解析幾何講義

（下　册）

數學系解析幾何教學小組編

東　北　師　範　大　學

一九五五年六月·長春

924

解析幾何講義

編　者：數學系解析幾何教學小組

出版者：東北師範大學教務處教材科

印刷者：東北師範大學印刷廠

一九五五年六月・初版，1500冊

估0038 0.1

第二編　空間解析幾何學

第一章　空間解析幾何學的一些簡單問題

空間內的笛卡兒直角座標。

空間的向量，向量在軸上的射影。

向量在座標軸上的射影。

方向餘弦。

兩點間的距離，按已知比線段的分割。

柱面座標。

球面座標。

第二章　關於向量的線性運算

線性運算的定義。

線性運算的基本性質。

向量的差。

關於射影的基本定理。

按空間座標的基本向量、將向量分解為分向量。

第三章　向量的數性積

數性積與它的基本性質。

用相乘向量的座標表示其數性積。

第四章　向量的向量積，混合積與二重向量積。

向量積與它的基本性質。

用相乘向量的座標表示其向量積。

三個向量的混合積。

用相乘向量的座標表示其混合積。

二重向量積。

第五章　曲面方程式與曲線方程式

曲面方程式。

曲線方程式，關於三個曲面相交的問題。

曲面方程式。

代數曲面。

第六章　平面爲一次曲面，直線方程式

平面爲一次曲面。

平面的不完整方程式。

截距式的平面方程式。

平面的法線式方程式。

由點到平面的距離。

直線方程式。

直線的方向向量，直線的典型方程式，直線的參數方程式。某些補充問題與例題。

第七章　二次曲面，座標變換

球面。

直紋面。

柱面。

§51. 柱 面 座 標

175. 在101圖中，設p（x,y,t）為空間的一點，把它射影在座標面xoy上，設它的射影為N，通過N平行於y軸引NA而交x軸於A，則OA=x：平行於x軸引NB而交y軸於B，則OB=y。

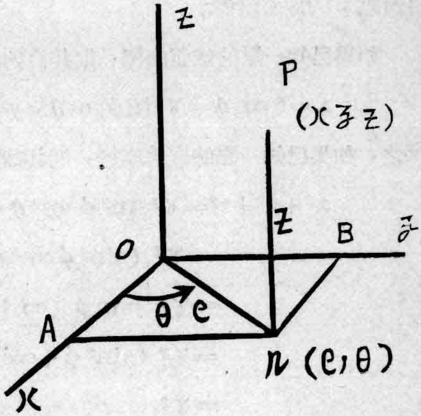


圖 101

設N的極座標為（ρ，θ）。當已知ρ，θ，z時，則點P就確定，ρ，θ，z叫做點p的柱面座標，

如果已知一點的柱面座標，則其直角座標為：

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z.$$

反之，如果已知一點的直角座標，則其柱面座標為：

$$\rho^2=x^2+y^2,\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},\quad z=z.$$

註．點P可看做在以ρ為底半徑，以z軸為軸的直圓柱面之上，這就是柱面座標的命名的由來。

§52. 球 面 座 標

176. 在圖102中，設p（x,y,z）為空間的一點，把它射影在座標面xoy上，設它的射影為N·通過N平行於y軸引NA而交x軸於A，則OA=x，平行於x軸引NB而交y軸於B，則OB=y。

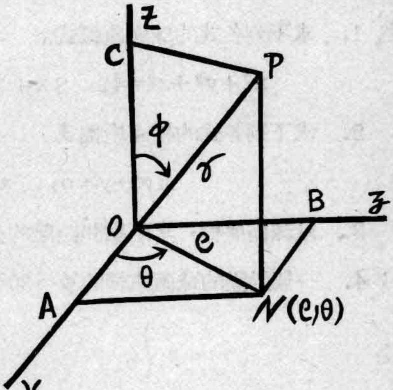


圖 102

連結op，設op=γ，zop=ϕ，通過

p 垂直於 z 軸引 pc 而交 z 軸於c.

設N的極座標爲（ρ，θ），當已知γ，ϕ，θ時，則點 p 就確定.γ，ϕ，θ叫做點 p 的球面座標。

如果已知一點的球面座標，則其直角座標爲：

$$x=\rho\cos\theta=\gamma\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta=\gamma\sin\varphi\sin\theta,\ z=\gamma\cos\varphi.$$

反之，如果已知一點的直角座標，則其球面座標爲：

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=\gamma^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\gamma^2\sin\phi\sin^2\theta+\gamma^2\cos^2\phi\\&=\gamma^2(\sin^2\phi\cos^2\theta+\sin^2\phi\sin^2\theta+\cos^2\phi)\\&=\gamma^2\{\sin\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\phi\}\\&=\gamma^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)\\&=\gamma^2\end{aligned}$$

$$\phi=\cos^{-1}\frac{z}{\gamma}=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

註：點 p可看做在以原點爲中心，以γ爲半徑的球面之上，這就是球面座標的命名的由來。

習題三十六

1. 求下列各式的球面座標式。

$$x^2+y^2+z^2=16,\ 2x+3y=0,\ 3x^2+2y^2=7z^2$$

2. 求下列各式的柱面座標式。

$$5x-y=0,\quad x^2+y^2=4$$

3. 就球面座標，求兩點間距離的公式。

4. 一個動點的球面座標的$\phi=30°$，求這個點的軌跡。

第二章 關於向量的線性運算

§ 53. 線性運算的定義

177. 由初等物理學中已經知道，某些物理的量，例如溫度，質量，密度，都叫做無向量，某些其他的量例如力，點的移位，速度，加速度，都叫做有向量。

每一個無向量可以用一個數表示，而這個數是這個量對於對應度量單位的比。反之，有向量不能僅用一個數表示；這是因爲有向量除具有大小外還具有方向。

爲了抽象的的表示具體的（物理的）有向量，可以用幾何向量，幾何向量是所謂向量計算的對象。它恰如數是算術對象一樣。

在向量計算中將作關於向量的一些個運算；這種運算是物理學中各種具體有向量所產生的同一式樣的運算在數學上的抽象化。

爲了滿足與數學有關的各種科目的需要而發生的向量計算問題，就是在數學領域中也是非常有用的。在本講義中向量計算是爲解析幾何學中的方便工具而使用的。

178. 首先我們介紹關於向量的線性運算，即所謂向量的加法以及向量與數的乘法等運算，

〔二向量和的定義〕；設已知向量 a 與b，當向量 b 的始點附着於向量 a 的終點時，則自向量 a 的始點至向量 b 的終點的向量，叫做兩個向量的和：a＋b。

和 a+b 的作圖如圖103所示。在這個定義中所包含的向量加法法則，一般叫做〖三角形法則〗。

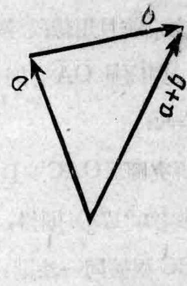


圖 103

註. 按三角形法則作向量的和 a+b時向量b的終點有時與向量a的始點重合，此時a＋b是零向量；a+b=O.

〔向量與數相乘的積的定義〕：設已知向量 a 與數 α，以向量 a 的模與數 α 的模的相乘積爲模，且與向量 a 平行或在同一直線上，而方向當 α 爲正數時與 a 相同，當 α 爲負數時與 a 相反的向量叫做向量 a 與數 α 的乘積：αa（或者同樣 $a\alpha$）。

作向量 αa 的運算，叫做向量 a 與數 α 的乘法，

註1. 如果 $a=o$，或者 $\alpha=o$，則它們的乘積的模等於零，並且因此是零向量，此時積 αa 的方向不確定，

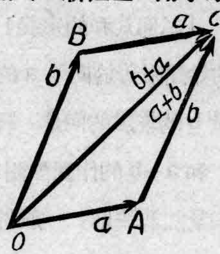
註2. 向量與數乘積運算的意義，可以明確地說明如下：用數 α 乘向量 a 是將向量 a 延長爲 α 倍，當然這種說法是有條件的，若是 $\alpha=\frac{1}{2}$ 時，則延長爲 α 倍，實際上是將 α 的長度減少爲二分之一，若是 α 爲負數，則延長向量爲 $|\alpha|$ 倍（α 的模倍）且變其方向爲相反的方向，

§. 54. 線性運算的基本性質

179. 現在確立線性運算的基本性質，這種性質常常應用在向量計算中，

首先說明，任意兩個向量的和與它們的順序無關，

爲此目的，研究任意二向量 a 與 b，因爲幾何的向量是自由向量，所以可以將向量 a 與 b 附着於任意選取的一點 o，用字母 A 與 B 表示在這種位置的向量 a 與 b 的終點，（圖 104）現在將向量 b 移於點 A，它的終點（在新位置）用字母 C 表示之，並且用線段連結點 B 與點 C，顯然，向量 $\overline{BC}$ 與向量 $\overline{OA}$ 有同樣的長度並且同一方向，所以 $BC=a$.



104

研究圖形 OAC 並且回想向量的加法法則（三角形法則參考 n°178）則得，$\overline{OC}=a+b$，另一方面究研圖形 OBC 根據同一法則，則得 $\overline{OC}=b+a$。所以

$$a+b=b+a \quad (1)$$

因此命題得以證明。

恒等式（1）所表示的向量加法性質，叫做交換性質，

註．圖形 OABC 叫做具有同一始點O的向量 a 與b所構成的平行四邊形，向量 $\overline{OC}$ 是它的對角線（這樣說法包括 $a=\overline{OA}$，與 $b=\overline{OB}$ 在同一直線上的情形就是此時OABC不是原來所說的平行四邊形），根據以上所述，則向量的加法可簡單地敘述爲：

如果向量 a 與 b 有共同始點，並用它們作成平行四邊形，則和 a+b（或者 b+a）是這個平行四邊形的對角線，而從 a 與 b 的共同始點出發。

這樣所說的向量的加法法則，叫做『平行四邊形法則』。

180．在確定兩個向量的和以後，自然可以確定任意個向量的和。

例如，設已知三個向量 a，b 與 c，加 a 與 b，我們得向量 a+b，現在對於它加以向量 c，我們則得向量（a+b）+c，並且同樣可以作向量 a+（b+c），就是於向量 a 加以和 b+c，

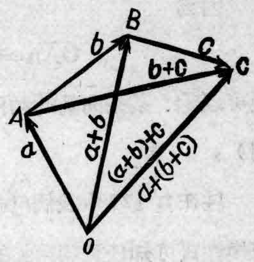
不難證明，對於任意三個向量 a，b，c，等式

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (2)$$

恒成立，表示於等式（2）的向量加法的性質叫作結合性質，

爲了證明結合性質，就向量的位置研究之，就是使向量 b 附着於向量 a 的終點，而向量 C 附着於向量 b 的終點，在這樣的它們的位置向量 a 的始點用 o 表示，終點用 A 表示，向量 b 的終點用 B 表示，並且向量 C 的終點用 C 表示，（圖105）此時

$$(a+b)+c=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}$$
$$=\overline{OB}+\overline{BC}+=\overline{OC}$$
$$a+(b+c)=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})$$
$$=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$$



105

所以

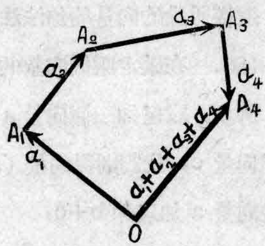
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

這就是所要證明的。

根據向量加法的結合性質，我們可以說關於三個向量 a，b，c 的和，可以看做 $a+b+c=(a+b)+c$ 或 $a+b+c=a+(b+c)$，同樣可以確定四個，五個以至於任意個向量的和。

實際上作某些向量的和不必逐次求它們每兩個的和；任意個向量的和可以利用以下的方法就可作出。

向量加法的一般法則，為了作向量 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 的和，必須將向量 a_2 附着於向量 a_1 的終點，再將向量 a_3 附着於向量 a_2 的終點，然後再將向量 a_4 附着於向量 a_3 的終點等等，直到向量 a_n 為止，此時和 $a_1+a_2+a_3\cdots\cdots+a_n$ 是以向量 a_1 的始點為始點以 a_n 的終點為終點的向量。



106

用字母 o 表示向量 a_1 的始點，用字母 A_1，A_2，……，A_n 分別表示在此位置的向量 a_1，a_2，……a_n 的終點。圖形 $OA_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$，叫做分向量，$\overline{OA_1}=a_1$，$\overline{A_1A_2}=a_2$，……，$\overline{A_{n-1}A_n}=a_n$ 的折綫：向量 $\overline{OA_n}$ 叫做折線的封閉折線，

因為

$$\overline{OA_n}=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\cdots+\overline{OA_n}=a_1+a_2+\cdots a_n$$

則可以說：某些向量的和作圖可以利用封閉折線（圖 106 表示四個向量和的作圖），

註在 n°177 中我們已確定兩個向量的和與它們的順序無關。因此從向量加法的交換性質可知任意個向量的和也與它們的順序無關。

181. 在這裏注意三個線性運算的規律，而它們同時對於向量的加法，及向量

與數的乘法有關，這些性質可以用下面三個恒等式來表示，在這裏λ與μ是任意數，a與b是任意向量：

$$1)\ (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a.$$

$$2)\ \lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a.$$

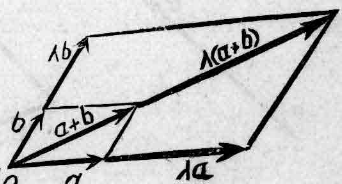
$$3)\ \lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b.$$

第一個恒等式顯然是眞實的，如果將它用幾何術語敘述之，就是：當延長向量a爲$\lambda+\mu$倍時所得的向量等於延長向量a爲λ倍與延長向量a爲μ倍的和所得的向量。

註，在這裏「延長」應該理解爲n°178註2中所說的。

第二個恒等式也有同樣地明顯的幾何意義：當延長向量a爲μ倍，然後再延長爲λ倍所得的向量，是與直接延長向量a爲$\lambda\mu$倍所得的向量一樣。

第三個恒等式可用相似圖形的理論來說明，因爲向量a+b是由向量a與b所作的平行四邊形的對角綫（假設a與b附着於共同始點），當延長向量a,b與a+b爲λ倍時，這個平行四邊形，變爲它的相似形，所以仍是平行四邊形；因此$\lambda(a+b)$是由向量λa與λb所作的平行四邊形的對角綫；所以$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.（參考圖107，對應數$\lambda>O$的情形；圖中所有的向量都看做附着於點O）



107

現在所說的線性運算的性質有原則上的價值，因爲它們無論在向量代數中或在普通代數中都同樣的被應用，它們中的第一個表示向量因數按組成的數因數「分配」「可能」。第三個表示數因數按組成的向量因數「分配」「可能」，因此這兩種性質叫做分配性質。同時它們確定當用數的多項式乘向量的多項式時可用「逐項」相乘的法則。

第二個性質表示向量與某些數連續相乘時數因數的結合可能，〔例如2（5a）

=10a〕，因此第二個性質叫作結合性質。

§. 55. 向　量　的　差

182. 設 a 是任意向量，向量（—1）a 叫做向量 a 的反向量並且用記號 —a 表示：

$$-a=(-1)a.$$

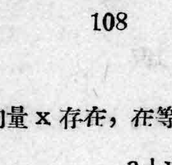
因為當以—1乘向量 a 時，可得與向量 a 在同一直線上並且模相等，而方向相反的向量（圖108），所以向量 a 與—a 有時叫做相等的反向量。

顯然，—（—a）=a，即向量—a 的反向量是向量 a 自身，因此向量 a 與向量—a，也叫做互相地相反。如果將向量—a 附着於向量 a 的終點，則向量—a 的終點便與向量的始點重合；所以a+（—a）是零向量：

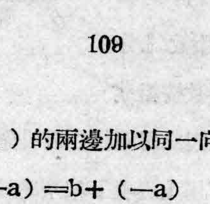
$$a+(-a)=o$$

183. 現在研究任意兩個向量 a 與 b，並且確定問題：求向量 x，而把它加於向量 a 則得向量 b，換句話說，我們要解方程式

$$a+x=b \qquad (1)$$



108



109

在解這個方程式以前，先說明相等向量加同一向量其和相等，就向量 c,d,e 來說，如果 c=d，則由於向量加法的三角形法則，顯然得有

$$c+d=d+e.$$

現在解方程式（1）假設所求的向量 x 存在，在等式（1）的兩邊加以同一向量—a；我們得有：

$$a+x+(-a)=b+(-a)$$

而
$$a+x+(-a)=x+a+(-a)=x+o=x$$

所以所要求的向量僅僅是向量

$$x=b+(-a).$$

同時容易看出，最後的這個向量確實地滿足方程式(1)。因爲如果 $x=b+(-a)$，則

$$a+x=a+b+(-a)=b+a+(-a)=b+o=b.$$

因此，對於任意向量 a 與 b，方程式(1)恒有解 $x=b+(-a)$，並且是唯一的。

向量 $b+(-a)$ 叫做向量 b 與 a 的差，並且表示以記號 $b-a$。按照前面的證明，在向量代數中所導入的向量減法運算，如同算術中加法的逆運算，

向量差的作圖方法，可以這樣的敘述：爲了求差 $b-a$，必須對於向量 b 加以向量 a 的反向量。（圖109）

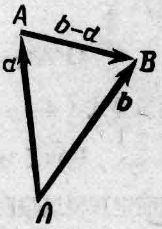
181. 以後常常應用有共同始點的向量差，設，$\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 是始於一點 O 的兩個任意向量，研究這兩個向量與向量 $\overline{AB}$，按照向量的加法法則，有：

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$$

再按照差的定義

$$\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{AB}$$

因此，附着於共同始點的兩個向量差，是自〖減向量〗的終點至〖被減向量〗的終點的向量，（圖110）



110

§. 56. 關於射影的基本定理

185. 現在確定關於向量射影的兩個重要定理：

定理28. 向量和的射影等於它們的射影的和（在同一軸上）

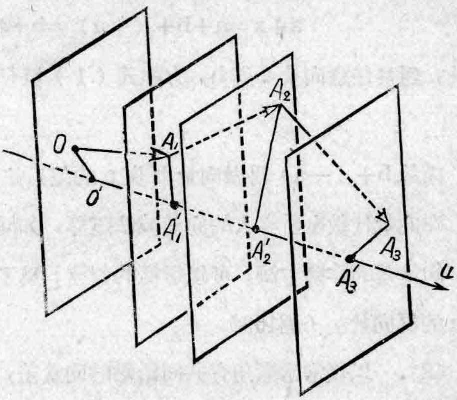
$$nPu(a_1+a_2+\cdots+a_n)=npua_1+npua_2+\cdots+nPua_n.$$

證明，用分向量 a_1，a_2，a_3，…a_n 組成折線（n°180），即將向量 a_2 附着

於向量 a_1 的終點，再將向量 a_3 附着於向量 a_2 的終點，依此類推，最後將向量 a_n 附着於向量 a_{n-1} 的終點，用 O 表示（對於這種位置的向量）向量 a_1 的始點；用 A_1 表示它的終點，用 A_2 表示向量 a_2 的終點，依此類推，此時

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$
$$=\overline{OA_n} \quad (1)$$

射影所有點 $O, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在軸 u 上並且相應地用 $O', A_1', A_2, \cdots A_n'$ 表示它們的射影（參考圖111，相應於 n＝3 的情形），則得有：



111

$$\left.\begin{array}{l} O'A_1'=npua_1, \\ A'A_2'=npua_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{n-1}A'_n=npua_n \end{array}\right\} (2)$$

另一方面由等式（1）

$$npu\,(a_1+a_2+\cdots+a_n)=npu\,\overline{OA_n}=O'A'_n \qquad (3)$$

而由 n°4 可知對於軸 u 上任意位置的點 $O', A_1', A_2, \cdots A'_n$，常使下列恒等式成立，

$$O'A'_n=O'A_1、+A_1'A_2'+A_2'A_3'+\cdots+A'_{n-1}A'_n \qquad (4)$$

由恒等式（4），利用公式（2）與（3），則：

$$npu\,(a_1+a_2+a_3\cdots+a_n)=npua_1+npua_n.$$

因而定理得以證明，

定理29．向量與數相乘積的射影等於向量射影與該數的乘積

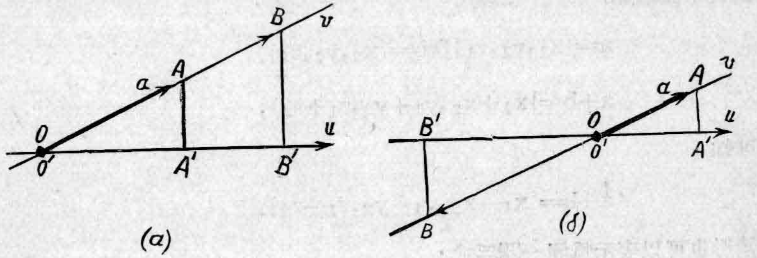
$$npu\propto a=\propto npua.$$

證明，設將向量 a 附着於軸 u 上的任意點 O；用 A 表示它的終點。假設也將

向量αa附着於點O並且用B表示它的終點。因此$\overline{OA}=a$，$\overline{OB}=\alpha a$.

研究直線v而在它的上面有點O，A，B，規定這個直線的（任意地）正向，按照前面的證明，我們把它看做軸，

射影點O，A與B；在軸u上，設O'，A'，B'是它們的射影(圖112，a與112，b)



112

按初等幾何學中已知的定理，有比列：

$$\frac{|O'B|}{|O'A'|}=\frac{|OB|}{|OA|} \qquad (5)$$

如果線段$\overline{OB}$與$\overline{OA}$（位在軸v上）方向相同，則線段$\overline{O'B'}$與$\overline{O'A'}$（在軸u上）方向也相同，如果線段$\overline{OB}$與$\overline{OA}$方向相反，則線段$\overline{O'B'}$與$\overline{O'A'}$方向也相反，（此時α爲負數；此種情形對應於圖112，b），因此這些線段的量的比$\frac{O'B'}{O'A'}$與$\frac{OB}{OA}$有同一符號；用以代替等式（5）得有

$$\frac{O'B'}{O'A'}=\frac{OB}{OA}$$

因爲$\overline{OB}=\alpha a$與$\overline{OA}=a$，則$\frac{OB}{OA}=\alpha$，所以$\frac{O'B'}{O'A'}=\alpha$或者$O'B'=\alpha O'A'$，所以

$$nP_u\alpha a=\alpha\, nP_u a.$$

因而定理得以證明，

註，最後的定理可以明顯地這樣叙述：當延長向量a爲α倍時它的射影也延長爲α倍。

186. 在n°164中已經說過用已知三個數——向量的座標，可以確定空間的每個自由向量的原理，我們還要了解，向量座標的何種算術運算對應於向量自身所產生的線性運算，如果根據向量的（笛卡兒）座標是它在座標軸上的射影的意義，這個問題用n°185的定理28與29即可解決；也就是根據定理28對於向量的加法等於它們的座標相加，因此，如果

$$a=\{x_1,y_1,z_1\}與b=\{x_2,y_2,z_2\}.$$

則
$$a+b=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+s_2\},$$

因此可知

$$a-b=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}.$$

此種情形也可以表示爲同一關係式：

$$\{x_1,y_1,z_1\}\pm\{x_2,y_2,s_2\}=\{x_1\pm x_2,y_1,y_2,z_1\pm z_2\} \qquad (6)$$

又由定理29對於向量與數的乘法等於它的座標乘以該數，

因此，如果 $a=\{x,y,z\}$ 則對於任意 α

$$\alpha a=\{\alpha x,\alpha y,\alpha z\}$$

此種情形也可以表示爲這樣：

$$\alpha\{x,y,z\}=\{\alpha x,\alpha y,\alpha z\} \qquad (7)$$

習　題　三　十　七

1. 設 $|a|=13$，$|b|=19$，與 $|a+b|=24$，求 $|a-b|$.

2. 三力M，N與P作用於一點，而方向是互相垂直，如果 $|M|=2$ 千米，$|N|=10$ 千米，$|P|=11$ 千米，求它們的合力R的大小，

3. 已知二向量 $a=\{3,-2,6\}$ 與 $b=\{-2,1,0\}$。求次列各向量在座標軸上的射影，（1）$a-b$，（2）$-\frac{1}{2}b$，(3) $\frac{1}{5}a-b$.

4. 求向量 $a=\{3,5,8\}$ 與 $b=\{-1,1,-4\}$ 的和與差的模.

187. 由以上的敍述容易導出已知座標的二向量共線的條件