



下册

南海出版公司

# 数学分析习题课讲义

## 下册

江兆林 等编

南海出版公司

1995·海口

## 目 录

(a1)	第一章	函数、极限与连续	章六十一
(a2)	第二章	导数与微分	章六十二
(a3)	第三章	微分中值定理与导数的应用	章六十三
(a4)	第四章	不定积分	章六十四
(a5)	第五章	定积分	章六十五
(a6)	第六章	定积分的应用	章六十六
(a7)	第七章	微分方程	章六十七
(a8)	第八章	无穷级数	章六十八
(a9)	第九章	多元函数微分学	章六十九
(a10)	第十章	多元函数积分学	章七十
(a11)	第十一章	向量代数与空间解析几何	章七十一
(a12)	第十二章	多元函数的极值与最小二乘法	章七十二
(a13)	第十三章	重积分	章七十三
(a14)	第十四章	曲面积分与线积分	章七十四
(a15)	第十五章	偏微分方程	章七十五
(a16)	第十六章	拉普拉斯变换	章七十六
(a17)	第十七章	数学实验	章七十七
(a18)	第十八章	习题参考答案	章七十八
(a19)	第十九章	习题参考答案	章七十九
(a20)	第二十章	习题参考答案	章八十
(a21)	第二十一章	习题参考答案	章八十一
(a22)	第二十二章	习题参考答案	章八十二
(a23)	第二十三章	习题参考答案	章八十三
(a24)	第二十四章	习题参考答案	章八十四
(a25)	第二十五章	习题参考答案	章八十五
(a26)	第二十六章	习题参考答案	章八十六
(a27)	第二十七章	习题参考答案	章八十七
(a28)	第二十八章	习题参考答案	章八十八
(a29)	第二十九章	习题参考答案	章八十九
(a30)	第三十章	习题参考答案	章九十
(a31)	第三十一章	习题参考答案	章九十一
(a32)	第三十二章	习题参考答案	章九十二
(a33)	第三十三章	习题参考答案	章九十三
(a34)	第三十四章	习题参考答案	章九十四
(a35)	第三十五章	习题参考答案	章九十五
(a36)	第三十六章	习题参考答案	章九十六
(a37)	第三十七章	习题参考答案	章九十七
(a38)	第三十八章	习题参考答案	章九十八
(a39)	第三十九章	习题参考答案	章九十九
(a40)	第四十章	习题参考答案	章一百

<b>第十六章 重积分</b>	.....	(146)
一、本章重点	.....	(146)
二、内容提要	.....	(146)
三、典型例题分析	.....	(155)
复习参考题十六	.....	(172)
<b>第十七章 曲线积分与曲面积分、场论</b>	.....	(176)
(I) 一、本章重点	.....	(176)
(I) 二、内容提要	.....	(176)
(I) 三、典型例题分析	.....	(190)
(I) 复习参考题十七	.....	(252)
<b>考试题选之一</b>	.....	(261)
<b>考试题选之二</b>	.....	(267)
<b>考试题选之三</b>	.....	(273)
<b>考试题选之四</b>	.....	(280)
<b>考试题选之五</b>	.....	(287)
<b>考试题选之六</b>	.....	(294)
<b>考试题选之七</b>	.....	(299)
<b>考试题选之八</b>	.....	(301)
<b>复习参考题答案</b>	.....	(303)
(IV)	.....	讲义题解总汇, 三
(S01)	.....	二十题考卷区夏
(S02)	.....	封绘圭其环函数章三十集
(S03)	.....	点重章本, 一
(S04)	.....	要讲容内, 二
(S05)	.....	讲义题解总汇, 三
(S13)	.....	三十题考卷区夏
(T12)	.....	学长题解函数章四十集
(T13)	.....	点重章本, 一
(T14)	.....	要讲容内, 二
(T21)	.....	讲义题解总汇, 三
(T22)	.....	四十题考卷区夏
(T31)	.....	接函解, 章五十集
(T32)	.....	点重章本, 一
(T33)	.....	要讲容内, 二
(T34)	.....	讲义题解总汇, 三
(T35)	.....	正十四题卷区夏

# 第十章 数值级数

## 一、本章重点

1. 级数的收敛性及性质.
2. 正项级数收敛性的判别.
3. 交错级数收敛性的判别.
4. 级数的绝对收敛性及条件收敛性.
5. 一般项级数收敛性的判别.

## 二、内容提要

### 1. 收敛与发散的概念

设  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ,

是一个无穷数列, 对此数列的各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为数值级数, 记为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 其中  $u_n$  称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的通项, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 的前 } n \text{ 项的和 } S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的  $n$  项部分和、简称部分和.

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  对应着一个部分和数列  $\{S_n\}$ .

第六章 级数  
定义 10.1 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和数列  $\{S_n\}$  收敛, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 极限值  $S$  称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的和, 记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

若部分和数列  $S_n$  发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  称为几何级数, 当  $|r| < 1$  时收敛, 当  $|r| \geq 1$  时发散.

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  称为  $p$ -级数, 当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散

## 2. 收敛级数的性质

定理 10.1 (Cauchy 收敛准则) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件是:  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $m > n > N$  时, 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \epsilon.$$

定理 10.1' 也可写成下述形式:

定理 10.1' 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件是:  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 对一切自然数  $p$ , 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon.$$

推论(级数收敛的必要条件) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

定理 10.2 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  也收敛,且成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

**定理 10.3** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $c$  为任一常数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$

也收敛,且成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

**定理 10.4** 去掉、增加或改变级数的有限项不会改变级数的收敛性.

### 3. 正项级数收敛性判别法

若数值级数各项的符号都相同,则称它为同号级数. 若级数的每一项都是非负的,则称此级数为正项级数. 对于负项级数,每项乘以  $-1$  后就可得到一个正项级数.

**定理 10.5** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件是: 它的部分和数列  $\{S_n\}$  有界. 即存在  $M > 0$ , 对一切自然数  $n$ , 成立

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq M.$$

**定理 10.6(比较判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都为正项级数, 且存在某个自然数  $N$ , 当  $n > N$  时,

都有  $u_n \leq v_n$ .

则: (i) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛;

(ii) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散.

**推论** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (v_n \neq 0)$$

则：(i) 当  $0 < l < +\infty$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  具有相同的敛散性

(ii) 当  $l = 0$  时， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛；

(iii) 当  $l = +\infty$  时， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散。

**定理 10.7** [(d'Alembert) 达朗贝尔判别法或称比式判别法] 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数，且存在某个自然数  $N_0$  及常数  $q$ 。

(i) 若对一切  $n > N_0$ ，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛；

(ii) 若对一切  $n > N_0$ ，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散。

**推论** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

则 (i) 当  $q < 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛；

(ii) 当  $q > 1$  或  $q = +\infty$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散。

**注** 当  $q = 1$  时，此判别法失效。

**定理 10.8** [(Cauchy) 判别法或称根式判别法] 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且存在某自然数  $N_0$  及常数  $l$ : (i) 若对一切  $n > N_0$  成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n} \leq l < 1$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,

(ii) 若对一切  $n > N_0$ , 成立不等式.

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,

**推论** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

则 (i) 当  $l < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,

(ii) 当  $l > 1$  或  $l = +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

**注** 当  $l = 1$  时, 此判别法失效.

#### 4. 交错级数收敛性判别法

设  $u_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$  则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$

称为交错级数.

**定理 10.9** [(Leibnitz) 莱布尼兹判别法]

设交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  满足下述两个条件:

(i) 数列  $\{u_n\}$  单调递减. 即:  $u_{n+1} \leq u_n, (n = 1, 2, 3, \dots)$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛.

### 5. 一般项级数收敛性判别法

**定义 10.2** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛.

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛.

**定理 10.10** [(Abel) 阿贝尔判别法] 若  $\{a_n\}$  为单调有界数列, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**定理 10.11** [(Dirichlet) 狄利克雷判别法] 若数列  $\{a_n\}$  单调递减且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和数列有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

### 6. 绝对收敛级数的性质

**定理 10.12** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 且其和为  $S$ , 则任意重排后所得到的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也绝对收敛, 且有相同的和.

**定理 10.13** (Cauchy 定理) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都绝对收敛, 且其和分别为  $A$  与  $B$ .

令  $w_n = \sum_{k=1}^n u_k \cdot v_{n-k+1} = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  也绝对收敛, 且其和为  $AB$ .

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  的乘积.

### 三、典型例题分析

例 1 试判断下列命题的正确性：

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$  ( $k > 1$ ) 有相同的敛散性；

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ；

(3) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必收敛；

(4) 设有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 若  $u_n \leq v_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),

则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必收敛；

(5) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  必收敛；

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = r < 1$ ；

(7) 若加括号后的级数发散, 则原级数必发散.

解 (1) 对, 因为去掉级数的有限项不改变级数的敛散性.

(2) 错. 例如  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v_n = -\frac{1}{n}$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都发散,

而  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  收敛.

正确命题是: 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ 收敛, 且 } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

(3) 错, 例如  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  是

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的必要条件但不是充分条件.

(4) 错, 例如:  $u_n = -\frac{1}{n}$ ,  $v_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $u_n \leq v_n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ )  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,

正确命题是: 设有正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 若  $u_n \leq v_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必收敛.

(5) 错, 例如  $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ , 且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为交错级数, 满足莱布尼兹判别法的条件为收敛级数, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  却为发散级数.

正确命题为: 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  必收敛.

(6) 错, 例如  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为收敛级数,

此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n}{n+1} \right| = 1$ .

其逆命题正确为: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  满足

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = r < 1$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(7) 对. 事实上, 设原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则由级数性质可知, 加括号后所成新级数仍收敛, 此与命题条件不符. 故知所给命题正确.

例 2 验证下列级数的收敛性并求其和:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4) \cdot (5n+1)} + \cdots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

分析 先求出级数的前  $n$  项部分和  $S_n$ , 然后考虑  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) & \because \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right], \\ & \therefore S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(5k-4)(5k+1)} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{5k-4} - \frac{1}{5k+1} \right) \\ & = \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \right] \\ & = \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{1}{5n+1} \right]. \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{1}{5n+1} \right] = \frac{1}{5},$$

$\therefore$  级数收敛且其和为  $\frac{1}{5}$ .

$$\begin{aligned} (2) & \because \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\ & = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ & = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n & = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \\ & = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) \\
&\quad + \cdots + \left( \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 - \sqrt{2},
\end{aligned}$$

∴ 级数收敛,且其和为  $1 - \sqrt{2}$ .

例 3 利用 Cauchy 收敛准则判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

解 (1)  $u_n = \frac{\sin 3^n}{2^n}$ , 考虑  $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}|$ , 其中  $p$  为任意自然数.

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| &= \left| \frac{\sin 3^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{\sin 3^{n+2}}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin 3^{n+p}}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n},
\end{aligned}$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$ , 要  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , 只需  $n > \lg \frac{1}{\varepsilon} / \lg 2$ .

$\therefore$  由 Cauchy 收敛准则,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}]$ , 当  $n > N$  时,

对一切自然数  $p$  均成立

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

∴ 级数收敛.

(2)  $u_n = \frac{1}{n}$ , 考虑  $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}|$ ,  $p$  为自然数, 特别取  $p = n$ ,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| \\ \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

它对任何自然数  $n$  都成立, 由 Cauchy 准则知级数发散.

**注** 用 Cauchy 收敛准则判别级数发散可叙述为:  $\exists \epsilon_0 > 0$ , 不论  $N$  取多大,  $\exists$  自然数  $n_0, m_0 > N$ , 成立:

$$|u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \dots + u_{m_0}| \geq \epsilon_0,$$

则此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

**例 4** 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{4}{n} \right);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2 \right) (a > 0);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{a_n} \right)^n, \quad (\text{其中 } a_n \rightarrow a, (n \rightarrow \infty), a_n, a, b > 0, \text{ 且 } a \neq b).$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

**分析:** 上述级数均为正项级数, 用正项级数的判别法.

**解** (1)  $\because$  当  $n > 9$  时,  $\ln n \geq 2$ , 此时  $\frac{1}{(\ln n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$ , 而级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 由正项级数的比较原则知级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$  收敛

$$(2) \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{4}{n}}{\left(\frac{4}{n}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2}$  收敛, 由比较原则知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{4}{n}\right)$  收敛.

$$(3) \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2}{\frac{1}{n^2}} = (\ln a)^2,$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 由比较原则知  $\sum_{n=1}^{\infty} (a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2)$  收敛.

$$(4) u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{(n+1)!} / \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1.$$

由比值判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}$  发散.

$$(5) u_n = \left(\frac{b}{a_n}\right)^n,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}, \text{ 由根式判别法知: 当 } a < b \text{ 时级数}$$

发散, 当  $a > b$  时级数收敛,

$$(6) \because \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1},$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}\right)^2$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$\therefore \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$  收敛, 由比较判别法知

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$  收敛.

**例 5** 设  $a_n > 0, a_n > a_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$  是收敛的.

**分析:**  $\because a_n > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$  为交错级数, 利用莱布尼兹判别法证明.

证 因为

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n a_{n+1}}{n(n+1)} \\ &= \frac{(a_1 - a_{n+1}) + (a_2 - a_{n+1}) + \cdots + (a_n - a_{n+1})}{n(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

$\therefore$  数列  $\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\}$  为单调递减的, 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 由第二章的数列极限知识可证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

于是由莱布尼兹判别法可知, 此级数收敛.

**例 6** (1) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ , 能否断定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛?

(2) 对于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 有  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1$ , 能否断定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  不绝对收敛, 但可能条件收敛?