高等学校教材

数学分析习题课讲义

下册

江兆林　等编

南海出版公司

数学分析习题课讲义

下册

江兆林　等编

南海出版公司

1995・海口

目　录

第十章　数值级数

一、本章重点

1. 级数的收敛性及性质．
2. 正项级数收敛性的判别．
3. 交错级数收敛性的判别．
4. 级数的绝对收敛性及条件收敛性．
5. 一般项级数收敛性的判别．

二、内容提要

1. 收敛与发散的概念

设　$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots,$

是一个无穷数列，对此数列的各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为数值级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 u_n 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和　$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和、简称部分和．

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 对应着一个部分和数列 $\{S_n\}$．

定义 10.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，即：

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，极限值 S 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

若部分和数列 S_n 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ 称为几何级数，当 $|r| < 1$ 时收敛，当 $|r| \geqslant 1$ 时发散.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 p—级数，当 $p > 1$ 时收敛.当 $p \leqslant 1$ 时发散.

2. 收敛级数的性质

定理 10.1 （Cauchy 收敛准则）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N > 0$，当 $m > n > N$ 时，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon.$$

定理 10.1 也可写成下述形式：

定理 10.1′ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N > 0$，当 $n > N$ 时，对一切自然数 p，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

推论（级数收敛的必要条件） 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

定理 10.2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) \text{ 也收敛,且成立}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

定理 10.3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,c 为任一常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也收敛,且成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

定理 10.4 去掉、增加或改变级数的有限项不会改变级数的敛散性.

3. 正项级数收敛性判别法

若数值级数各项的符号都相同,则称它为同号级数. 若级数的每一项都是非负的;则称此级数为正项级数. 对于负项级数,每项乘以 -1 后就可得到一个正项级数.

定理 10.5 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是:它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界. 即存在 $M > 0$,对一切自然数 n,成立

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}u_k \leqslant M.$$

定理 10.6(比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都为正项级数,且存在某个自然数 N,当 $n > N$ 时,

都有 $u_n \leqslant v_n$.

则:(i) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(ii) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l \quad (v_n\neq 0)$$

则：(i) 当 $0<l<+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 具有相同的敛散性．

(ii) 当 $l=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(iii) 当 $l=+\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散．

定理 10.7 〔(d'Alembert) 达朗贝尔判别法或称比式判别法〕 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且存在某个自然数 N_0 及常数 q.

(i) 若对一切 $n>N_0$，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q<1$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(ii) 若对一切 $n>N_0$，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q.$$

则 (i) 当 $q<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(ii) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．

注 当 $q=1$ 时，此判别法失效．

定理 10.8〔(Cauchy)判别法或称根式判别法〕 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，且存在某自然数N_0及常数l：i) 若对一切$n > N_0$成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant l < 1$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

(ii) 若对一切$n > N_0$，成立不等式．

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散．

推论 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

则 (i) 当$l < 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，

(ii) 当$l > 1$或$l = +\infty$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散．

注 当$l = 1$时，此判别法失效．

4. 交错级数收敛性判别法

设$u_n > 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$则级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$称为交错级数．

定理 10.9〔(Leibnitz) 莱布尼兹判别法〕

设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$满足下述两个条件：

(i) 数列$\{u_n\}$单调递减．即：$u_{n+1} \leqslant u_n$，$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛．

5．一般项级数收敛性判别法

定义 10．2 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛．

定理 10．10〔(Abel) 阿贝尔判别法〕 若$\{a_n\}$为单调有界数列，级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛．

定理 10．11〔(Dirichlet) 狄利克雷判别法〕 若数列$\{a_n\}$单调递减且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和数列有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛．

6．绝对收敛级数的性质

定理 10．12 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，且其和为S，则任意重排后所得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也绝对收敛，且有相同的和．

定理 10．13(Cauchy 定理) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都绝对收敛，且其和分别为A与B.

令 $$w_n=\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot v_{n-k+1}=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$也绝对收敛，且其和为AB.

级数$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$称为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的乘积．

三、典型例题分析

例 1 试判断下列命题的正确性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}u_n(k>1)$ 有相同的敛散性；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛；

(4) 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,3,\cdots)$，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛；

(5) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必收敛；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=r<1$；

(7) 若加括号后的级数发散，则原级数必发散.

解 (1) 对，因为去掉级数的有限项不改变级数的敛散性.

(2) 错. 例如 $u_n=\dfrac{1}{n}$. $v_n=-\dfrac{1}{n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛.

正确命题是：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，则有

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

(3) 错，例如 $u_n=\dfrac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件但不是充分条件.

(4) 错，例如：$u_n = -\frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n \leqslant v_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，

正确命题是：设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若 $u_n \leqslant v_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

(5) 错，例如 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$，且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为交错级数.满足莱布尼兹判别法的条件为收敛级数，但 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 却为发散级数.

正确命题为：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必收敛.

(6) 错，例如 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数，

此时 $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{n}{n+1} \right| = 1.$$

其逆命题正确为：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = r < 1$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(7) 对. 事实上,设原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则由级数性质可知,加括号后所成新级数仍收敛,此与命题条件不符. 故知所给命题正确.

例 2 验证下列级数的收敛性并求其和:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

分析 先求出级数的前 n 项部分和 S_n,然后考虑$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

解 (1) $\because \dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{5n-4}-\dfrac{1}{5n+1}\right]$,

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[1-\frac{1}{5n+1}\right].$$

$$\because \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left[1-\frac{1}{5n+1}\right]=\frac{1}{5},$$

$\therefore$ 级数收敛且其和为$\dfrac{1}{5}$.

(2) $\because$
$$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

$$\because \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1-\sqrt{2},$$

$\therefore$ 级数收敛，且其和为 $1-\sqrt{2}$.

例 3 利用 Cauchy 收敛准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{2^n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

解 (1) $u_n=\frac{\sin 3^n}{2^n}$，考虑 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$，其中 p 为任意自然数.

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|=\left|\frac{\sin 3^{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{\sin 3^{n+2}}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin 3^{n+p}}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n},$$

$\therefore \forall\ \varepsilon>0$，要 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，只需 $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}/\lg 2$.

$\therefore$ 由 Cauchy 收敛准则，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}\right]$，当 $n>N$ 时，对一切自然数 p 均成立

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon,$$

$\therefore$ 级数收敛.

(2) $u_n=\frac{1}{n}$，考虑 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$，$p$ 为自然数，特别取 $p=n$，

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

它对任何自然数 n 都成立，由 Cauchy 准则知级数发散．

注　用 Cauchy 收敛准则判别级数发散可叙述为：$\exists\ \varepsilon_0>0$，不论 N 取多大，$\exists$ 自然数 $n_0,m_0>N$，成立：

$$|u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{m_0}|\geqslant\varepsilon_0,$$

则此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．

例 4　判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{4}{n}\right)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)(a>0)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots(2n-1)}{n!}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，　(其中 $a_n\to a,(n\to\infty),a_n,a,b>0$，且 $a\neq b$)．

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

分析：上述级数均为正项级数，用正项级数的判别法．

解　(1) $\because$ 当 $n>9$ 时，$\ln n\geqslant2$，此时 $\frac{1}{(\ln n)^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，由正项级数的比较原则知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ 收敛

(2) $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\dfrac{4}{n}}{\left(\dfrac{4}{n}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$,

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{16}{n^2}$收敛，由比较原则知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{4}{n}\right)$收敛.

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{\dfrac{1}{n^2}} = (\ln a)^2$,

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$收敛，由比较原则知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$收敛.

(4) $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{(n+1)!} \Big/ \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2 > 1.$

由比值判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$发散.

(5) $u_n = \left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n} = \dfrac{b}{a}$，由根式判别法知：当$a<b$时级数发散，当$a>b$时级数收敛，

(6) $\because \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdots\dfrac{2n}{2n+1}$,

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)^2$

$< \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}.$

$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

$\therefore \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}.$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$收敛，由比较判别法知

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$收敛．

例 5 设$a_n>0, a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$是收敛的．

分析：$\because a_n\geq0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$为交错级数，利用莱布尼兹判别法证明．

证 因为

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}}{n(n+1)}$$

$$=\frac{(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+1})+\cdots+(a_n-a_{n+1})}{n(n+1)}>0,$$

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$为单调递减的，又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由第二章的数列极限知识可证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

于是由莱布尼兹判别法可知，此级数收敛．

例 6 (1) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. 能否断定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛？

(2) 对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geq1$，能否断定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$不绝对收敛，但可能条件收敛？