

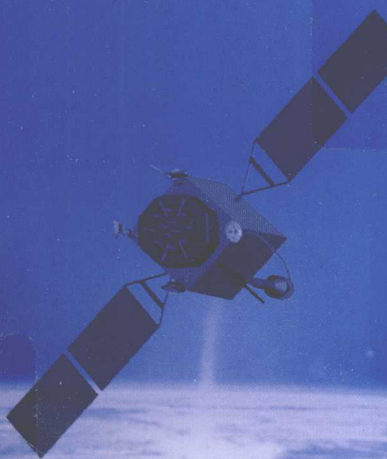


北京市高等教育精品教材立项项目

Kalman滤波理论 及其在导航系统中的应用

(第二版)

付梦印 邓志红 闫莉萍 编著



科学出版社
www.sciencep.com

北京市高等教育精品教材立项项目

Kalman 滤波理论 及其在导航系统中的应用

(第二版)

付梦印 邓志红 闫莉萍 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书紧密结合 Kalman 滤波理论在导航、制导与控制领域的应用,系统地介绍了 Kalman 滤波基础理论及最新发展。内容主要包括 Kalman 滤波基本理论、实用 Kalman 滤波技术、鲁棒自适应滤波、联邦 Kalman 滤波、基于小波分析的多尺度 Kalman 滤波和离散非线性系统滤波等。

本书注重理论与工程实际相结合,在介绍理论基础,还融入了作者及其他研究者的实际应用成果,理论与实践并重。

本书可作为控制科学与工程等专业的本科生和研究生教材,也可供相关专业的研究人员和工程人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用/付梦印,邓志红,闫莉萍编著. —2 版. —北京:科学出版社,2010

北京市高等教育精品教材立项项目

ISBN 978-7-03-027041-2

I. ①K… II. ①付… ②邓… ③闫… III. ①Kalman 滤波-滤波理论
②Kalman 滤波-应用-导航系统 IV. ①O211.64 ②V249.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 045803 号

责任编辑:张艳芬 王志欣/责任校对:朱光光

责任印制:赵 博/封面设计:耕者

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 10 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2010 年 4 月第 二 版 印张:14 1/4

2010 年 4 月第二次印刷 字数:323 000

印数:4 001—7 000

定价:42.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

Kalman 滤波作为一种最优估计理论与方法,由于其具有实时递推、存储量小和简单易行的特点,在工程应用中受到了重视,广泛应用于信号处理、控制、通信、航天、制导、目标跟踪、石油勘探、故障诊断、卫星测控、GPS 定位、检测与估计、多传感器信息融合、机器人及生物医学等领域。

本书第一版由付梦印、邓志红和张继伟共同编写,于 2003 年 10 月出版。中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所韩京清研究员和北京理工大学孙常胜教授详细审阅了本书并提出了许多宝贵意见。本书在海军工程大学、北京理工大学等高校被选为信息类研究生专业基础课教材,并得到了相关领域读者的厚爱。在这七年当中,Kalman 滤波的理论不断发展和完善,应用领域不断扩大,并且在本书作为教材使用过程中,作者也发现了一些疏漏之处,因此产生了再版的想法。

本书第二版保留了原书的基本部分,紧扣主题,删除了部分章节,并对个别章节内容进行了调整。同时,根据新技术的发展,增加了强跟踪滤波、基于小波分析的多尺度 Kalman 滤波、Sigma 点 Kalman 滤波和粒子滤波等内容,选择了适当的例子对理论应用进行了阐释。

本书的再版得到了“北京市高等教育精品教材立项项目”支持,以及北京理工大学研究生教育质量工程的资助,在此表示感谢;对本书引用的参考文献的作者表示感谢!

书中不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

作 者

2010 年 1 月

第一版前言

Kalman 滤波实质上是一种实时递推算法,其设计方法简单易行,所需的存储空间小,因此在工程实际中受到了重视。随着计算机技术的飞速发展,以 Kalman 滤波技术为核心的现代估计理论已广泛应用于航天、航空、航海、系统工程、通信、工业过程控制、遥感等各个领域。

本书紧密围绕 Kalman 滤波理论在导航、制导与控制领域的应用进行展开,分三部分共 8 章。第一部分(1~3 章)为 Kalman 滤波基本理论:第 1 章概括介绍滤波理论的应用背景、滤波理论基础及 Kalman 滤波理论的发展和应用;第 2 章介绍线性系统 Kalman 滤波基本方程;第 3 章介绍 Kalman 滤波稳定性及误差分析。第二部分(4~6 章)为实用 Kalman 滤波技术:第 4 章介绍噪声不满足假设条件下的滤波、Kalman 滤波发散的抑制、非线性系统扩展 Kalman 滤波及自适应滤波等;第 5 章针对 Kalman 滤波的计算发散,介绍各种分解滤波方法;第 6 章针对滤波系统存在的不确定性,介绍鲁棒滤波理论,包括 H^∞ 滤波理论和鲁棒最小方差滤波。第三部分(7、8 章)为 Kalman 滤波技术的新应用:第 7 章介绍 Kalman 滤波在信息融合技术中的应用;第 8 章介绍 Kalman 滤波在神经网络技术中的应用。本书注重理论与工程实际相结合,在介绍理论上,还融入了作者及其他研究者的实际应用成果,为 Kalman 滤波理论在相应领域的应用提供研究方法上的参考和借鉴。

中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所韩京清研究员和北京理工大学孙常胜教授详细审阅了本书并提出了许多宝贵意见,在此谨致深切谢意。

作 者
2003 年 8 月

目 录

第二版前言

第一版前言

第 1 章 绪论	1
1.1 Kalman 滤波理论基础	1
1.1.1 滤波与估计	2
1.1.2 线性最小方差估计	3
1.1.3 正交投影定理	6
1.1.4 白噪声与有色噪声	7
1.2 Kalman 滤波理论的发展及其应用	8
1.3 非线性滤波理论及方法	10
第 2 章 随机线性系统 Kalman 滤波基本方程	12
2.1 随机线性系统的数学模型	12
2.1.1 随机线性离散系统的数学模型	12
2.1.2 随机线性连续系统的数学模型	13
2.1.3 随机线性连续系统的离散化	15
2.2 随机线性离散系统的 Kalman 滤波方程	17
2.2.1 随机线性离散系统 Kalman 滤波基本方程	17
2.2.2 随机线性离散系统 Kalman 滤波方程的直观推导	19
2.2.3 随机线性离散系统 Kalman 滤波方程的投影法推导	22
2.3 随机线性连续系统 Kalman 滤波基本方程	26
2.4 随机线性离散系统的最优预测与平滑	31
2.4.1 随机线性离散系统的最优预测	31
2.4.2 随机线性离散系统的最优平滑	33
思考题	36
第 3 章 Kalman 滤波的稳定性及误差分析	38
3.1 稳定性的概念	38
3.2 随机线性系统的可控性与可观测性	39
3.2.1 随机线性系统的可控性	39
3.2.2 随机线性系统的可观测性	40
3.3 Kalman 滤波稳定性的判别	40
3.3.1 随机线性系统的滤波稳定性判别	40
3.3.2 特定条件系统的滤波稳定性判别	43
3.4 Kalman 滤波的误差分析	45

3.5	几种可观测性分析方法及其在惯性导航系统中的应用	48
3.5.1	惯性导航系统初始对准的误差方程	49
3.5.2	几种可观测性分析方法及其应用	49
	思考题	54
第4章	实用 Kalman 滤波技术	55
4.1	噪声非标准假设条件下的 Kalman 滤波	55
4.1.1	存在确定性控制时的 Kalman 滤波	55
4.1.2	白噪声相关条件下的 Kalman 滤波	56
4.1.3	有色噪声条件下的 Kalman 滤波	58
4.2	Kalman 滤波发散的抑制	61
4.2.1	Kalman 滤波中的发散现象	61
4.2.2	Kalman 滤波发散的抑制方法	63
4.3	分解滤波	66
4.3.1	非负定矩阵的三角形分解	66
4.3.2	观测值为标量时的误差方差平方根滤波	68
4.3.3	信息平方根滤波	71
4.3.4	序列平方根滤波	75
4.3.5	UD 分解滤波	78
4.3.6	分解滤波在近地卫星 GPS 自主定轨算法中的应用	81
	思考题	87
第5章	鲁棒自适应滤波	89
5.1	系统的不确定性	89
5.2	鲁棒控制技术基础	90
5.2.1	基础知识	90
5.2.2	H^∞ 控制的标准设计问题	91
5.2.3	Hamilton 矩阵与 H^∞ 标准设计问题的求解	92
5.3	H^∞ 滤波	95
5.3.1	H^∞ 滤波问题的表达	95
5.3.2	次优 H^∞ 滤波问题的解	96
5.3.3	H^∞ 滤波器的参数化	97
5.3.4	GPS/INS 组合导航系统 H^∞ 滤波	98
5.4	强跟踪滤波	100
5.4.1	强跟踪滤波器的引入	100
5.4.2	基于强跟踪滤波器的多传感器状态融合估计	103
5.4.3	实例	105
5.5	自适应滤波	108
5.5.1	相关法自适应滤波	108
5.5.2	Sage-Husa 自适应 Kalman 滤波	111

5.5.3 激光陀螺随机漂移自适应 Kalman 滤波	118
思考题	120
第 6 章 联邦 Kalman 滤波	122
6.1 各子滤波器估计不相关条件下的联邦滤波算法	122
6.2 各子滤波器估计相关条件下的联邦滤波算法	124
6.2.1 信息分配原则与全局最优估计	124
6.2.2 联邦滤波算法的时间更新	126
6.2.3 联邦滤波算法的观测更新	128
6.2.4 联邦滤波器的结构	129
6.3 基于联邦滤波的惯性导航姿态组合算法	131
6.3.1 基于姿态-速度-位置组合方式的联邦滤波器实现结构	132
6.3.2 姿态组合观测方程	133
6.3.3 仿真实例	134
思考题	136
第 7 章 基于小波分析的多尺度 Kalman 滤波	137
7.1 小波分析	137
7.1.1 小波变换	137
7.1.2 多尺度分析	139
7.1.3 Mallat 算法	142
7.2 多尺度系统理论	145
7.3 动态系统的多尺度 Kalman 滤波	146
7.4 多尺度 Kalman 滤波在导航系统中的应用	149
7.4.1 系统描述	149
7.4.2 多尺度模型的建立	150
7.4.3 状态的多尺度估计	152
7.4.4 多尺度 Kalman 滤波在导航系统中的应用实例	155
思考题	159
第 8 章 离散非线性系统滤波	160
8.1 扩展 Kalman 滤波	160
8.1.1 随机非线性离散系统标称状态线性化滤波	161
8.1.2 随机非线性离散系统扩展 Kalman 滤波	163
8.1.3 扩展 Kalman 滤波在车辆 GPS/DR 组合定位系统中的应用	164
8.2 Sigma 点 Kalman 滤波	171
8.2.1 无迹 Kalman 滤波	171
8.2.2 中心微分 Kalman 滤波	174
8.2.3 平方根无迹 Kalman 滤波	176
8.2.4 Sigma 点 Kalman 滤波在 GPS/INS 组合导航系统中的应用	177
8.3 粒子滤波	185

8.3.1 隐马尔可夫模型与贝叶斯推断·····	186
8.3.2 重要性采样·····	188
8.3.3 序列重要性采样·····	189
8.3.4 重采样法·····	191
8.3.5 优选重要性密度函数法·····	193
8.3.6 无迹粒子滤波在捷联惯性导航系统初始对准中的应用·····	194
思考题·····	202
参考文献 ·····	203
附录 ·····	208
附录 A 随机变量与随机过程 ·····	208
A.1 随机变量的数学特征·····	208
A.2 随机过程·····	210
附录 B 矩阵运算的一些公式 ·····	211
B.1 矩阵代数的一些常用性质公式·····	211
B.2 分块三角矩阵求逆公式·····	211
B.3 向量与矩阵的微分运算·····	212
B.4 矩阵求逆引理·····	215
附录 C 几种常见估计方法的比较 ·····	217

第 1 章 绪 论

1.1 Kalman 滤波理论基础

信号是传递和运载信息的时间或空间函数。信号有两类,即确定性信号和随机信号。确定性信号的变化规律是既定的,可以表示为一个确定的时间函数或空间函数,具有确定的频谱特性,如阶跃信号、脉宽固定的矩形脉冲信号、正余弦函数等,它们对于指定的某一时刻,可确定一个相应的函数值。随机信号没有既定的变化规律,不能给出确定的时间或空间函数,在相同的初始条件和环境条件下,信号每次实现都不相同,如陀螺随机漂移、GPS 的定位误差、随机海浪等,随机信号没有确定的频谱特性,但是具有确定的功率谱,可以通过统计特性来描述其特征。

信号在传输与检测过程中不可避免地要受到外来干扰与设备内部噪声的影响,为获取所需信号,排除干扰,就要对信号进行滤波。滤波是指从混合在一起的诸多信号中提取出所需信号的过程。信号的性质不同,获取所需信号的方法也就不同,即滤波的手段不同。对于具有确定频谱特性的确定性信号,可根据各信号所处频带的不同,设置具有相应频率特性的滤波器,如低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器等,使有用信号尽量无衰减地通过,而干扰信号受到抑制。这类滤波器可用物理方法实现,即模拟滤波器,也可用计算机通过特定的算法实现,即数字滤波器。对确定性信号的滤波处理通常称为常规滤波。

随机信号具有确定的功率谱特性,可根据有用信号和干扰信号的功率谱设计滤波器。美国学者维纳(Wiener)等提出了 Wiener 滤波,它通过功率谱分解来设计滤波器,所以在对信号进行抑制和选通方面同常规滤波是相似的。然而在频域设计 Wiener 滤波器时要求解维纳-霍普方程,计算量较大,需要大量的存储空间,这一要求限制了 Wiener 滤波的应用。

Kalman 滤波是卡尔曼(Kalman)于 1960 年提出的从与被提取信号有关的观测量中通过算法估计出所需信号的一种滤波方法。他将状态空间的概念引入随机估计理论中,将信号过程视为白噪声作用下的一个线性系统的输出,用状态方程来描述这种输入-输出关系。估计过程中利用系统状态方程、观测方程和白噪声激励(系统过程噪声和观测噪声)的统计特性构成滤波算法。由于所利用的信息都是时域内的变量,所以不但可以对平稳的、一维的随机过程进行估计,也可以对非平稳的、多维随机过程进行估计。这就完全避免了 Wiener 滤波在频域内设计时遇到的困难,适用范围比较广泛。

实际上,Kalman 滤波是一套由计算机实现的实时递推算法,它所处理的对象是随机信号,利用系统噪声和观测噪声的统计特性,以系统的观测量作为滤波器的输入,以所要求的估计值(系统的状态或参数)作为滤波器的输出,滤波器的输入与输出由时间更新和观测更新算法联系在一起,根据系统状态方程和观测方程估计出所有需要处理的信号。

所以,此处所谈的 Kalman 滤波与常规滤波的涵义与方法完全不同,它实质上是一种最优估计方法。下面对 Kalman 滤波的基础理论——估计理论进行详细阐述。

1.1.1 滤波与估计

在随机控制和信息处理过程中,通常观测信息中不仅包含所需信号,而且还包含随机观测噪声和干扰信号。通过对一系列带有观测噪声和干扰信号的实际观测数据进行处理,从中得到所需要的各种参量的估计值,这就是估计问题。在工程实践中经常遇到的估计问题有两类:一是系统的结构参数部分或全部未知,有待确定;二是实施最优控制需要随时了解系统的状态,而由于种种限制,系统中的部分或全部状态变量不能直接测得。这就包含了两类估计问题——参数估计和状态估计。

一般估计问题都是由估计验前信息、估计约束条件和估计准则三部分构成。做以下假设:

(1) X 为 n 维未知状态或参数, \hat{X} 为其估计值。

(2) Z 为与 X 有关的 m 维观测向量,它与 X 的关系可表示为

$$Z = f(X, V) \quad (1.1)$$

(3) V 为 m 维观测噪声,它的统计规律部分或全部已知。

基于以上假设的估计问题可叙述为:给定观测向量 Z 和观测噪声向量 V 的全部或部分统计规律,根据选定的准则和约束条件(1.1),确定一个函数 $H(Z)$,使得它成为(在选定准则下) X 的最优估计,即

$$\hat{X} = H(Z) \quad (1.2)$$

在应用中,人们总是希望估计出来的参数或状态越接近实际值越好,即得到状态或参数的最优估计。为了衡量估计的好坏,必须要有一个估计准则。估计准则以某种方式度量了估计的精确性,它体现了估计是否是最优的含义。很显然,估计准则可能是各种类型的,即最优估计不是唯一的,它随着准则不同而不同。因此,在估计时,要恰当选择衡量估计的准则。准则应该用函数来表达,在估计问题中称这个函数为指标函数或损失函数。

一般来说,损失函数是根据验前信息选定的,而估计式是通过损失函数的极小化或极大化导出的。不同的损失函数将导致不同的估计方法。原则上,任何具有一定性质的函数都可用作损失函数。然而,从估计理论的应用实践看,可行的损失函数只有少数几种。目前估计中常用的三类准则是直接误差准则、误差函数矩准则和直接概率准则。

直接误差准则:是指以某种形式的误差(如估计误差 $\tilde{X} = X - \hat{X}$ 或对 Z 的拟合误差 $\tilde{Z} = Z - \hat{Z}$ (\hat{Z} 是 \hat{X} 的函数))为自变量的函数作为损失函数的准则。在这类准则中,损失函数是误差的凸函数,估计式是通过损失函数的极小化导出的,而与观测噪声的统计特性无关。因此,这类准则特别适用于观测噪声统计规律未知的情况。最小二乘估计及其各种推广形式都是以误差的平方和最小作为估计准则。

误差函数矩准则:是以直接误差函数矩作为损失函数的准则。特别地,我们可将损失函数 \tilde{X} 选作直接误差函数,以其均值为零和方差最小为准则。在这类准则中,要求观测噪声的有关矩是已知的,显然它比直接误差准则需要更多的信息,因而可望具有更高的精

度。最小方差估计、线性最小方差估计等都是属于这类准则的估计。

直接概率准则:这类准则的损失函数是由某种形式误差的概率密度函数构成,有时也由熵函数构成。估计式由损失函数的极值条件导出。由于这类准则与概率密度有关,因此要求有关的概率密度函数是存在的,而且要知道它的形式。另外,除少数情况外,在这类准则下,估计的导出比较困难,因此这类准则的应用受到了一定的限制。极大似然估计和极大验后估计就是这类准则的直接应用。

估计方法与估计准则是紧密相关的。选取不同的估计准则,就会产生不同的估计方法。针对上述三类估计准则,常用的估计方法有最小二乘估计、线性最小方差估计、最小方差估计、极大似然估计和极大验后估计等。几种常见估计方法的比较见附录 C。

在估计问题中,常考虑如下随机线性离散系统模型

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} W_{k-1}, \quad \forall k \geq 0 \quad (1.3a)$$

$$Z_k = H_k X_k + V_k, \quad \forall k \geq 0 \quad (1.3b)$$

式中: X_k 是系统的 n 维状态向量; Z_k 是系统的 m 维观测向量; W_{k-1} 是系统的 p 维过程噪声向量; V_k 是系统的 m 维观测噪声向量; $\Phi_{k,k-1}$ 是系统的 $n \times n$ 维状态转移矩阵; $\Gamma_{k,k-1}$ 是 $n \times p$ 维干扰输入矩阵; H_k 是 $m \times n$ 维观测矩阵。在以后的讨论中,省略条件 $\forall k \geq 0$ 。

根据状态向量和观测向量在时间上存在的不同对应关系,我们可以将估计问题分为滤波、预测和平滑,以式(1.3)所描述的随机线性离散系统为例,设 $\hat{X}_{k,j}$ 表示根据 j 时刻和 j 以前时刻的观测值,对 k 时刻状态 X_k 做出的某种估计,则按照 k 和 j 的不同对应关系,分别叙述如下:

(1) 当 $k=j$ 时,对 $\hat{X}_{k,j}$ 的估计称为滤波,即依据过去直至现在的观测值来估计现在的状态。相应地,称 $\hat{X}_{k,k}$ 为 X_k 的最优滤波估计值,简记为 \hat{X}_k 。这类估计主要用于随机系统的实时控制。

(2) 当 $k>j$ 时,对 $\hat{X}_{k,j}$ 的估计称为预测或外推,即依据过去直至现在的观测值来预测未来的状态,并称 $\hat{X}_{k,j}$ 为 X_k 的最优预测估计值。这类估计主要用于对系统未来状态的预测和实时控制。

(3) 当 $k<j$ 时,对 $\hat{X}_{k,j}$ 的估计称为平滑或内插,即依据过去直至现在的观测值来估计过去的历史状态,并称 $\hat{X}_{k,j}$ 为 X_k 的最优平滑估计值。这类估计广泛应用于通过分析实验或实验数据对系统进行评估。

若将 X_k 换成 X_t , $\hat{X}_{k,j}$ 换成 $\hat{X}(t, t_1)$, 则上述分类对于连续时间系统同样适用。换句话说,线性系统的状态估计都可分成以上三类。

在预测、滤波和平滑三类状态估计问题中,预测是滤波的基础,滤波是平滑的基础。本书主要讨论滤波问题。

1.1.2 线性最小方差估计

所谓线性最小方差估计,就是在已知被估计量 X 和观测量 Z 的一、二阶矩的情况下,即已知均值 $E[X]$ 、 $E[Z]$, 方差 $\text{Var}[X]$ 、 $\text{Var}[Z]$ 和协方差 $\text{Cov}[X, Z]$, 假定所求的估计量

是观测量的线性函数,以估计误差方差矩阵达到最小作为最优估计的性能指标(损失函数)的估计方法。

这里假定估计 \hat{X} 是观测量 Z 的线性函数,即设

$$\hat{X}(Z) = a + BZ \quad (1.4)$$

式中: a 为与 X 同维的非随机向量; B 为行数等于被估计量 X 的维数、列数等于观测向量维数的非随机矩阵。记估计误差 $\tilde{X} = X - \hat{X}(Z)$,选择向量 a 和矩阵 B ,使得下列平均二次性能指标

$$\begin{aligned} J(\tilde{X}) &= \text{Tr}\{E[(X - a - BZ)(X - a - BZ)^T]\} \\ &= E[(X - a - BZ)^T(X - a - BZ)] \end{aligned} \quad (1.5)$$

达到极小,则此时得到的 X 的最优估计就称为线性最小方差估计,并记为 $\hat{X}_{LMV}(Z)$ 。

如果将使 $J(\tilde{X})$ 达到极小的 a 和 B 记为 a_L 和 B_L ,则有

$$\hat{X}_{LMV}(Z) = a_L + B_L Z \quad (1.6)$$

因此,只要求得 a_L 和 B_L ,我们就可以由式(1.6)得到 $\hat{X}_{LMV}(Z)$ 。

为了求解 a_L 和 B_L ,我们将 $J(\tilde{X})$ 对于 a_L 和 B_L 求偏导。由于 $J(\tilde{X})$ 是向量 a 和矩阵 B 的标量函数,考虑到微分运算和期望运算是可交换的,可以得到以下结果

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a} E[(X - a - BZ)^T(X - a - BZ)] \\ &= E\left[\frac{\partial}{\partial a} [(X - a - BZ)^T(X - a - BZ)]\right] \\ &= -2E[X - a - BZ] \\ &= 2\{a + BE[Z] - E[X]\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial B} E[(X - a - BZ)^T(X - a - BZ)] \\ &= E\left[\frac{\partial}{\partial B} [(X - a - BZ)^T(X - a - BZ)]\right] \\ &= E\left[\frac{\partial}{\partial B} \{\text{Tr}[(X - a - BZ)(X - a - BZ)^T]\}\right] \\ &= -2E[(X - a - BZ)Z^T] \\ &= 2\{aE[Z^T] + BE[ZZ^T] - E[XZ^T]\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

令上面两式等于零,即可求得 a_L 和 B_L 。令式(1.7)等于零,得

$$a_L = E[X] - B_L E[Z] \quad (1.9)$$

将式(1.9)代入式(1.8),并令式(1.8)等于零,可得

$$B_L \{E[ZZ^T] - E[Z]E[Z^T]\} - \{E[XZ^T] - E[X]E[Z^T]\} = 0$$

即

$$B_L \text{Var}[Z] - \text{Cov}[X, Z] = 0$$

所以

$$B_L = \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1} \quad (1.10)$$

将式(1.10)代入式(1.9),得

$$a_L = E[X] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}E[Z] \quad (1.11)$$

将式(1.10)和式(1.11)代入式(1.6),得

$$\hat{X}_{\text{LMV}}(Z) = E[X] + \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}(Z - E[Z]) \quad (1.12)$$

式(1.12)就是由观测值 Z 求 X 的线性最小方差估计的表达式。

线性最小方差估计 $\hat{X}_{\text{LMV}}(Z)$ 具有如下性质:

(1) 线性最小方差估计 $\hat{X}_{\text{LMV}}(Z)$ 是无偏估计,即

$$E[\hat{X}_{\text{LMV}}(Z)] = E[X] \quad (1.13)$$

(2) 估计误差的方差矩阵为

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{X}_{\text{LMV}}(Z)] &= E[[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)][X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)]^T] \\ &= E[[X - E[X] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}(Z - E[Z]) \\ &\quad \cdot [X - E[X] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}(Z - E[Z])]^T] \\ &= \text{Var}[X] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}\text{Cov}[Z, X] \end{aligned} \quad (1.14)$$

(3) 任何一种线性估计的误差方差矩阵都将大于等于线性最小方差估计的误差方差矩阵。

该性质说明如下:设 X 的任一线性估计可表示为 $X_L = a + BZ$, 则此估计的误差方差矩阵为

$$E[\tilde{X}_L \tilde{X}_L^T] = E[(X - a - BZ)(X - a - BZ)^T]$$

如果令

$$b = a - E[X] + BE[Z]$$

则可得

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_L \tilde{X}_L^T] &= E[[X - E[X] - b - B(Z - E[Z])][X - E[X] - b - B(Z - E[Z])]^T] \\ &= \text{Var}[X] + bb^T + B\text{Var}[Z]B^T - \text{Cov}[X, Z]B^T - BCov[Z, X] \\ &= bb^T + (B - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1})\text{Var}[Z](B - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1})^T \\ &\quad + (\text{Var}[X] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}\text{Cov}[Z, X]) \end{aligned} \quad (1.15)$$

显然,任一线性估计的误差方差矩阵与 a 和 B 的选择有关。由于式(1.15)右边的第一项和第二项都是非负定的,因此

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_L \tilde{X}_L^T] &= E[(X - a - BZ)(X - a - BZ)^T] \\ &\geq \text{Var}[X] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}\text{Cov}[Z, X] \end{aligned} \quad (1.16)$$

上式说明,任何一种线性估计的误差方差矩阵都将大于等于线性最小方差估计的误差方差矩阵。由此可见,线性最小方差估计 $\hat{X}_{\text{LMV}}(Z)$ 具有最小的方差矩阵。

(4) 随机向量 $[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)]$ 与 Z 正交。

由 $E[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)] = 0$ 可得

$$\begin{aligned} &E[[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)]Z^T] \\ &= \text{Cov}[[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)], Z] \\ &= E[[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)][X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)]^T] \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} &= E\{[X - E[X] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}(Z - E[Z])](Z - E[Z])^T\} \\ &= \text{Cov}[X, Z] - \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}\text{Var}[Z] = 0 \end{aligned}$$

由式(1.17)可知,随机向量 $[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)]$ 与 Z 不相关,其几何意义就是随机向量 $[X - \hat{X}_{\text{LMV}}(Z)]$ 与 Z 正交。随机向量 X 本来不与 Z 正交,但是从 X 中减去一个由 Z 的线性函数所构成的随机向量 $\hat{X}_{\text{LMV}}(Z)$ 之后,该向量便与 Z 正交了。也可以说, $\hat{X}_{\text{LMV}}(Z)$ 是 X 在 Z 上的正交投影,记为 $\hat{X}_{\text{LMV}}(Z) = \hat{E}[X/Z]$ 。从几何角度可将线性最小方差估计 $\hat{X}_{\text{LMV}}(Z)$ 看做是被估计向量 X 在观测向量(空间)上的正交投影,后续章节中在讨论 Kalman 滤波基本方程时将利用这一结论。

1.1.3 正交投影定理

定义 1.1(正交投影) 设 X 和 Z 分别为具有二阶矩的 n 维和 m 维随机向量,如果存在一个与 X 同维的随机向量 \hat{X} ,并满足下列三个条件,则称 \hat{X} 是 X 在 Z 上的正交投影,记为 $\hat{X} = \hat{E}[X/Z]$,此处均值 \hat{E} 表示投影:

(1) \hat{X} 可以由 Z 线性表示,即存在非随机的 n 维向量 a 和 $n \times m$ 维矩阵 B ,使得

$$\hat{X} = a + BZ$$

(2) 无偏性,即 $E[\hat{X}] = E[X]$ 。

(3) $X - \hat{X}$ 与 Z 正交,即 $E[(X - \hat{X})Z^T] = 0$ 。

从线性最小方差估计的讨论可知,基于观测量 Z 的 X 的线性最小方差估计 \hat{X}_{L} 恰好是 X 在 Z 上的正交投影。下面给出关于向量正交投影的结论:

结论 1.1 设 X 和 Z 为具有二阶矩的随机向量,则 X 在 Z 上的正交投影 \hat{X} 唯一地等于基于 Z 的线性最小方差估计,即

$$\hat{E}[X/Z] = E[X] + \text{Cov}[X, Z](\text{Var}[Z])^{-1}[Z - E[Z]] \quad (1.18)$$

结论 1.2 设 X 和 Z 为具有二阶矩的随机向量, A 为非随机矩阵,其列数等于 X 的维数,则

$$\hat{E}[AX/Z] = A\hat{E}[X/Z] \quad (1.19)$$

结论 1.3 设 X, Y 和 Z 为具有二阶矩的随机向量, A 和 B 为具有相应维数的非随机矩阵,则有

$$\hat{E}[(AX + BY)/Z] = A\hat{E}[X/Z] + B\hat{E}[Y/Z] \quad (1.20)$$

结论 1.4 设 X, Z_1 和 Z_2 为三个具有二阶矩的随机向量,且 $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$,则有

$$\begin{aligned} \hat{E}[X/Z] &= \hat{E}[X/Z_1] + \hat{E}[\tilde{X}/\tilde{Z}_2] \\ &= \hat{E}[X/Z_1] + E[\tilde{X}\tilde{Z}_2^T][E[\tilde{Z}_2\tilde{Z}_2^T]]^{-1}\tilde{Z}_2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

式中

$$\tilde{X} = X - \hat{E}[X/Z_1]$$

$$\tilde{Z}_2 = Z_2 - \hat{E}[Z_2/Z_1] \quad (1.22)$$

1.1.4 白噪声与有色噪声

若随机过程 $w(t)$ 满足以下公式, 则称 $w(t)$ 为白噪声过程

$$E[w(t)] = 0 \quad (1.23a)$$

$$E[w(t)w^T(\tau)] = q\delta(t - \tau) \quad (1.23b)$$

式中: q 称为 $w(t)$ 的方差强度。

式(1.23b)便为 $w(t)$ 的自相关函数, 即

$$R_w(t - \tau) = q\delta(t - \tau) \quad (1.24)$$

从式(1.24)可以看出, $w(t)$ 的自相关函数与时间间隔 μ ($\mu = t - \tau$) 有关, 而与时间点 t 无关, 所以 $w(t)$ 是平稳过程。无论时间 t 和 τ 靠得多么近, 只要 $t \neq \tau$, 则 $w(t)$ 与 $w(\tau)$ 总不相关, 两者没有任何依赖关系, 这一特性在时间变化过程中的体现是信号做直上直下的跳变。

式(1.24)可进一步写成

$$R_w(\mu) = q\delta(\mu)$$

因此 $w(t)$ 的功率谱为

$$S_w(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q\delta(\mu)e^{-j\omega\mu} d\mu = q \quad (1.25)$$

式(1.25)说明, 白噪声 $w(t)$ 的功率谱在整个频率区间内都为常值 q , 这与白色光的频谱分布在整个频率范围内的现象是类似的, 所以 $w(t)$ 被称为白噪声过程, 且功率谱与方差强度相等。

若随机序列 W_k 满足

$$E[W_k] = 0 \quad (1.26)$$

$$E[W_k W_j^T] = Q_k \delta_{kj}$$

则 W_k 称为白噪声序列。在时间上, 白噪声序列是出现在离散时间点上的杂乱无章的上下跳动。

凡是不满足式(1.23)的噪声过程都称为有色噪声过程。有色噪声的功率谱随频率而改变, 这与有色光的光谱分布在某一频段内的现象是类似的, “有色”一词也因此而得名。

有色噪声可看做是某一线性系统在白噪声驱动下的响应, 对有色噪声建模就是确定出这一线性系统。常用的建模方法一般有相关函数法和时间序列分析法两种。

对随机过程做建模处理时, 一般都假设其满足各态历经性, 即利用在一个样本时间过程中采集到的数据计算相关函数, 再由相关函数求出功率谱, 然后由功率谱求出成型滤波器, 所以这种方法称为相关函数法。

设有一单位白噪声过程 $w(t)$, 输入到传递函数为 $\Phi(s)$ 的线性系统中, 根据线性系统理论, 对应的输出信号 $Y(t)$ 功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 \cdot 1 = \Phi(j\omega)\Phi(-j\omega) \quad (1.27)$$

因此, 如果有色噪声 $Y(t)$ 的功率谱密度可写成 $\Phi(j\omega)\Phi(-j\omega)$ 的形式, 则 $Y(t)$ 可看做是传递函数为 $\Phi(s)$ 的线性系统对单位强度白噪声 $w(t)$ 的响应, 即 $Y(t)$ 可以用 $w(t)$ 来表示,

这就实现了对有色噪声 $Y(t)$ 的白化。 $\Phi(s)$ 是实现白化的关键, 被称为成型滤波器。

时间序列分析法将平稳的有色噪声序列看做是由各时刻相关的序列和各时刻出现的白噪声所组成, 即 k 时刻的有色噪声 Y_k 为

$$Y_k = \varphi_1 Y_{k-1} + \varphi_2 Y_{k-2} + \cdots + \varphi_p Y_{k-p} + W_k - \theta_1 W_{k-1} - \theta_2 W_{k-2} - \cdots - \theta_q W_{k-q} \quad (1.28)$$

式中: $|\varphi_i| < 1 (i=1, 2, \dots, p)$ 为自回归参数; $|\theta_i| < 1 (i=1, 2, \dots, q)$ 为滑动平均参数; W_k 为白噪声序列。上述表示有色噪声的递推方程称为 (p, q) 阶的自回归滑动平均模型 ARMA (p, q) 。针对模型中 $\varphi_i = 0 (i=1, 2, \dots, p)$ 和 $\theta_i = 0 (i=1, 2, \dots, q)$, 模型(1.28)可分别简化为自回归模型 AR (p) 和滑动模型 MA (q) 。

对于有色噪声, 建模的任务是确定模型中的各项参数值 (φ_i, θ_i) 和白噪声序列 W_k 的方差值。建模过程一般分成两步: 首先利用噪声的相关函数和功率谱密度特性确定出模型的形式 (ARMA (p, q) , AR (p) , MA (q)); 然后利用参数估计方法估计出模型中的各参数值。由于实际的有色噪声模型中 p 和 q 的阶数一般都不大于 2, 因此也可以直接从简单的模型开始拟合, 然后根据拟合后残差的大小确定最后的模型。模型确定后, 还需根据滤波的要求, 将模型方程改写成一阶差分方程组或一阶微分方程组。

在掌握白噪声和有色噪声概念的基础上, 我们就可以建立随机线性系统的数学模型。一般先建立随机线性连续系统的数学模型, 再对其进行离散化进而得到随机线性离散系统的数学模型。

1.2 Kalman 滤波理论的发展及其应用

不同的估计准则会导致不同的估计方法; 同样, 利用观测信息的方式不同, 也会导致不同的估计方法。基于这两个方面的原因, 滤波估计经历了最小二乘法、Wiener 滤波和 Kalman 滤波, 并在不断地发展和完善中。

最早的估计方法是高斯 (Gauss) 于 1795 年在他的关于《天体运动理论》一书中提出的最小二乘法。最小二乘法没有考虑被估参数和观测数据的统计特性, 因此不是最优估计方法, 但由于其计算简单, 它已成为一种应用最广泛的估计方法。1912 年, 费舍尔 (Fisher) 提出了极大似然估计方法, 他从概率密度出发来考虑估计问题, 对估计理论的发展做出了重大贡献。

对于随机过程的估计, 20 世纪 30 年代才开展起来。1940 年, 控制论的创始人之一美国学者维纳 (Wiener) 根据火力控制系统的需要提出一种在频域中设计统计最优滤波器的方法, 该方法被称为 Wiener 滤波。同一时期, 苏联学者科尔莫郭洛夫 (Колмогоров) 提出并初次解决了离散平稳随机序列的预测和外推问题。Wiener 滤波和 Колмогоров 滤波方法开创了一个应用统计估计方法研究随机控制问题的新领域。由于 Wiener 滤波采用频域设计法, 运算复杂, 解析求解困难, 整批数据处理要求存储空间大, 因此其适用范围极其有限, 仅适用于一维平稳随机过程信号滤波。

Wiener 滤波存在的缺陷促使人们寻求时域内直接设计最优滤波器的新方法, 其中美国学者 Kalman 的研究最具有代表性。1960 年, Kalman 提出了离散系统 Kalman 滤波;