21世纪现代数学指南丛书

微积分原理与严格的理论基础

任德麟 著

ε

δ

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪现代数学指南丛书

微积分原理与严格的理论基础

任德麟 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书由两部分组成，重点讨论两个课题，即微积分的基本原理和微积分的严格的理论基础.

第一部分以函数的非均匀性两种分类为视角，从研究对象、处理问题的方法、运算之间的联系和定义的数学结构等不同侧面，对导数与积分的内涵和二者之间的互逆关系作了全面分析，并由此提炼出微积分的基本原理.

第二部分对微积分的严格的理论基础的三个组成部分（集论、ε-δ 语言和实数理论）作了系统的讨论，对 ε-δ 语言的实质、确定实数系的公理化方法作了深入的评析.

本书可供学习微积分和数学分析课程的学生和授课老师参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分原理与严格的理论基础/任德麟著. —北京：科学出版社，2010.8

（21 世纪现代数学指南丛书）

ISBN 978-7-03-028616-1

Ⅰ.微…　Ⅱ.①任…　Ⅲ.①微积分　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 158584 号

责任编辑：王雨舸　曾　莉/责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2010 年 8 月第一次印刷　印张：8 1/4

印数：1—5 000　字数：151 000

定价：19.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

(一)

大家都知道,微积分是牛顿和莱布尼茨发明的,时间大约在17世纪六七十年代.微积分何时传入中国的呢?这里我们介绍一份可供参考的资料:《商务印书馆算学书目》(光绪三十四年,即1908年).在这份书目中列入了当年出版的数学书44种,其中,算术笔算之部,14种;算术珠算之部,7种;代数之部,9种;几何之部,9种;三角之部及微积,5种.在"三角之部及微积"之中,包括三角教科书4种,以及一本微积分的教科书,书名全称为《最新高等学堂教科书·微积学》,定价一元六角.在这44种图书中,属于小学和中学的数学教材计43种,这表明一百年以前,我国已有相当完备的中小学数学教育.另一方面,"微积学"仅仅一种,且附属于"三角之部",由此可见微积分这门学问这时刚刚被介绍到中国,远未普及.另外,杨振宁先生在一次演讲中提到:"一百年前中国懂微积分的人只有几个,现在学数学的大学生都懂."(2009年4月19日在扬州大学的演讲)杨振宁之父杨武之先生1928年获美国芝加哥大学数学博士学位,同年回国任教于清华大学,对于现代数学引入中国的情况非常熟悉.因此,杨振宁先生的说法是可信的.总之,大约一百余年以前,微积分开始传入中国.

微积分传入中国以后的命运如何呢?20世纪上半叶,中国饱经内忧外患,社会极度不稳定.高等学校数量少、规模小,只有极少数人有机会接受高等教育.当时大学一般采用英美原版微积分教材,本国的教学研究和教材建设还谈不上.抗战胜利后,列入当时"大学丛书"的微积分教材有一两种,但特色不明显,影响不大.1949年新中国成立以后,急需建设人才,高等教育有了很大的发展.在"全面学习苏联"的大背景下,综合大学和师范院校数学系各门课程几乎全部使用前苏联教材.这批前苏联教材,取材丰富,严谨而有深度,也比较注重理论联系实际,对我国数学教育事业的发展有着深远的影响.从50年代后期开始,一些我国学者的自编教材出版了,对教学也起了很好的作用.改革开放后,随着我国教育事业的发展,出版了一批有特色的、优秀的微积分和数学分析的教材,但也有相当一部分属于低水平重复.

以上所述便是一百年来微积分在我国传播的历史和现状.其实,这也是近现代科学技术在中国传播的一个缩影.我国在科学技术方面与先进国家的差距是一份历史遗产,正如叶剑英元帅所言:"追科学,西方世界鞭先着."(忆秦娥·祝科学大会,1978年3月27日)

我们回顾历史是为了更好地面对未来.

建立创新型国家是我国发展战略的核心,培养大量的创新型人才是关键. 大学的基础理论课程在培养学生的基本科学素养和创造性思维方面有着奠基性的作用. 微积分是其中最重要的一门基础课程. 很难想象一个没有读懂微积分的理工科大学生在创新的道路上能走多远. 我们在这里还想特别强调一下,微积分是一门影响面极广的基础课程. 据国家前发展和改革委员会副主任张茅同志报告,2007 年全国高校在校本科生和研究生分别达到 1738.8 万和 110.5 万人. 他们当中至少有百分之八十以上的人已经学过或正在学习微积分,总数当在 1500 万人左右. 这还未计及各类学校的专科生以及也学一点初等微积分的中学生. 面对影响如此广泛的一门课程,在教学内容、教学方法和教材建设方面进行深入的研究是十分必要的.

编写这本书是推动这方面研究的一个尝试.

(二)

全书集中讨论两个课题,即微积分的基本原理和微积分的严格的理论基础.

微积分大体上由微分学和积分学两大部分组成. 微分学最基本的概念是导数,积分学最基本的概念是积分(定积分). 对这两个基本概念的内涵及其相互关系的集中表述就是本书所讲的微积分基本原理.

我们将函数的所谓"非均匀性"划分为两种类型: 非均匀变化函数和非均匀分布函数. 这样的划分非常重要,它是揭示微积分原理的一种全新的视角. 若函数在其定义区间上是线性函数,称它为均匀变化函数,否则称为非均匀变化函数. 若函数在其定义区间上恒等于常数,称为均匀分布函数,否则称为非均匀分布函数.

非均匀变化函数是微分学研究的对象,核心概念是函数在一点的导数,是刻画函数局部特征的一个量. 非均匀分布函数是积分学研究的对象,核心概念是函数在区间上的积分,它反映非均匀分布函数的"累积效应",是一种整体性质的量.

两类非均匀性研究的方法各不相同,对于非均匀变化函数采用局部线性化方法,而对于非均匀分布函数采用局部均匀化方法. 两种处理问题的方法的共同点在于都是深入到局部进行分析,从均匀情形已有知识出发经由极限过程达到对非均匀情形的认知.

微分学和积分学研究的这两类问题,在均匀情形是一种明显的互逆关系. 在非均匀情形,通过研究整体量的局部特性(即研究变上限积分的导数)揭示出二者运算之间的互逆关系,从而沟通了微分学与积分学. 另外,我们还从导数和积分定义的数学构造的对比中分析了它们互逆性质的渊源.

关于导数与积分的联系,一般仅仅注意到它们运算之间的互逆关系. 我们以函数非均匀性的两种分类作为切入点,从研究对象、处理问题的方法、运算间的联

系以及定义的数学构造等诸方面，对导数与积分的内涵以及二者之间的互逆关系作了全面的分析，并由此提炼出微积分的基本原理. 在现已出版的国内外著作中，尚未见到过关于微积分基本原理的比较完整的表述.

虽然第一部分总的主题是讨论微积分的基本原理，但我们对于某些被忽视或被误解的问题也给予足够的关注. 例如，关于定积分定义的表述，征引了几种影响较大的教材所给出的定积分定义，逐一点评，务求澄清一些模糊观念. 这个问题，不仅在学生中而且在相当一部分教师中都是认识上的一个误区.

本书的第二部分系统论述微积分严格的理论基础. 一百年之前基本完成的建立微积分严格的理论基础的工作，在数学发展史上是一座丰碑，它直接推动着整个20世纪数学的发展，影响极其深远.

微积分的严格的理论基础包括三个组成部分：集论、邻域对应思想(ε-δ 语言)和实数理论.

集论在构建数学的逻辑基础方面居于重要地位. 首先，现代数学研究的对象是各种抽象的数学系统，它们的最原始的基本框架都是由某些元素组成的一个集，在此集上可以赋予各种数学结构，从而形成各种不同的数学研究对象. 例如，群、环、域、线性空间、拓扑空间、概率空间、李群等，无一例外地都是以集作为最原始的框架. 其次，用集论的语言可以精确地刻画数学概念. 例如，以集论语言表达的函数定义是：函数是满足下列条件的序偶的集，即此集之中没有两个序偶具有相同的第一元素. 这个定义避免了“按一定法则”之类可能引起歧义的提法，是一个完全合格的定义. 最后，集论中的基础性研究与分析中许多深入的内容有着内在的联系. 例如，选择公理以及与选择公理等价的佐恩引理在许多重要定理的证明中起关键作用.

作为以极限概念为基础的微积分，给极限概念以清晰的定义具有基础性意义. 柯西于19世纪20年代在分析中引入“ε-δ 语言”，从此极限、连续、收敛、导数和积分都有了精确的定义，相关的定理也都逐一获得符合演绎推理规范的证明. ε-δ 语言用两个相互关联的不等式刻画极限，在形式上是静态的或者说是寓动于静的(动的因素隐含于 ε 的任意性之中)，恰恰是这种静态的形式契合于演绎推理的内在要求，这就是 ε-δ 语言的实质所在. 此外，由 ε-δ 语言引伸出来的邻域对应思想在现代数学的发展中具有重要的地位.

柯西首创的 ε-δ 语言为微积分提供了方法论的基础，而实数理论的创立则为微积分奠定了牢固的逻辑基础.

书中共介绍了三种建立实数系的方案. 其中前两种，即康托尔基本序列法和戴德金分割法，是以有理数系为出发点将数系扩张为实数系. 第三种方案，也是本书重点推荐的一种方案，直接用一组公理界定实数系. 这一方案有明显的优点. 其一，它使实数系与有理数系的实质差异更明朗：实数系除了满足有理数系所满足的

公理外，还满足上确界公理. 其二，便于人们从总体上把握实数系，即实数系是一个兼有代数结构、序结构和连续性结构的数学系统.

为了阐明实数理论是微积分的逻辑基础，书中比较详细地讨论了有代表性的几个问题，包括正实数的正平方根的存在性、闭区间上连续函数性质、实数系的完备性以及关于紧性的重要定理. 通过这些问题的讨论，可以清楚地看到微积分中各种具体的函数的定义和所有重要定理的证明，最后都还原为实数系的性质，也就是说，实数理论的确立实现了分析的基础算术化，将分析的基础建立于非直观的数系之上.

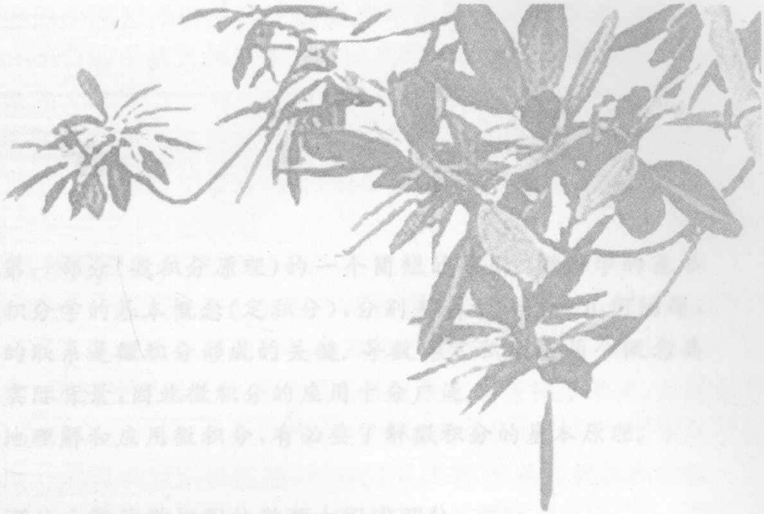
（三）

据笔者学习数学和从事数学教学的体会，要真正理解数学中一些基本概念的内涵和一些重要命题的实质绝非易事. 从这个意义上讲，学过微积分甚至从事微积分教学多年的人未见得真正懂得微积分. 许多高校毕业生走上工作岗位后，常常说在学校学的数学用不上. 当然，有些工作确实不需要太多的数学. 但更普遍的情形恐怕是不会用，而不会用的根源是没有真正学懂.

微积分作为数学史上乃至人类文明史上的一项伟大创造，内涵丰富，蕴含着极其深刻的思想，可以对它进行多侧面、多层次的解读. 本书是在基本不脱离现行教学体系的前提下对该学科所作的一些思考. 这是一个长期求索的过程. 对一些问题的认识起初是朦胧的，经反复思考变得逐渐清晰起来，形成较为系统的见解.

书中所陈述的一些观点，以及对一个学科的原理和基础进行剖析的方法，对于学习数学的学生和数学教师会有一些启发和帮助. 作者学识水平有限，书中错误或不当之处在所难免，诚恳地希望读者批评指正.

目　录



第一部分 微积分原理

1 引 言

这是本书第一部分(微积分原理)的一个简短的导引. 微分学的基本概念(导数)和积分学的基本概念(定积分),分别来源于不同的几何问题,揭示二者之间的联系是微积分形成的关键. 导数和定积分这两个概念具有非常丰富的实际背景,因此微积分的应用十分广泛.

为了更好地理解和应用微积分,有必要了解微积分的基本原理.

微积分大体上可分为微分学与积分学两大组成部分.

积分学的萌芽可以追溯到两千年以前古希腊人用穷竭法(the method of exhaustion)求面积的方法. 该方法的要点是:设有一欲确定其面积之区域,以一内接多边形近似之,而此多边形面积为易求者,然后,再取另一个边数更多的多边形区域给出更好的近似,如此继续做下去,谋求耗尽(to exhaust)给定区域. 阿基米德(Archimedes,前 287—前 212)曾经用这个方法成功地计算出圆及少数其他特殊图形的面积. 此后很长一个时期这方面的研究没有什么进展. 差不多在一千八百多年以后,当代数的方法和记号已经成为数学的一个标准的部分时,这个方法才得以进一步发展. 现今为中学生所熟知的初等代数,在阿基米德的时代则完全属于未知领域,因此那时人们无法用紧凑简约的形式表达冗长的计算,所以不可能将穷竭法应用到更一般的区域上. 从 16 世纪起,数学上的记号以及记数法发生了缓慢而革命性的变化,繁难不便的罗马记数法逐渐被印度-阿拉伯数码所取代,引进了记号"+"和"-"以及小数记法等. 同一时期,意大利数学家 Tartaglia,Cardano 和 Ferrari 在三次和四次方程求解问题上取得了辉煌的成就,给数学研究增添了活力,促使人们接受新的优越的代数语言. 随着代数记号和方法的普及,重新唤起了人们对古老的穷竭法的兴趣,Cavalieri, Toricelli, Roberval,Fermat,Pascal 和 Wallis 等一批先驱者作出了大批成果. 从阿基米德时代以来的这些成就,在概念和素材上为积分学的形成作了准备.

微分学的中心概念是导数,和积分学一样,导数概念也源于几何问题——求曲线在任意一点的切线. 与积分不同的是,从数学史的角度看,导数概念出现得很晚,直到 17 世纪初费马(Fermat,1601—1665)企图确定某些函数的极大值或极小值时才催生出导数概念. 费马求极值的问题,多数情况下等同于求水平切线,这样就引导出一个一般性的问题——求曲线在任意一点处的切线.

乍看起来,求区域面积与求曲线在一点的切线这两个问题毫不相干. 第一个洞悉到这两个看似遥远的问题终归相互关联的人是牛顿(Newton,1643—1727)的老师伊萨克·巴罗(Issac Barrow,1630—1677). 然而,正是牛顿和莱布尼茨(Leibiniz,1646—1716)首先理解这种关联的深刻内涵和非同寻常的重要性,并给予系统而充分的揭示,从而创建了微积分,在数学发展史上开创了一个空前伟大的时代.

许多不同类型的问题可用微积分的方法处理:火箭应当具备怎样的初速向上发射才能永不返回地球? 能覆盖所有周长为 L 的等腰三角形的最小圆盘的半径等于多少? 若某种细菌繁殖的速率正比于细菌现存数量,并且已知每隔一小时其数量翻倍,问两小时末细菌数量是多少? 若 10 N(牛顿)的力可使弹簧伸长 1 cm,问使弹簧伸长 5 cm 所做之功是多少?

这些问题类型各异,来自不同领域,但值得注意的是:

第一,它们可以归结为两种类型,各以一个几何问题为代表.

第二,从这两类问题可以分别抽象出重要的数学概念,并由此对问题可作统一的处理.

第三,由这两类问题抽象出的数学概念之间存在着深刻的联系,一种巧妙的互逆关系.

微积分中所研究的这两类问题,是客观世界中两类最基本、最常见的问题,因此微积分能够广泛应用于多个科学技术领域. 近代力学的形成与发展是微积分应用的最初的成功范例. 微积分及其自然的延伸——微分方程所提供的不仅仅是计算工具,更重要的是它使人们对许多重要概念进行动力学思考成为可能. 微积分问世以来,随着它的概念和方法向不同门类的众多学科移植渗透,使这些学科实现了向现代化学科的转变.

微积分的出现已有三百余年,但至今仍然保持着旺盛的生命力. 一方面,在解决科学技术中各种问题时,微积分始终是最基本、最常用的数学工具. 攻克尖端的技术难题不一定总是运用“尖端的数学”. 微积分好比战争中的常规武器,是不可替代的. 另一方面,现代数学中有很大一部分,仔细分析起来都可以视为微积分的深化、延伸和进一步发展. 因此,无论是为了更纯熟地运用微积分还是为了更深入地学习数学,都有必要真正弄懂弄通微积分的基本原理.

所谓微积分基本原理,是指关于微积分的最基本的概念的内涵以及这些概念之间的内在联系的一种集中表述.

2 函数、极限和连续性

本节对函数、极限和连续性的一些基本概念作了简要的介绍. 特别值得注意的是本书中我们将函数的所谓"非均匀性"区分为两类,即非均匀变化函数与非均匀分布函数. 若函数在其定义区间上是线性函数,称为均匀变化函数,否则称为非均匀变化函数. 若函数在其定义区间上恒等于常数,称为均匀分布函数,否则称为非均匀分布函数. 在后续的讨论中我们将看到对函数的这两种分类方法有助于认识微积分两个最基本的概念(导数和定积分)的本质.

2.1 函　数

函数是数学中最重要的概念之一,也是微积分的主要研究对象. 函数是表达一个量对另一个量相依关系的概念. 例如,已知正方形的边长,则该正方形的面积随之而定. 又如,已知圆的周长,则可求出它的半径等.

定义2.1.1 设 D 为一个数集. 若对于每个属于 D 的数 x,按一定的规则有一个数 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$. x 和 y 皆称为变量. 通常将 x 称为自变量或独立变量,y 称为因变量或函数. 自变量的取值范围(数集 D)称为函数的定义域,数集

$$\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为此函数的值域.

从上述定义可以看出,函数概念包含两个要件:其一为确定两个变量之间对应关系的那个"规则";其二为自变量的取值范围,即定义域. 函数是一个外延很宽的概念,只要具备这两个要件就是一个函数.

函数的表示法通常有下列几种:

(1) **列表法**　例如,火车价目表(站名用数字编号).

(2) **图示法**　例如,一天之中气温的自动记录.

(3) **公式法**　由自变量经一系列指定运算求得函数值.

(4) **语言描述**　有些函数无法用上列三种方式表示,如"不超过数 x 的素数个

数 p”. 显然 p 是 x 的函数,引号中的短语本身就是这个函数的表述方法.

函数概念二要件缺一不可. 对应规则虽然相同而定义域不同,则视为不同的函数. 同学们都做过这样的练习题,即“求某函数的定义域”,这是一个约定俗成的说法,意即求出一切使该对应规则有意义的那些自变量的取值范围.

常用的函数有幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等几类,以及由这些函数经四则运算和复合步骤而形成的函数. 在微积分出现之前人们已经熟知这些函数. 微积分方法的引入,使人们对这些函数的研究和认识提高到一个崭新的层次.

函数可以按照某种特定的标准进行分类. 例如,函数可分为周期函数与非周期函数,有界函数与无界函数等. 对于我们理解微积分原理特别有帮助的是以下两种分类:

定义 2.1.2 (均匀变化函数与非均匀变化函数)若函数在其定义域上是线性函数,则称为**均匀变化函数**,否则称为**非均匀变化函数**.

定义 2.1.3 (均匀分布函数与非均匀分布函数)若函数在其定义域上是恒等于常数的函数,则称为**均匀分布函数**,否则称为**非均匀分布函数**.

非均匀变化函数是微分学研究的对象. 非均匀分布函数是积分学研究的对象.

2.2 极　限

微积分中的基本概念都是借助于极限概念来定义的. 给出一个明晰的极限定义是最基础的工作.

极限是刻画函数在一点近旁某种性态的一个概念. 这里所谓“近旁”是指点 x_0 的一个“去心邻域”,即从 x_0 的邻域中剔除 x_0 后所剩余的部分.

所谓“当 x 趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的极限为 A”是指:不管我们希望 $f(x)$ 与 A 靠近到什么程度总能做得到,只要 x 与 x_0 足够靠近即可. 借助所谓“ε-δ 语言”,极限定义可正式表述如下:

定义 2.2.1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域有定义. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得当

$$0<|x-x_0|<\delta \tag{2.2.1}$$

时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \tag{2.2.2}$$

其中 A 为某常数,则称当 x 趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限等于 A,或 $f(x)$ 在点 x_0 处极限为 A,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

这个定义的要点在于用两个相互关联的不等式来刻画极限. 不等式(2.2.2)反映 $f(x)$ 与 A 靠近的程度. 不等式(2.2.1)实际包含两个不等式，其中 $|x-x_0|<\delta$ 反映 x 与 x_0 靠近的程度，而 $0<|x-x_0|$ 则表明 $x\neq x_0$. 每给定一个正数 ε，相当于对 $f(x)$ 与 A 的靠近程度提出要求(即不等式(2.2.2))，存在正数 δ 相当于这个要求能被满足(只要 x 满足不等式(2.2.1)就有不等式(2.2.2)). 由于正数 ε 可任意给定，包括 ε 是任何的小正数，这表明希望 $f(x)$ 与 A 靠近到什么程度都能做得到. ε 可任意小这层意思已经隐含于 ε 的任意性之中，在正式的定义表述中可不必言明.

定义 2.2.2 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数 N 时有定义. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 M，使得当

$$|x|>M$$

时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

其中 A 为常数，则称当 $x\to\infty$ 时函数的极限为 A.

定义 2.2.2 的基本精神与定义 2.2.1 是一致的. 所谓"$|x|$ 大于某一正数 N"，即 $(-\infty,-N)\cup(N,+\infty)$，可视为"理想元素"$\infty$ 的去心邻域.

本着同样的精神，可以给出当自变量变化趋势为"$x\to+\infty$"或"$x\to-\infty$"时的函数极限定义. 特别是当 x 取正整数趋向无穷则为整标函数极限，亦即数列极限.

极限为零的变量称为无穷小.

定义 2.2.3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个去心邻域有定义. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当

$$0<|x-x_0|<\delta$$

时有

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 是**无穷小**.

按此定义可以看出，当 $x\to x_0$ 时 $(x-x_0)$ 是无穷小(考察函数 $f(x)=x-x_0$).

对于其他的自变量变化趋势亦可类似地给出无穷小定义.

无穷小是函数极限的特殊情形，它的重要性表现在下述结论之中：

定理 2.2.1 (无穷小与函数极限的关系)当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限为 A 的充要条件是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)-A$ 为无穷小.

利用这个结论我们可以由无穷小的性质推导出一般极限的性质.

假定已知 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

(i) $\lim[c_1 f(x)+c_2 g(x)]=c_1 A+c_2 B$，其中 c_1,c_2 为常数；