近世代数基础

Sze—Tsen Hu 著

兰 州 大 学

1985. 1.

译 者 前 言

S.Z.Hu(胡) 教授的这本“近世代数基础”是为大学数学系高年级本科生近世代数选修课和研究生代数学公共基础课而写的一本教科书，它与国内所见之近世代数基础教材相比，除了最基本的东西外，二者在内容上互不包含，前者较多地强调了代数学应用于其他数学分支的部分，就Abel群，包括正合序列，张量积和同态群，进行了较详细的讨论，并且也对模，代数，以及范畴与函子作了一定的介绍。因此，在国内，本书除了同样可以作为大学本科生近世代数（二）或近世代数选修课的教材外，还可以作为数学各方向，特别是非代数方向）包括计算机科学）研究生的代数学公共基础课教材。

另外，这本书在内容的开发上，采用高观点，写得严密抽象，并使用了交换图的近代语言，可以使读者从中获得较好的代数学训练。

我们曾用本书的原文版，分别于80年上半年和83年下半年为77级大学生开设近世代数课和为83级基础数学研究生开设代数课（80级部分大学生也同时作为近世代数〈二〉选修），这一中译本就是在80年的使用中和使用后译出来的。这是一个集体劳动的成果：在翻译过程中，77级陆颂茜，周楚平，贺也平，孙朝辉等同学都作了不少工作；83级研究生曹为理，龙冬阳参与了对原译稿的全面校对和部分内容的重新翻译。

原书基本上没有什么错误，个别明显的笔误和印刷错误，翻译时已予改正。一两处须予进一步交待和适当订正的地方，因非一点文字就可以说清楚，我们照译在那里，细心的读者会发现问题，并予以适当的订正。

前　言

现在，抽象代数已包括在多数大学的本科生课程之内，它已成为训练数学家的必不可少的一部分。本书作为这一学科的一个一学期或两学季（quarter）课程的教科书，不仅适用于一年级研究生，而且也适用于高年级的大学生。对于经过两年或三年正规数学学习，已具备最起码数学修养的学生来说，本书的目的是用一种适宜的，循序渐近的方式提供这一学科的精华的一个系统的阐述。读者除具备实数四则的知识之外，不再需要什么专门的数学知识。

前四章可以作为一学季课程的教科书来用，稍加补充后也可作为群论的一学期课程的教科书，这里，重点放在Abel群而不是有限置换群上。除了必不可少的群论的典型材料之外，我们还对正合序列，同调群，张量积和同态群给予初步讨论。

第五章给出环，整区和域的一个简述。第六章介绍了模和代数的初等理论，直至给定模的张量代数，外代数和对称代数的构作。在最后一章里，我们要向学生介绍较新的范畴和函子的概念，它们已成为数学的许多分支的必不可少的内容了。

由于教学上的原因，抽象代数的一些常见的课题，尤其是线性代数和Galois理论，被有意省略了。线性代数之所以被省略，是因为现在它常常作为一门单独课程或者作为两年微积分学的一部分来讲授；另一方面，Galois理论被省略是

因为在作者看来，鉴于它的深度，它似乎应列入一年的最后一学季课程之内，而不是列入前两学季。

通常，重复是难免的，正相反，我们有意地，尽可能完整地对于不同的讨论对象来重复一些重要的概念。例如，在自由半群，自由群，自由Abel群，自由模，张量积，张量代数，外代数和对称代数的定义中，我们用交换三角形来重复泛代数的中心思想。在这样一本初等的教科书中，基本概念和基本构作的重复能够加深学生的理解和掌握。

在每一节的后面设置了精心选择的习题，以便使优秀学生为参与进一步开发这套理论而得到足够的训练，而其他学生则可获得作为课本内容的详尽注释的习题。

在书后的参考书目中列举了包含着大量的例题及习题，而且还可作为进一步学习之用的各种程度的参考书。本书中引用的一些参考书的名称及编号表示在括号内，在形如(Ⅳ，5.1）的索引符号中，Ⅳ表示第四章，5.1表示此章中这一结论的编号。

紧接着目录，给出了本书中使用的专用符号和缩写字的一个对照表。书中采用了几个与标准的集合论符号不同的符号，即，用口表示空集，用A＼B表示通常集合论的差集A—B。我们也用符号||表示证明完毕，用iff表示“if and,only if（当且仅当）”这个短语。

一九五七年以来，从各种讲义逐渐发展成本书的过程中作者一直得到“Air ForceOffice of Scientific Research”的巨大资助，对此，作者表示由衷的感谢。最后，作者对出版社和印刷者所给予的优遇和合作也表示感谢。

加利福尼亚，洛杉矶，加利福尼亚大学

Sze—Tsen Hu（胡）

专用符号及缩写

$\Longrightarrow$	推出
$\Longleftarrow$	被…推出
$\|\|$	
$\|$	证毕
iff	当且仅当
$\{\mid\}$	使得…的集合
$\in$	是…的元
$\notin$	不是…的元
$\square$	空集
$\subset$	含于
$\supset$	包含
$\cup$	并
$\cap$	交
$\setminus$	集合论的差
I	闭单位区间
$C_X(A)$	A关于X的补
$f: X \Rightarrow Y$	从X到Y的函数f
$f(A)$	集合A在f下的像
$f^{-1}(B)$	集合B在f下的逆像
$f \circ g$	f与g的合成
$f\|A$	f在A上的限制
aRb	aR—相关于b

$a \sim b$	a等价于b
$X/\sim$	X关于～的商集
$X \approx Y$	X同构于Y
X/A	X关于A的商群
$A \oplus B$	A与B的直接和
$A \otimes B$	A与B的张量积
$A \otimes_R B$	R上的张量积
$E_R(M)$	M关于R的外代数
$S_R(M)$	M关于R的对称代数
$T_R(M)$	M关于R的张量代数
Coim	余像
Coker	余核
deg	次数
dim	维数
Hom	同态群
Im	像
Ker	核

目　录

专用符号和缩写

第一章　集合　函数和关系

1．集合……………………………………（1）

2．函数……………………………………（7）

3．笛卡尔积………………………………（14）

4．关系……………………………………（18）

第二章　半群

1．二元运算………………………………（23）

2．半群的定义……………………………（29）

3．同态……………………………………（33）

4．自由半群………………………………（38）

第三章　群

1．群的定义………………………………（45）

2．子群……………………………………（49）

3．同态……………………………………（54）

4．商群……………………………………（60）

5．有限群…………………………………（68）

6．直积……………………………………（74）

7．自由群…………………………………（81）

8．正合序列………………………………（85）

第四章　Abel群

1．概论……………………………………（95）

2．自由Abel群……………………………（100）

3．循环群的分解…………………………（106）

4．有限生成 Abel群………………………（109）

5．半正合序列……………………………（119）

6．张量积…………………………………（123）

7．同态群……………………………………（135）

第五章　环　整区和域

1．定义和例子……………………………………（141）
2．子环和理想……………………………………（147）
3．同态……………………………………（152）
4．特征……………………………………（157）
5．商域……………………………………（160）
6．多项式环……………………………………（166）
7．因子分解……………………………………（171）

第六章　模　向量空间和代数

1．定义和例子……………………………………（178）
2．子模和子代数……………………………………（183）
3．同态……………………………………（188）
4．自由模……………………………………（196）
5．张量积……………………………………（201）
6．分次模……………………………………（206）
7．分次代数……………………………………（213）
8．张量代数……………………………………（218）
9．外代数……………………………………（222）
10．对称代数……………………………………（227）

第七章　范畴和函子

1．半群胚……………………………………（231）
2．范畴……………………………………（235）
3．函子……………………………………（239）
4．函子的变换……………………………………（242）
参考书目……………………………………（246）
中英索引……………………………………（251）
英中索引……………………………………（261）

第一章　集合　函数和关系

在作为序篇的第一章里，我们给出集合，函数和关系的一个初步的讨论，其主要目的是介绍以后要用到的记号。为了使读者避免花费不必要的精力，这一课题将开发在尽可能低的水平上，而且以够用为准。特别地，我们不讨论选择公理及其等价公理的各种形式，事实上，这一公理仅以它允许一个无限选择的朴素形式应用在本书中。

1. 集　　合

在开发集合的初等理论的过程中，我们采用朴素的观点。所谓集合，直观地讲，就是一些对象的整体，它们或者被枚举出来，或者通过所具的一些共同性质而被确定。这并不是定义，因为“整体”这个词仅仅是“集合”这个词的一个同义词。在课本中，我们偶而也使用别的同义词，即“聚集”，“族”，等等。下面的集合的例子会有助于理解这个不加定义的术语的直观意义。

(a) “美国数学会”的所有成员的集合AMS。

(b) “美国数学协会”的所有成员的集合MAA。

(c) 所有自然数（即正整数）的集合N。

(d) 所有整数（即正整数，零或负整数）的集合Z。

(e) 所有实数的集合R。

在最后三个例子中给出的那些特殊集合的符号将在全书中自始至终使用。

集合X中的对象称为X的元，元素，或者点，它们可以是具体的东西，也可以是抽象的概念。我们用符号$\in$表示“是……的一个元”这个片语，于是，记号

$$x \in X$$

读作“x是X的一个元”，或者等价地，“x属于X”。$x \in X$的反面用

$$x \notin X$$

表示。

确定一个集合就是确定它的元。换句话说，集合X被确定，当且仅当我们能够断定任何给定的对象x是否属于X。通常，集合X的元通过它们所具的一些公共性质被确定，例如，若$p(x)$表示一个给定的关于对象x的命题，则我们就写

$$X = \{x | p(x)\}$$

来表示X是使得$p(x)$成立的所有对象x的集合。

集合X称为空集，当且仅当X没有元。我们用符号$\square$来表示空集，于是，$X = \square$读作X是空的。

集合X称为单一集，当且仅当X有且只有一个元。如果单一集X的那一单独的元是x，那么我们表示为

$$X = \{x\}.$$

逻辑上，有必要在对象x与集合$\{x\}$之间加以区别，然而为记法方便起见，我们常常对于对象x和这一对象x组成的单一集$\{x\}$使用同样的记号x。

更普遍地，如果x_1，x_2，…，x_n是n个给定的对象，那么

$$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

表示由对象x_1，x_2，…，x_n组成的集合X。

今设A和B为两个给定的集合。如果A的每一元都属于B，那么我们就说A含于B，或者等价地，B包含A，记为

$$A \subset B, \ B \supset A,$$

其中，符号$\subset$叫做包含。此时，A叫做B的子集。在上面给出的例子（c）—（e）中的集之间，我们有

$$N \subset Z \subset R.$$

如果$A \subset B$而且$B \subset A$，那么我们就说A和B是相等的，记为

$$A=B.$$

换句话说，两个集合相等，当且仅当它们有相同的元。如果$A \subset B$，但$A \neq B$，那么A就叫做是B的真子集。

给定的集合X的子集通常是借助附加进一步的条件到X的元上来定义的。例如，如果p（x）表示一个给定的关于X的元x的命题，那么

$$\{x \in X | \ p(x)\}$$

代表X的一个子集，它由X的使得p(x)成立的所有元组成。用这种方法，我们可以用公式

$$I=\{t \in R | \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

来定义实数的单位闭区间I。

由旧集合形成新集合有许多方法，下面的三种运算是基本的。并$A \cup B$定义为由至少属于集合A和B之一的那些对象x组成的集合；交$A \cap B$定义为由既属于集合A，又属于集合B的那些对象x组成的集合；差$A \setminus B$定义为由属于A但不属

于B的那些对象 x 组成的集合。这些定义可以用下面的等式的形式表示：

$$A\cup B=\{x|\ x\in A\text{或}x\in B\},$$

$$A\cap B=\{x|\ x\in A\text{且}x\in B\},$$

$$A\setminus B=\{x|\ x\in A\text{但}x\notin B\}.$$

定理1.1　关于任意集合A，B，C和X，下面的法则是成立的：

(1.1.1) 交换律：

$$A\cup B=B\cup A,$$

$$A\cap B=B\cap A.$$

(1.1.2) 结合律：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(1.1.3) 分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

(1.1.4)　DeMorgan公式：

$$X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B),$$

$$X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B).$$

这些法则的证明是简单的，因此，作为练习留给学生。作为示范，我们证明 DeMorgan公式的最后一个等式如下。

集合的等式的证明通常分为两部分。

(i) 包含

$$X\setminus(A\cap B)\subset(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$$

的证明：

设x为$X\setminus(A\cap B)$的任意元，则根据差的定义，我们有B

$x\in A$和$x\notin A\cap B$,后者意味着$x\notin A$,或者$x\notin B$。因为$x\in X$,所以$x\notin A$意味着$x\in X\setminus A$,而$x\notin B$意味着$x\in X\setminus B$。因此,我们有$x\in X\setminus A$或者$x\in X\setminus B$;换句话说,x必为集合$(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$的元。‖

(ii)包含

$$(X\setminus A)\cup(X\setminus B)\subset X\setminus(A\cap B)$$

的证明

设x为$(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$的任意元,则$x\in X\setminus A$,或者$x\in X\setminus B$。如果$x\in X\setminus A$,那么$x\in X$而$x\notin A$,由$x\notin A$可推出$x\notin A\cap B$,得$x$在集合$X\setminus(A\cap B)$中。同理可证,$x\in X\setminus B$也意味着$x$在$X\setminus(A\cap B)$中。‖

两个集合A和B叫做是不相交的,当且仅当$A\cap B=\square$;否则,就叫做是相交的。

并与交的概念可以如下地推广到任意多个集合的情形。如果Φ是一个集合族,那么

$$\bigcup_{X\in\Phi} X=\{x\mid 关于某个X\in\Phi,\ x\in X\},$$

$$\bigcap_{X\in\Phi} X=\{X\mid 关于每个X\in\Phi,\ x\in X\}.$$

可以验证,定理1.1中的那些法则关于任意多个集合的情形也成立。

如果A是集合X的一个子集,那么差$X\setminus A$称为A关于X的补。记为

$$C_XA=X\setminus A.$$

如果A也是另一个集合Y的子集,那么C_XA与C_YA是不同的集合。如果我们在某些情形仅仅考虑一个固定的集合X的子

集，那么我们就用CA来代替C_XA。

练　　习

1A. 证明定理1.1的全部公式（包括DeMergan公式）。

1B. 关于任意集合A和B，验证下列关系式：

(a) $\square \subset A$,

(b) $A \subset A$,

(c) $A \cup \square = A$,

(d) $A \cap \square = \square$,

(e) $A \cup A = A \cup A$

(f) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

1C. 关于任意集合A，B，C，建立下述命题：

(a) 如果$A \subset B$且$B \subset C$，那么$A \subset C$.

(b) 如果$A \subset C$且$B \subset C$，那么$A \cup B \subset C$.

(c) 如果$A \supset C$且$B \supset C$，那么$A \cap B \supset C$.

1D. 证明，关于任意集合A和B，下面三个论断是等价的：

(a) $A \subset B$,

(b) $A \cup B = B$,

(c) $A \cap B = A$.

1E. 证明一个固定集合X的子集的下述性质：

(a) $CX = \square$,

(b) $C\square = X$,

(c) $A \cup CA = X$,

(d) $A \cap CA = \square$,

(e) $CCA = A$,

(f) $C(A\cup B)=CA\cap CB$,

(g) $C(A\cap B)=CA\cup CB$,

(h) $C(A\setminus B)=B\cup CA$,

(i) 如果$A\cup B=X$且$A\cap B=\square$，那么$B=CA$，

(j) 如果$A\subset B$，那么$CB\subset CA$。

F. 关于任意集合A，B，C，验证下列等式：

(a) $A\setminus(A\setminus B)=A\cup B$,

(b) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$,

(c) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(B\cap C)$,

(d) $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$,

(e) $(A\setminus B)\cup(B\setminus B)=(A\cup B)\setminus(A\cup B)$,

(f) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$,

(g) $A\cap(B\setminus A)=\square$。

2. 函　　数

设X和Y为给定的集合，所谓从X到Y的一个函数$f: X\to Y$，我们指的是一个法则，依据这个法则，对于X的每个元x，都有Y的唯一的元$f(x)$与之对应

例1. 考察所有自然数的集合N和所有比给定的正整数p小的非负整数的集合Zp。关于任何$x\in N$，我们用p除x，得余数$f(x)$，这个数$f(x)$在Zp中，对应$x\to f(x)$就定义一个函数f: $N\to Zp$。

例2. 考察方程$y=x^2$。关于每一个实数$x\in R$，$y=x^2$也是一个实数，因此，对应$x\to x^2$定义了一个从R到其自身

的函数$f: R \to R$，此函数通常用x^2来表示；从而又写作x^2: $R \to R$。

设f: $X \to Y$为一个给定的函数，则集合X称为函数f的前域，而集合Y称为f的变程。关于前域X的每一个点x，变程Y的通过函数f对应于x的点$f(x)$称为x在f下的像，有时，$f(x)$也称为函数f在点x的值。

关于X的任何子集A，Y的关于所有$x \in A$的点$f(x)$组成的子集称为A在函数f下的像，用$f(A)$表示；记为

$$f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}.$$

特别地，f的整个前域X的像$f(X)$简称为f的像，用$\mathrm{Im}(f)$表示。

定理2.1. 关于函数$f: X \to Y$的前域X的任何子集A和B，我们有

$$(2.1.1) \qquad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$(2.1.2) \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

(2.1.1) 和 (2.1.2) 的证明作为练习留给学生。我们容易推广这两式到前域X的任意多个子集的情形。

由下列可以看出，(2.1.2) 式的两端不常相等。设$X = \{a, b\}$，$A = \{a\}$，$B = \{b\}$，$Y = \{y\}$，并设f: $X \to Y$是那个唯一的函数，则我们有

$$f(A \cap B) = f(\Box) = \Box,$$

$$f(A) \cap f(B) = Y.$$

如果$f(X) = Y$，那么我们称f: $X \to Y$是从X到Y上的函数，通常，我们也称这一函数f: $X \to Y$是满射的。因此，f: $X \to Y$是满射的，当且仅当关于Y中的每一个点y，至少存在一个X中的点x，使得$f(x) = y$。例1中的函数是满射的，例

2 中的函数却不是。

如果$f(X)$由Y的单独一个点组成，那么我们称f：$X\to Y$是从X到Y的常值函数。如果X是非空的，那么关于每一个$y\in Y$，有唯一的使得$f_y(X)=y$的常值函数f_y：$X\to Y$。

关于Y的任何子集B，由使得$f(x)\in B$的点$x\in X$组成的X的子集称为B在函数f：$X\to Y$下的逆像，用$f^{-1}(B)$表示，记为

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}.$$

特别地，如果B为单一集，例如$B=\{y\}$，那么$f^{-1}(B)$称为点y在f下的逆像，表示为$f^{-1}(y)$。于是，一个点$y\in Y$属于函数f的像$f(X)$，当且仅当$f^{-1}(y)$是非空的。

定理2.2. 关于函数f：$X\to Y$的变程Y的任何子集A和B，我们有

(2.2.1) $$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B),$$

(2.2.2) $$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B),$$

(2.2.3) $$f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B).$$

(2.2.1) — (2.2.3) 的证明作为练习留给学生。我们容易推广前两个等式到变程Y的任意多个子集的情形。

比较命题 (2.1) 和 (2.2)，我们将发现，逆像的性质比像的性质更好，这就说明了为什么逆像的概念比像的概念应用得更广泛。

如果A和B是Y的不相交子集，那么由等式 (2.2.2) 可知，逆像$f^{-1}(A)$和$f^{-1}(B)$也是不相交的。特别地，Y的不同点的逆像是不相交的。

函数f：$X\to Y$叫做是一对一的或内射的，当且仅当关于每一个点$y\in Y$，逆像$f^{-1}(y)$是空的，或为单一集。于是，