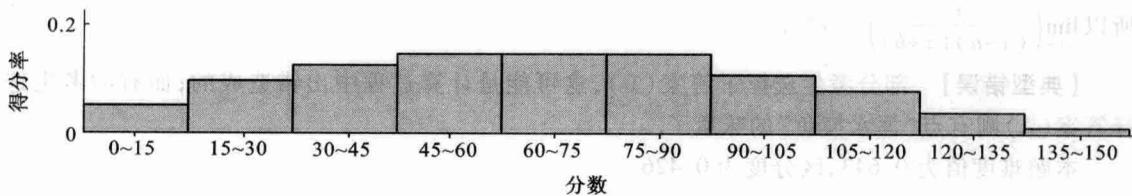


图 2-2 数学二考生分数分布直方图

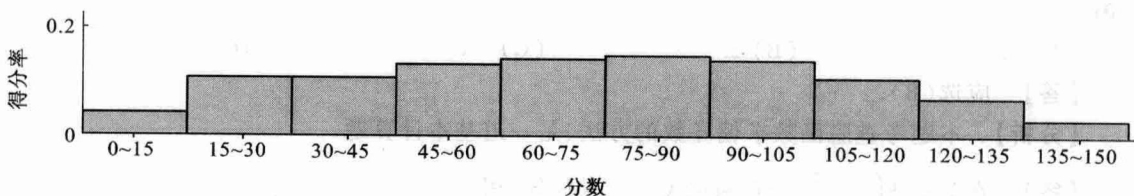


图 2-3 数学三考生分数分布直方图

### (三) 数学一试题分析

#### 1. 选择题

(1) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x =$

- (A) 1.                      (B) e.                      (C)  $e^{a-b}$ .                      (D)  $e^{b-a}$ .

【答】 应选(C).

【分析】 本题考查了利用重要极限求极限的方法,是一道基本题.

【解法 1】 当  $a=b$  时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2} \right)^{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} \right]^{\frac{a^2}{x^2 - a^2} \cdot x} = e^0 = 1;$$

当  $a \neq b$  时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \right)^{\frac{(a-b)(x+b)}{(a-b)(x+b)}} \right]^{\frac{(a-b)(x+b)}{(x-a)(x+b)} \cdot x} = e^{a-b}.$$

综上所述可知正确选项为(C).

【解法 2】 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x - \ln(x-a) - \ln(x+b)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+b}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^3 + 2abx^2}{x(x-a)(x+b)} = a-b, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = e^{a-b}$ .

**【典型错误】** 部分考生选择了答案(D), 这可能是计算过程中出错造成的; 而有的考生选择答案(A)则有点“浑水摸鱼”的味道了.

本题难度值为 0.643, 区分度为 0.426.

(2) 设函数  $z=z(x, y)$  由方程  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0$  确定, 其中  $F$  为可微函数, 且  $F'_2 \neq 0$ , 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- (A)  $x$ .                      (B)  $z$ .                      (C)  $-x$ .                      (D)  $-z$ .

**【答】** 应选(B).

**【分析】** 本题考查隐函数求偏导数的方法, 是一道基本计算题.

**【解】** 在等式  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0$  两端关于  $x$  求偏导, 得

$$-\frac{y}{x^2}F'_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{1}{x} - z \frac{1}{x^2}\right)F'_2 = 0, \quad (1)$$

在等式  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0$  两端关于  $y$  求偏导, 得

$$\frac{1}{x}F'_1 + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} F'_2 = 0. \quad (2)$$

① $\times x^2$  + ② $\times xy$  得

$$\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)F'_2 = zF'_2,$$

所以  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ .

即正确选项为(B).

本题难度值为 0.688, 区分度为 0.514.

(3) 设  $m, n$  均是正整数, 则反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  的收敛性

- (A) 仅与  $m$  的取值有关.                      (B) 仅与  $n$  的取值有关.  
(C) 与  $m, n$  的取值都有关.                      (D) 与  $m, n$  的取值都无关.

**【答】** 应选(D).

**【分析】** 本题主要考查无穷小量的比较及其在反常积分上的应用, 是一道综合题. 题中的被积函数分别在  $x \rightarrow 0^+$  和  $x \rightarrow 1^-$  时无界, 所以将原积分分成两部分, 再分别讨论.

**【解】**  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ .

在反常积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  中, 被积函数只在  $x \rightarrow 0^+$  时无界. 由于  $\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \geq 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = 0$ , 且反常积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} dx$  收敛, 所以  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  收敛.

在反常积分  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  中, 被积函数只在  $x \rightarrow 1^-$  时无界. 由于  $\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \geq 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = 0$ , 且反常积分  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  收敛, 所以  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  收敛.

综上所述, 无论正整数  $m, n$  如何取值, 反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  都是收敛的. 故正确选项

为(D).

**【典型错误】** 其他错误选项都有考生选择, 表明考生未弄清题意.

本题难度值为 0.406, 区分度为 0.042.

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$$

$$(A) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

**【答】** 应选(D).

**【分析】** 本题主要考查二重积分的概念与将和式转化为积分和的方法, 是一道基本概念题.

**【解】** 设  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 记  $f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$ .

用直线  $x = x_i = \frac{i}{n}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 与  $y = y_j = \frac{j}{n}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 将  $D$  分成  $n^2$  等份, 和

$$\text{式} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+x_i)(1+y_j^2)} \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)} \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$$
 是函数

$f(x, y)$  在  $D$  上的一个二重积分的和式, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \iint_D \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

**【典型错误】** 考生对二重积分的概念平时不太重视, 对其“和式”不熟悉.

本题难度值为 0.433, 区分度为 0.422.

(5) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵,  $E$  为  $m$  阶单位矩阵. 若  $AB = E$ , 则

$$(A) \text{秩 } r(A) = m, \text{秩 } r(B) = m.$$

$$(B) \text{秩 } r(A) = m, \text{秩 } r(B) = n.$$

$$(C) \text{秩 } r(A) = n, \text{秩 } r(B) = m.$$

$$(D) \text{秩 } r(A) = n, \text{秩 } r(B) = n.$$

**【答】** 应选(A).

**【分析】** 本题考查矩阵秩的相关性质, 是一道基本题. 由矩阵秩的两条性质不难得到正确的选项: 一条性质是任一  $m \times n$  矩阵  $A$ , 都有

$$r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\};$$

另一条性质是

$$r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}.$$

【解】 由已知可得

$$r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\} \leq m,$$

$$r(\mathbf{B}) \leq \min\{m, n\} \leq m,$$

$$m = r(\mathbf{E}) = r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\},$$

即有  $r(\mathbf{A}) \geq m$  及  $r(\mathbf{B}) \geq m$ . 所以

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = m,$$

应该选(A).

【典型错误】 其他错误选项都有考生选择,可能是“猜的”.

本题难度值为 0.564,区分度为 0.297.

(6) 设  $\mathbf{A}$  为 4 阶实对称矩阵,且  $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{O}$ . 若  $\mathbf{A}$  的秩为 3,则  $\mathbf{A}$  相似于

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

【答】 应选(D).

【分析】 本题考查矩阵的相似及矩阵的特征值,是很基本的题.

【解】 因  $\mathbf{A}$  是秩为 3 的实对称矩阵,所以  $\mathbf{A}$  必相似于秩为 3 的对角矩阵. 设  $\lambda$  为  $\mathbf{A}$  的特征值,由  $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{O}$  可得  $\lambda^2 + \lambda = 0$ , 即  $\lambda = 0$  或  $-1$ . 由此可知只有选项(D)是正确的.

【注】 本题中“ $\mathbf{A}$  为实对称矩阵”的条件是可以不要的. 但若取消该条件,题目的难度将加大,因为此时  $\mathbf{A}$  相似于对角矩阵本身就不是一个容易的证明题.

本题难度值为 0.775,区分度为 0.324.

$$(7) \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \text{ 则 } P\{X=1\} = \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$(A) 0. \quad (B) \frac{1}{2}. \quad (C) \frac{1}{2} - e^{-1}. \quad (D) 1 - e^{-1}.$$

【答】 应选(C).

【分析】 本题主要考查分布函数的概念及随机事件概率的计算. 已知分布函数,求随机事件的概率,是基本题,但需注意题中的随机变量既不是离散型也不是连续型.

由于分布函数在  $x=1$  处不连续,故利用  $P\{x=1\} = F(1) - F(1-0)$  计算.