

小结论 是数学中的小定理
是快速解题的金钥匙

速解宝典

高中数学经典小结论

主编 李冬胜

必修 3
必修 4
必修 5



山西出版集团 山西人民出版社

编写人员：

李冬胜	张克良	张森茂	慕泽刚
何新军	李生茂	张明同	陈海峰
赵先举	代尔宁	唐艳玲	张泽军

速

+

解

÷

宝

×

典

高中数学经典小结论

主编 李冬胜

必修 3

必修 4

必修 5

山西出版集团 山西人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

速解宝典:高中数学经典小结论/李冬胜主编.—太原:山西人民出版社,2010.7
ISBN 978-7-203-06891-4

I. ①速… II. ①李… III. ①数学课—高中—解题 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 138929 号

速解宝典:高中数学经典小结论

主 编:李冬胜

责任编辑:樊 中

装帧设计:李英伟

出 版 者:山西出版集团·山西人民出版社

地 址:太原市建设南路 21 号

邮 编:030012

电 话:0351-4725195(发行中心)

0351-4922220(综合办)

E-mail: sxskcb@163.com 发行部

sxskcb@126.com 总编室

网 址: www.sxskcb.com

经 销 者:山西出版集团·山西人民出版社

承 印 者:太原泓兴印刷有限公司

开 本:890mm×1240mm 1/32

印 张:10.5

字 数:320 千字

印 数:1-5000 册

版 次:2010 年 7 月第 1 版

印 次:2010 年 7 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-203-06891-4

定 价:26.00 元

如有印装质量问题请与本社联系调换



作者简介



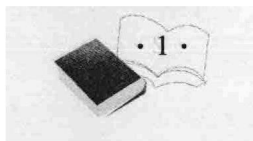
李冬胜 特级教师, 享受国务院政府特殊津贴的专家, 教育部中学教材审定委员会成员, 中国数学会会员, 山西省中学数学教学研究会理事, 全国优秀教师, 山西省劳动模范。

在教育教学实践中, 他不断更新知识, 提升理念, 积极从事教育学科教研活动, 先后承担“思维与数学教学”、“高中数学构造法解题教学研究”等多个课题的研究, 收到了良好的效果。首次提出“数学教育中的模糊思维”(1992年)、“思维素质”(1996年)等理论, 被全国教研杂志引用, 受到专家的好评(以上观点均以论文发表)。1996年获“苏步青数学教育奖”, 2000年、2003年连续评为太原市第一届、第二届优秀专家。获全国、省级学会、研究会二等奖以上优秀论文12篇。2003年12月, 荣获教育科研优秀成果二等奖、三等奖各一项。

出版专著15册, 在《教育理论与实践》、《甘肃教育学院学报》、《数学教育学报》、《数学通讯》、《中学数学杂志》、《学习报》等发表论文200多篇, 共计500多万字。



张克良 中学高级教师, 天津市教育学会中学数学研究会会员, 天津市武清区教育学会中学数学研究会理事。先后在天津市武清区教育局、教研室工作, 1979年到天津市重点中学即天津市武清区杨村一中任教至今。从教30多年, 送过多届高中毕业班, 教学经验十分丰富, 曾参与编写新教材辅导书20多本, 在国内各数学报刊发表各类教研辅导文章6000余篇, 有的在全国初等数学交流会上选读, 也有的被评为天津市教育科研优秀论文。被国内数十家数学报刊聘为特约撰稿人, 且常为一些学校或报社做讲座。





张森茂 特级教师,山西省优秀教师,临汾市高中数学学科带头人。他长期从事高中数学教学工作,在教学管理实践中,形成了自己独特的教学和科研风格,并且积极撰写教育教学论文。在《中学数学》、《中学生学习报》、《素质教育》、《考试报》等报刊发表论文 200 多篇。



慕泽刚 重庆市渝西中学高级教师,重庆市数学学会会员,区级骨干教师、优秀教师。从事高中教学 17 年,先后带完高中毕业班 9 届,高考成绩每届均名列市、区前茅。

他先后在 30 多家国家级和省级报刊上发表文章 2000 多篇,被多家报刊数次评为“优秀作者”,有 20 多篇论文在市、区获奖。现为《学习报》等多家报刊的特约编辑。曾参与多本教辅书籍的编写。



何新军 高中数学高级教师,湖南省中学数学专业委员会会员,永州市数学学会常务理事,现任永州市祁阳县教育局教研室主任和教育学会常务副会长。他在教育教学实践中,不断更新知识,提升理念,积极从事教育学科教研活动,有多篇论文获全国、省级学会、研究会二等以上奖项。《新课程数学教学中的情境创设》获 2008 年永州市第六届自然科学论文奖。他多次被评为优秀教师,2009 年被评为祁阳县“十大杰出青年岗位能手”。



李生茂 中学高级教师。近十年担任高中数学、计算机两科奥赛辅导工作及高三数学教学工作。多次荣获“高中数学竞赛”省优秀辅导奖;2004 年 8 月在“全国计算机编程大赛决赛”中荣获全国第六名;2007 年作品“我和学生在 QQ”在湖南教育征文比赛中荣获一等奖;2001 年作品“高中数学应用在线”在株洲市首届教师网页比赛中荣获一等奖;被株





州市人民政府记“大功”一次。

他先后主编和参与编书 40 多本;在《学习报》等多家报刊发表论文 300 多篇。



张明同 中学高级教师,潍坊市教学能手,寿光市高中数学学科带头人。在一线从事中学数学教育教学工作十多年,现担任山东省寿光市教育科学研究中心(寿光市教学研究室)数学教研员。

他在平时的工作中,十分重视对现代化教育理论的学习,努力掌握现代化教学技术,并积极撰写教育论文,在多家报刊发表教育教学文章 300 多篇。曾多次执教省级公开课,主持的教育实验课题《高中数学后进生转化实验研究》通过中国教育学会教育实验研究会专家鉴定,顺利结题并得到推广。



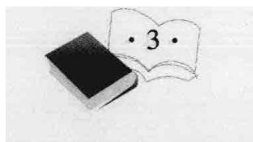
陈海峰 厦门市东山中学高级教师。教学近 20 年,曾参与了《课堂观察诊断》国家级课题研究,还主持与组织国家级课题《新课程与学习方式转变》的研究。曾荣获区十佳教师,区学科带头人。

他在教育教学实践中,认真钻研教材,并将个人体会书写成稿,先后在多家报刊发表数学文章数百篇。还参编了多本教辅书。



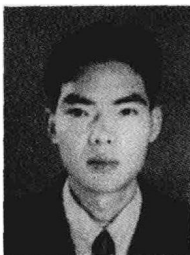
赵先举 河南省临颍县南街村高中数学教师。

他的教学风格是:根据每个学生的不同特点,因材施教,方法灵活,方式多样,多体现与学生的交流与互动,教学成绩显著。曾多次被省市评为奥数优秀辅导教师、优秀教师、科研先进个人、优秀班主任、高考优秀评卷员等,并在优质课大赛中多次获得一等奖。由于所教班级高考成绩优异,多次获得高考成绩突出贡献奖。





他在课余时间,善于钻研新教材,曾担任 60 多本教辅图书的主编;在《学习报》等报刊发表论文 600 多篇。



代尔宁 四川泸州纳溪中学数学教师。先后参与“中学教学常规规范化管理与评估”、“中学学生合作·反思学习模式的培养”等省级课题研究。在教育教学中将赏识教育与目标教学紧密结合,取得了优良效果。2004 年教育论文《数学创新教育及培养》获得四川省泸州市二等奖。

他先后主编或参编 10 多本教辅书籍,在多家报刊发表文章 300 多篇。



唐艳玲 唐山市滦南县胡各庄中学一级教师。

她在教育教学中,不断提高知识业务水平,探索全新教育教学方法,提出的“低起点 小台阶 抓基础 促提高”教学理念,在唐山市高中数学学科教师培训会、高考研讨会上交流并发言,得到同行的一致好评。同时被评为唐山市“百强教师”。多次被评为滦南县先进教学工作者,县级优秀教师,优秀班主任。2007 年度工作成绩显著荣立三等功,多次获得县优质课大赛一、二等奖,2008 年在全县优质示范课讲解中荣获一等奖。先后在多种报刊发表论文、试题研究等 200 多篇。



张泽军 太原市第一外国语学校高级教师,太原市高水平骨干教师,太原市“十佳百优”班主任。2003 年在太原市高中数学竞赛中获优秀辅导教师;荣获第十三届、第十六届、第十七届“希望杯”全国数学邀请赛“数学教育优秀园丁”、“数学竞赛优秀辅导员”。

他在教学实践中,十分重视对现代化教育理论的学习与研究,撰写的《七彩的值域·七彩的思维》被山西省陶行知研究会评为一等优秀论文。先后在《学习报》等多种报纸、期刊发表论文 300 多篇。





前言

当今的考试是在掌握课本中的定义、定理和公式的基础上,可以利用与高中数学知识纵横联系的“派生”出来的小结论,简化并快捷解题。这些小结论源于课本,而又高于课本,掌握了这些知识,对于快速解题,提高对数学知识的理解具有极为重要的作用。

所谓小结论,是指对课本知识的深化、引申及推广的一些数学知识,包括经验公式和规律等。关于小结论,我们需要明确以下三点:

首先,小结论并不小。它如同数学定理、公式一样,是在课本知识的基础上产生的一些具有规律性的课外数学知识。

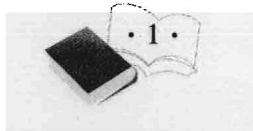
其次,小结论作用大。它是快速解题的强有力的工具,尤其是对选择题、填空题的作用很大。

再次,小结论用途广。它不是简单的、单一的知识,而是一些基础知识的“组合群”,呈递进关系,用途极为广泛。

经过多年的研究,我们发现,小结论有如下作用:

1. 简化数学运算的程序;
2. 简约数学思维的过程;
3. 简捷数学方法的选择。

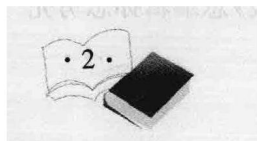
本丛书是针对当前数学教育教学的实际,以及学生学习中存在的广而不深、探索和发现规律困难等问题进行设计的。在策划与成书过程中,得到了山西出版集团报刊中心主任、《学习报》总编辑孙志勇先





生的大力支持和帮助;在作者的选择协调以及具体写作过程中,得到了天津市张克良先生的大力相助、鼓励和支持。由于本丛书的写作难度很大,七位作者付出了比常态情况下数倍的心血,将他们多年研究和发现的数学规律一并奉献给读者,许多结论是首创的,具有较大的应用价值,在此一并表示衷心的感谢。小结论是数学中的小定理,是快速解题的金钥匙。研读这些结论不仅可以帮助我们深刻理解数学知识,而且可运用其快速解题,同时可以引导我们提出问题、发现规律,合理地进行一些数学创造。

由于认识问题的角度、深度不同,不足之处敬请广大读者批评指正。





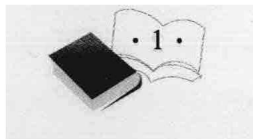
目 录

必修3

第一章 算法初步	1
算法的概念	1
基本算法语句	10
算法案例	19
第二章 统计	26
随机抽样	26
用样本估计总体	33
变量间的相关关系	39
第三章 概率	45
随机事件的概率	45
古典概型	50
几何概型	55

必修4

第一章 三角函数	60
任意角和弧度制	60





任意角的三角函数	65
三角函数的诱导公式	73
三角函数的图象与性质	78
函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与三角函数模型的简单应用 ...	87

第二章 平面向量..... 95

平面向量的背景与基本概念	95
平面向量的线性运算	104
平面向量的基本定理及坐标表示	109
平面向量的数量积	117

第三章 三角恒等变换 127 |

两角和与差的正弦、余弦和正切公式	127
简单的三角恒等变换	139

必修5

第一章 解三角形 147 |

正弦定理和余弦定理	147
解三角形的应用举例	165

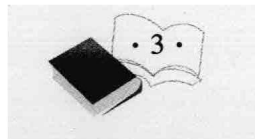
第二章 数列 178 |

数列的概念与简单表示法	178
等差数列	194
等差数列的前 n 项和	210
等比数列	234





等比数列的前 n 项和	262
第三章 不等式	274
不等关系与不等式	274
一元二次不等式及其解法	289
二次不等式(组)与简单的线性规划问题	301
基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$	310





必修3

第一章 算法初步

算法的概念



【结论1】算法有五个特性,分别是有穷性、确定性、有序性、不唯一性、普遍性.

[说明]有穷性指的是一个算法的步骤序列是有限的.它应在有限步骤之后停止,而不能是无限的.

确定性指的是算法中的每一步应该是确定的,并且能有效地执行且得到确定的结果,而不应当是模棱两可.

有序性指的是算法从初始步骤开始,分为若干个明确步骤,每一个步骤只能有一个确定的后继步骤,前一步骤是后一步骤的前提,只有完成前一步才能进行下一步,并且每一步都准确无误,这样才能解决问题.

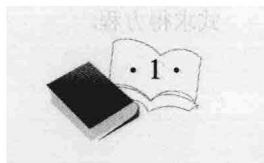
不唯一性指的是求某个问题的解法不是唯一的,对于一个问题可以有不同的算法.

普遍性指的是很多具体问题,都可以设计合理的算法去解决,一个好的算法应能解决一类问题,而不是解决一两个具体问题.

例1 下列关于算法的说法正确的是

()

- A. 一个算法可以解决所有的问题
- B. 算法执行后可以不产生确定的结果
- C. 解决某类问题的算法不是唯一的





D. 算法可以无限地操作下去

解 根据算法的不唯一性,求解某个问题可以有多种算法,故选 C.

提醒 这道题不少同学会选 D. 那就是对算法的特性没有理解,算法中的有穷性是指所有的运算必须在有限的步骤之内完成,不能无休止地执行下去.

例 2 如下式子不能设计算法求解的是 ()

A. $s = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$

B. $s = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$

C. $s = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots$

D. $s = 1 - 2 + 3$

解 根据算法五个特性中的有穷性可得,故选 C.

[作用简评] 利用此结论可快速判断一个序列是不是算法.



【结论 2】设计算法的原则:一般性原则、全面性原则、变量性原则、程序性原则、简练性原则.

[说明] 一般性指的是解决此问题的一般的方法.

全面性指的是要综合考虑此问题可能涉及的各种情况.

变量性指的是可适当借助变量或参数对算法进行描述.

程序性指的是要将问题分为若干个步骤.

简练性指的是语言表达要精练.

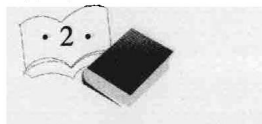
例 3 下列语句表达中是算法的有 ()

①从济南到巴黎,可以先乘火车到北京,再坐飞机抵达;

②利用三角形的面积公式计算底为 1 高为 2 的三角形的面积;

③ $\frac{1}{2}x < 2x - 4$;

④求 $M(1, 2)$ 与 $N(-3, -5)$ 两点连线的方程,可先求 MN 的斜率再利用点斜式求得方程.





- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解 选 C. 其中③的算法不符合一般性原则,因为那不是解决一类问题的办法.

例 4 写出解方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a, b, c \in \mathbb{R}$) 的一个算法.

解 根据上面结论的几个原则,特别是全面性原则,设计算法步骤如下:

第一步,当 $a=0, b=0, c=0$ 时,原方程的解是 $\mathbb{R}$.

第二步,当 $a=0, b=0, c \neq 0$ 时,原方程的解为 $\emptyset$.

第三步,当 $a=0, b \neq 0$, 原方程的解为 $x = -\frac{c}{b}$.

第四步,当 $a \neq 0$, 且 $b^2 - 4ac > 0$ 时,方程有两个不等的实根, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

第五步,当 $a \neq 0$ 且 $b^2 - 4ac = 0$ 时,方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

第六步,当 $a \neq 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ 时,方程没有实数根.

[作用简评] 利用此结论可检验算法的合理性设计.



【结论3】算法的三种逻辑结构是顺序结构、条件结构和循环结构.

[说明] 顺序结构是最简单的算法结构,语句与语句之间,框与框之间是按从上到下的顺序进行的,是任何一个算法都离不开的结构.

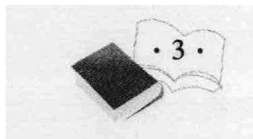
条件结构是先根据条件作出判断,再决定执行哪一种操作的结构,它必含判断框.

循环结构是用来解决在算法中要求重复执行同一操作的结构.

例 5 算法的三种基本结构是

()

- A. 顺序结构、条件结构、循环结构
B. 顺序结构、流程结构、循环结构
C. 顺序结构、分支结构、流程结构
D. 流程结构、循环结构、分支结构





解 根据结论 3, 可知应选 A.

例 6 对于算法的三种逻辑结构, 下列说法正确的是 ()

- A. 一个算法只能含有一种逻辑结构
- B. 一个算法最多可以包含两种逻辑结构
- C. 一个算法必须含有上述三种逻辑结构
- D. 一个算法可以含有上述三种逻辑结构的任意组合

解 根据结论 3, 可知选 D.

[作用简评] 利用此结论可以快速领悟算法的三种逻辑结构的内涵.

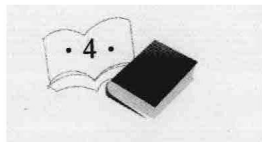
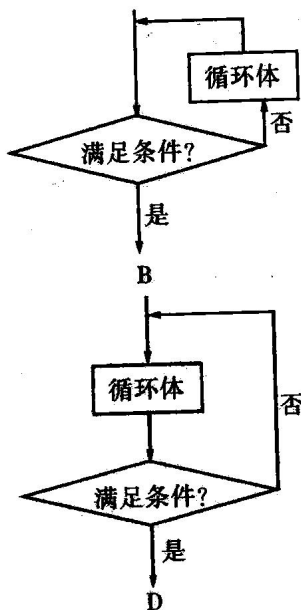
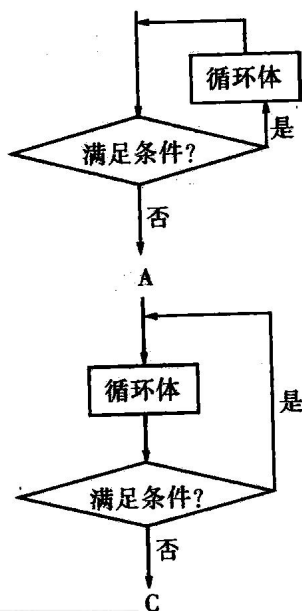


【结论 4】算法中两种循环结构是直到型循环和当型循环.

[说明] 直到型循环是先做再判, 再去循环.

当型循环是先判再做, 再去循环.

例 7 直到型循环结构为 ()

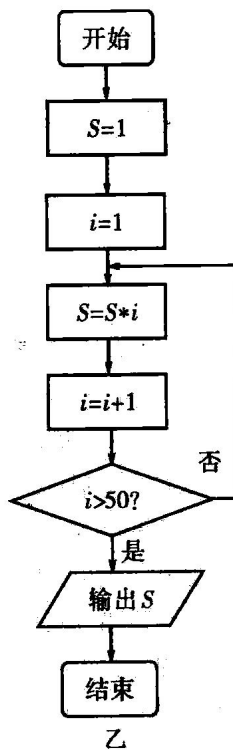
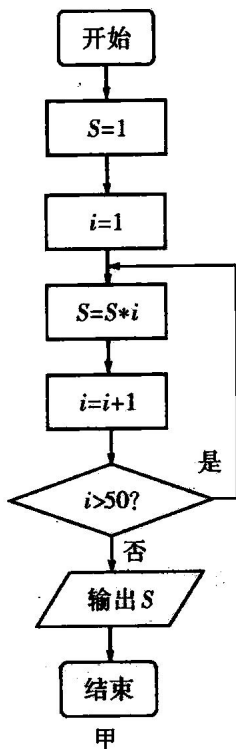




解 根据结论4的口诀,可知应选D.

例8 求 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 50$ 的值,用直到型程序框图描述求值的过程.

解 本题容易错解为甲,根据结论4可以看出先做再判,属于直到型循环结构,故只能先去循环,正确答案应为乙.



[作用简评] 利用此结论可快速求解有关循环结构的问题.