高中数学方法导论

GAO ZHONG
SHU XUE
NG FA DAO LUN

主编审 黄光谷 彭启绵

主编 成尔功 张天雄 陈宽宗

华中师范大学出版社

高中数学方法导论

主编审　　黄光谷　　彭启绵

主　编　成尔功　张天雄　陈宽宗

主　审　李　颖　廖少金　潘良朗

谨以此书献给我们热爱和工作了
30 多年的教育事业

华中师范大学出版社

鄂新登字 11 号

内 容 提 要

本书与中学课本同步，以提炼数学方法为主，对各类题型进行了分析引导与注释说明。各章分为内容提要、答疑辅导、题型归类、习题、自测题五大部分，各篇末有小结和复习题，书末专有一章总复习，并附有习题答案与提示等。可供高中各年级（特别是毕业班）学生及自学者阅读和老师参考。

高中数学方法导论
初中数学方法导论　主编　黄光谷

高中数学方法导论
主编审　黄光谷　彭启绵
主　编　成尔劢　张天雄　陈宽宗
*
华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山）
新华书店湖北发行所经销
武汉测绘科技大学印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张　12.5　字数 330 千字
1993 年 5 月第 1 版　1993 年 5 月第 1 次印刷
ISBN　7-5622-0991-X/G・372
印数　1-20000　　定价：5.20 元

序

我怀着喜悦的心情为黄光谷、彭启绵、徐世佑等同志主编的“高中、初中数学方法导论”两本书作序。这两本书既是姊妹篇，又是《数学方法导论》丛书的中学数学部分。两书从内容到形式都颇有特色，从培养中学生的能力、掌握中学数学方法这一根本点着眼，力求达到事半功倍的效果。两书各篇章结构严谨、系统性强，不超出中学数学教学大纲的要求，依照中学数学课本的顺序，符合中学各年级学生的实际情况和年龄特征，且书写通俗，中学生自学都能看懂。各章五个部分的内容各有侧重，互相配合，突出重点，解决疑难，抓住关键。这两本书是适合各年级中学生及自学者阅读的好书，也是编审者们对中学教育事业的一大贡献。

参加两书编、审工作的主要是我们华中师范大学 1962 年毕业的校友，他(她)们在教学第一线踏实、辛勤地耕耘了 30 多个春秋，现在他们是华中师大一、二附中，湖北省实验中学，武钢三中，汉口铁中，孝感高中，……等重点中学的高级老师，有多人还是特级教师。这两本书是他们用心血和汗水写成的，既是他们 30 多年教学工作中丰富经验的总结，又是他们 30 多人团结协作、集体智慧的结晶。希望他们再接再励，能有更多的新著问世。

陈森林

1993 年 4 月

前　言

不少中学生和自学者视学习数学为畏途，虽日夜苦学，然而事倍功半。究其原因，乃方法不当、不得要领。本书是为了帮助读者解决学习数学的困难而编写的，各章都注意从提炼有关内容的方法入手，充分挖掘中学数学教材内容的规律性，并注意总结和提高，以便培养读者学习数学方法、掌握数学知识的能力，力图达到事半功倍的效果。

本书分为代数一、二，立体几何，平面解析几何四篇共十四章，覆盖了高中数学必修课本的全部内容。各章按五大部分编写，力求做到：内容提要简明扼要，使学生全面、系统地掌握有关基础知识；答疑辅导针对性强、切中要害，可解决读者的疑难问题；题型归类恰当，有分析引导、有说明议论、抓住关键，并通过综合例题，引导读者掌握各种数学方法；精选习题、突出重点，便于读者练习和教师选用；自测题题型多样化，便于检测学习情况和培养读者综合运用所学知识的能力。

编写本书得到华中师范大学汪文汉副校长，数学系陈森林教授，华师一附中李水生校长，孝感高中袁志禄副校长，京山一中李耀庭校长和孝感师专陶志琼副教授、岳新年副教授等人的关心和支持，在此我们对他们表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请读者多提宝贵意见，以便再版时修改。

编　者

1993年4月

目　录

第一篇　代数(一)

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、内容提要

本章内容共有三个部分：集合知识；映射与函数；幂函数、指数函数和对数函数.

1. 集合

1) 集合的基本概念

每一组对象的全体形成一个集合(也简称集)，通常用大写拉丁字母 A、B、C 等表示. 集合里的各个对象叫做这个集合的元素，常用小写字母 a、b、c 等表示. 集合 A 与元素 x 的关系有属于、不属于两种：$x \in A$，$x \notin A$. 集合可分类为有限集与无限集，表示集合的方法常用列举法和描述法. 自然数集记作 N；整数集记作 Z，有理数集记作 Q，实数集记作 R，而 $R^{\pm}$ 分别表示正、负实数集，$Q^{\pm}$，$Z^{\pm}$ 的意义类似.

2) 集合之间的关系

子集 $A \subseteq B$，真子集 $A \subset B$，并集 $A \cup B$，交集 $A \cap B$，补集 $\overline{A}$，空集 $\varnothing$，全集 I，集合相等 $A = B$ 等概念，与 $\subseteq$，$\nsubseteq$，$\supseteq$，$\subset$，$\supset$，$\cap$，$\cup$，$\overline{\overline{A}}$，$=$ 等符号的意义略(详见课本). 显然，

$N \subset Z \subset Q \subset R$；　　$A \subseteq A$；　　$\varnothing \subseteq A$；

$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$；　　$A \subseteq B$，且 $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$；

$A \cap A = A$；　$A \cap \varnothing = \varnothing$；　$A \cap B = B \cap A$；

$A \cup A = A$；　$A \cup \varnothing = A$；　$A \cup B = B \cup A$；　$A \subseteq I$；

$A \cup \overline{A} = I$；　$A \cap \overline{A} = \varnothing$；　$\overline{\overline{A}} = A$.

这些公式的读法与它们所表示的意义留给读者练习.

2. 映射与函数

1）映射

映射 是一种特殊的对应：设 A, B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f: A \to B$. 与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，而 a 叫做 b 的原象. 显见，这些抽象的数学概念可在生活中找到原型. 例如，放映电影 —— 映射；胶片 —— 原象；银幕画面 —— 象.

2）函数

现在我们可以用更高的观点来理解在初中已学的函数概念，它是一种特殊的映射：设 A, B 都是非空的数集，对于自变量 x 在定义域 A 内的任何一个值，在集合 B 中都有唯一的函数值 y 和它对应，则称映射 $f: A \to B$ 是集合 A 到集合 B 的函数，记作 $y = f(x)$. 自变量的值相当于原象，和它对应的函数值相当于象，函数值的集合 C 就是函数的值域，显然 $C \subseteq B$，简言之，函数为数集间的映射.

3）反函数

一般地，式子 $y = f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数，设它的定义域为 A，值域为 C，我们从 $y = f(x)$ 中解出式子 $x = \varphi$

(y)，对于 y 在 C 中的任何一个值，由 $x = \varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应，那么 $x = \varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数，记作 $x = f^{-1}(y)$. 把字母对调以后所得到的函数 $y = f^{-1}(x)$，就是函数 $y = f(x)$ 的反函数. 而 $y = f(x)$ 称作直接函数.

$y = f^{-1}(x)$ 的定义域、值域分别是 $y = f(x)$ 的值域、定义域. 直接函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

4）函数的部分重要性质

（1）单调性：$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(>)}{<} f(x_2)$，$x_1, x_2 \in \mathrm{I}$（区间），称 $f(x)$ 在 I 上是增（减）函数，或说 $f(x)$ 在 I 上具有（严格的）单调性，I 叫做 $f(x)$ 的单调区间.

（2）奇偶性：$f(-x) = \mp f(x)$，$x, -x \in D$（定义域），称 $f(x)$ 为奇（偶）函数，奇函数的图象关于原点中心对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

3. 幂函数、指数函数和对数函数

1）幂函数　$y = x^{a}$　$(a \in Q)$

其定义域 D 视 a 取不同的数值而不同，例如：

当 $a = n \in N$，$y = x^{n}$ 时，$D = R$；

当 $a = -n$，$y = 1/x^{n}$①时，$x \neq 0$，即 $D = R^{-1} \cup R^{+}$；

当 $a = 1/(2n-1)$，$y = \sqrt[2n-1]{x}$ 时，$D = R$；

当 $a = 1/(2n)$，$y = \sqrt[2n]{x}$ 时，$D = [0, +\infty)$；

---

① 注：为了节省版面，降低定价，本书将 $\frac{1}{x^n}$，$\frac{2}{3}\sin x$ 等排版（要占两行）改为 $1/x^n$，$2/3 \cdot \sin x$（仅占一行），请读者习惯和谅解，下同。

当 $a=-1/(2n)$，$y=1/\sqrt[2n]{x}$ 时，$D=R^+=(0,+\infty)$；

幂函数 $y=x^a$ 的图象与性质，可分为 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况讨论（见图 1.1）.

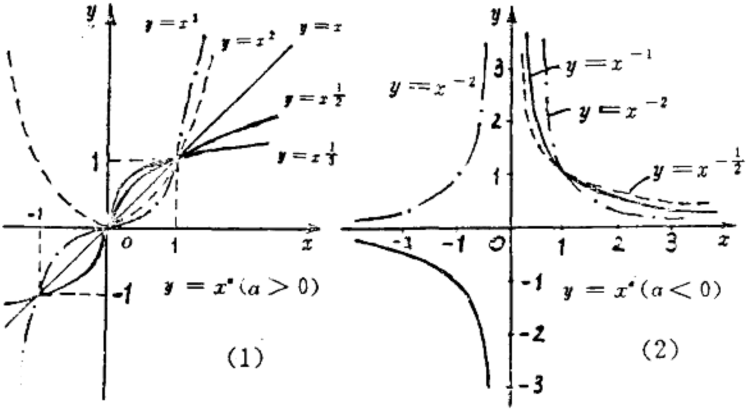

图 1.1

(1) 当 $a>0$ 时，图象都通过点 $(0,0)$，$(1,1)$；在第一象限内，为增函数.

(2) 当 $a<0$ 时，图象都通过点 $(1,1)$；在第一象限内，为减函数，且图象向上与 y 轴无限地接近，向右与 x 轴无限地接近.

2) 对数

(1) 对数的概念：如果 $a^b=N\ (a>0, a\neq 1)$，那么 b 就叫做以 a 为底的 N 的对数，记作 $\log_a N=b$，其中 a 叫做底数（简称底），N 叫做真数，由此易得

$$a^{\log_a N}=N\ (a>0, a\neq 1, N>0),\ \log_a a=1,\ \log_a 1=0.$$

(2) 对数的运算性质：

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N\ ;$$

$$\log_a (M/N)=\log_a M-\log_a N\ ;$$

$$\log_a M^N = N\log_a M (a > 0, a \neq 1, M > 0).$$

(3) 常用对数：以10为底的对数叫做**常用对数**，N 的常用对数可简写成 $\lg N$.

任何 $N > 0$，有 $N = a \times 10^n (1 \leqslant a < 10, n \in Z)$，于是 $\lg N = n + \lg a$，整数 n 叫做 $\lg N$ 的**首数**，正的纯小数(或零) $\lg a$ 叫做 $\lg N$ 的**尾数**. 只有小数点位置不同的数，它们的常用对数的尾数都相同.

知道一个正数，可以由"常用对数表"查出这个数的对数，知道一个数的对数，可以由"反对数表"查出这个数.

(4) 对数的换底公式及其推论：

换底公式：$\log_b N = \log_a N / \log_a b$

推论：$\log_a b = 1/\log_b a$，　$\log_{a^n} b^m = m/n \cdot \log_a b$

$(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ N > 0)$

注：以 e 为底的对数叫做**自然对数**，N 的自然对数简记为 $\ln N$，且 $\ln N = 2.303 \lg N$

3) 指数函数与对数函数.

(1) $y = a^x (a > 0,\ a \neq 1)$

1° 定义域为 R；

2° $y > 0$，即图象在 x 轴上方，且图象都通过点$(0,1)$；

3° 当 $a > 1$ 时是增函数，且 $x > 0$ 时，$y > 1$；当 $x < 0$ 时，$0 < y < 1$；

4° 当 $0 < a < 1$ 时是减函数；当 $x > 0$ 时，$0 < y < 1$；当 $x < 0$ 时，$y > 1$；

(2) $y = \log_a x\ (a > 0,\ a \neq 1)$

1° 它是 $y = a^x$ 的反函数，它们的图象关于直线 $y = x$ 成轴对称(见图 1.2)；

2° 定义域为 R^+，即 $x > 0$，图象在 y 轴右方；且都经过

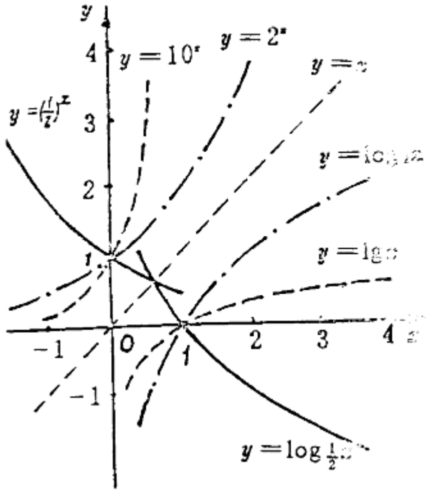

图 1.2

点(1,0)；

3° 当 $a>1$ 时是增函数；且 $x>1$ 时，$y>0$；当 $0<x<1$ 时，$y<0$；

4° 当 $0<a<1$ 时是减函数；当 $x>1$ 时，$y<0$；当 $0<x<1$ 时，$y>0$.

4) 指数方程与对数方程

在指数里含有未知数的方程叫做**指数方程**，在对数符号后面含有未知数的方程叫做**对数方程**.

在指数方程和对数方程中，我们只能解一些比较特殊的方程. 解这些特殊方程一般是根据指数、对数的定义，或采取将方程两边化成同底幂、同底对数，从而得到幂指数相等、真数相等的新方程，或在方程两边同时取对数，从而得到新方程，或利用换元法，从而得到新方程等. 解对数方程时，可能产生增根，因此，验根是解对数方程整个过程中不可缺少的一步.

二、答疑辅导

1. 什么是集合的元素的确定性、互异性和无序性？

答：(1) 所谓集合元素的确定性是的指元素与集合的从

属关系必须明确，即任何一个对象或者是这个给定集合的元素，或者不是它的元素，二者必居其一. 因此，集合中元素的共同属性必须明确，根据这些共同属性必能准确判定元素的从属关系. 例如，"所有的小胖子"，"好看的花裙子"就形成不了集合，因为"小胖子"、"好看"没有一个确切的判定标准. 另外须注意，集合必须是由具有某种共同属性的元素的全体而不是其中部分元素组成. 例如，"几个有理数"不能组成集合，因为它的范围没有界定.

(2) 所谓集合元素的互异性，是指对于一个给定集合，集合中的元素互不相同，即把相同的对象归入同一个集合时，只能算作这个集合的一个元素. 例如，$A = \{x \mid x$ 是 *book* 词中的字母$\}$，将描述法换成列举法，则 $A = \{b, o, k\}$，而不能写成 $A = \{b, o, o, k\}$.

上述的确定性和互异性是集合中元素的两大特征. 集合理论的创始人康托尔(G. Cantor)就称集合为一些确定的、不同的东西的总体，就突出了这两大特征. 康托尔的集合论是现代数学的奠基石，可见其重要性.

(3) 所谓集合元素的无序性，是指用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序，即集合中元素的排列位置与顺序无关，例如，$\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 是同一个集合.

2. 如何理解 $\varnothing$？ 0，$\{0\}$ 与 $\varnothing$ 三者之间有什么区别？$R = \{$全体实数$\}$，$\{\varnothing\}$ 表示空集等为什么是错误的？

答：(1) 空集是不含任何元素的集合. 它的特征是不存在具有某种属性的元素，或者说它的元素的个数为 0. 空集是任何集合 A 的子集(包括它本身)，即 $\varnothing \subseteq A$.

(2) 数 0 表示一个元素，它不是集合. 而$\{0\}$ 是集合，它表示只含一个元素 0 的集合. $\varnothing$ 也是集合，它表示空集，它是任

何一个非空集 B 的真子集：$\varnothing \subset B$. 这三者的关系是：$0 \in \{0\}$，$0 \notin \varnothing$，$\varnothing \subset \{0\}$.

(3) 因为集合符号$\{\cdot\}$已蕴涵着“所有”的意思，只须写为 $R = \{实数\}$ 就可以了. 空集已有规定的符号 $\varnothing$ 表示，而$\{\varnothing\}$不是表示空集，而是表示以空集为元素的集合，它是非空集.

常见的表示法上的错误还有：空集$=\{空集\}$；$R = \{R\}$；把点集$\{(1,2)\} = \{(x,y) \mid x = 1 且 y = 2\}$表示成$(1,2)$，$\{x = 1, y = 2\}$，$\{x \mid x \in (1,2)\}$. 等等，这些都反映了对集合表示法的模糊认识，读者应予以仔细区分.

3. 为什么说映射是特殊的对应？

答：两个集合元素间的对应形式有且仅有四种情况：

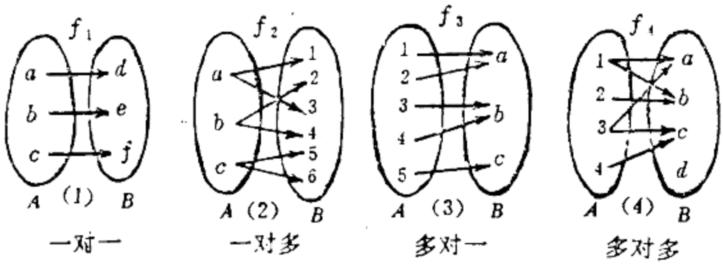

图 1.3

而依照映射的定义，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应才能称之为映射. 即在图 1.3 中的(1)“一对一”与(3)“多对一”是映射，而(2)“一对多”与(4)“多对多”不是映射. 所以说映射是特殊的对应.

还应注意，两个集合之间的映射是有次序的. $f: A \to B$ 与 $f^{-1}: B \to A$ 是截然不同的. 例 如，对于图 1.3 中的(3)，f_3是映射，$f_3^{-1}: B \to A$(“一对多”) 就不是映射. 但对(1)，f_1 与 f_1^{-1} 都是映射，又称为“一一对应”或“一一映射”，有的书又称映射

为“映照”，称 f^{-1} 为逆映射（逆映照）.

4. 为什么说函数是特殊的映射？

答：(1) 函数概念中的集合 A 与 B 只能是非空的数集，即函数研究的是数集与数集之间的对应关系（联系）；而映射概念中的集合 A 与 B 的元素可以是实数，也可以是平面或空间中的点、线、图形、函数或其它，后者的意义广泛一些.

(2) 映射的象集 B 中可以有元素在原象集 A 中无原象；但函数值域 $C \subseteq B$ 中的每一个元素在 A 中都要有原象.

基于以上两点不同，所以说函数是特殊的映射，也就是说，函数是两个数集之间的映射.

5. 函数概念中包含哪些因素？如何理解 $y=f(x)$ 及其中 f 的含义？$f(a)$ 与 $f(x)$ 的涵义是否相同？

答：(1) 包括五个因素：自变量 x，定义域 D，因变量 y，对应法则 f，值域 C；其中有两个要素：定义域 D 与对应法则 f. D 或 f 不同，值域就不同，函数也不同.

(2) $y=f(x)$ 表示因变量 y 是自变量 x 的函数，不能理解为 $y=f\times x$，其中“f”是函数关系中定义域到值域的一种对应法则的表示符号，是构成函数关系的关键所在. 对应法则 f 可用解析式、列表法、图象法等方式表达. 当 f 用解析式表达时，它也可以看成一种运算方法. 例如，$f(x)=2x-1$，“f”表示对 x 乘以 2 后减 1 的运算，那么 $f(\Delta)=2\Delta-1$，$f(x+1)=2(x+1)-1$，$f[f(x)]=2\cdot f(x)-1$，等等.

(3) $f(a)$ 表示 $x=a$ 时所对应的函数值，是一个常量；而 $f(x)$ 表示自变量 x 所对应的函数值，一般情况下是变量，他们的涵义不同，他们的联系可表示为：$f(a)=f(x)|_{x=a}$.

6. 确定函数的定义域有哪些方法？

答：常用如下方法.

(1) 偶次根式的函数，被开方式的值非负；

(2) 分式函数，其分母不为零；

(3) 对数函数，其真数大于零，底数大于零且不等于 1；

(4) 幂的指数是零的函数，其底数不为零；

(5) 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是直接函数 $y=f(x)$ 的值域；

(6) 由四则运算所构成函数的定义域是各成员函数定义域的交集；

(7) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是内函数 $u=\varphi(x)$ 定义域的子集，在此子集上函数 $u=\varphi(x)$ 的函数值，必属于外函数 $y=f(u)$ 的定义域；

(8) 具有实际意义的函数，其定义域是由解析式表示的函数的自然定义域的子集，此子集兼顾问题的实际意义来确定.

7. 是不是任意一个函数 $y=f(x)$ 都有反函数?为什么?怎样理解 $f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 之间的关系?

答：(1) 不是，只有当从定义域到值域的关系是"一一对应"时的函数才有反函数；是"多对一"的函数就没有反函数. 例如，严格的单调函数存在反函数；而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数. 但把定义域分成单调区间(或分成若干个区间，使在每个区间上满足"一对一")，则又有反函数. 如 $y=x^2(x\leqslant 0)$ 的反函数是 $x=-\sqrt{y}$；$y=x^2(x\geqslant 0)$ 的反函数是 $x=\sqrt{y}$.

(2) 从定义域、值域来看，$y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域；$y=f(x)$ 的值域是 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域. 从对应规则来看，f 与 f^{-1} 表示互逆的运算，例如 $y=f(x)=x^3$，则 $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$. 从图象上看，$y=f(x)$ 与