十一·五
"十一五"高职高专公共基础课规划教材

高等数学

（机械类）

■ 高崚嶒 王薇 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十一五"高职高专公共基础课规划教材

高等数学（机械类）

主编　高崚嶒　王　薇
参编　郁凯荣
主审　涂荣豹

机械工业出版社

本书依据以培养学生职业能力为主线，力求贯彻“以应用为目的，以必须、够用为度和少而精”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重培养学生基本运算能力、分析问题和解决问题的能力。

本书共6章，主要内容有函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，一元函数积分学，积分的应用，数学实验（MATLAB的应用）等。

本书的教学时数为60学时左右，既可作为高职高专机械类专业的公共基础课教材，也可作为其他类学校、其他专业的参考教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：机械类/高崚嶒，王薇主编．—北京：机械工业出版社，2005.8

“十一五”高职高专公共基础课规划教材

ISBN 7-111-17088-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①高…②王…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第087840号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：宋学敏　版式设计：霍永明　责任校对：陈延翔
封面设计：王伟光　责任印制：石　冉
北京中兴印刷有限公司印刷
2005年9月第1版第1次印刷
1000mm×1400mm B5・4.625印张・179千字
定价：14.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294

前　　言

高职高专院校是为生产、管理、服务一线培养应用型、实用型人才的高等学校。在人才培养的课程体系中，高职高专院校的培养目标和要求决定了高等数学这门课的性质，这是一门十分重要的文化基础课、基本素质课和工具课。这门课的任务是：让学生学习和掌握高等数学的一些基本知识、基本理论，掌握一些基本思维方式；为学生学习专业基础课、专业课提供必需的数学知识与数学方法；还为部分同学的后续学习和进一步深造奠定必要的数学基础。

高职高专教育在蓬勃发展的同时，也在不断进行一些新的改革与尝试。目前部分高职高专专业学制由三年改为两年，学生在学校学习的总学时缩短，每门课程的学时都不同程度地受到了影响。然而这些学生的高等数学课仍在使用原来三年制的教材，这显然不利于人才的培养。为了填补这一市场空白，更好地为两年制的高职高专专业培养人才服务，我们特组织人员编写了此教材。我们以高职高专院校的培养目标为依据，以“必须、够用”为度，在学时缩短的情况下，既要保证学生学到高等数学的最基本的知识与理论，又要保证学生具有一定的数学修养，会用高等数学解决一些实际应用问题。因此我们适当降低了本书的理论难度，力求做到深入浅出、浅显易懂。本书内容的选取也与专业基础课、专业课的需求紧密联系。为了让学生学会用教学软件解决高等数学问题，从而将数学问题与现代的科学计算工具完美结合，我们还特意编写了数学实验，介绍了 MATLAB 的一些应用，如求极限、导数、积分、极值，以及解微分方程和作图等。全书共分6章，主要内容为：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，一元函数积分学，积分的应用，数学实验（MATLAB 的应用）。每章

都配有习题与复习题，便于学生巩固所学知识。

本书由高崚嶒、王薇任主编，参加编写的还有郁凯荣。其中第1～第3章由高崚嶒编写，第4、5章由王薇编写，第6章由郁凯荣编写。高崚嶒负责全书的统稿工作。

本书由南京师范大学涂荣豹教授审阅，涂教授提出了很多宝贵意见和建议，付出了诸多心血，在此深表谢意！

由于编者学术水平与经验有限，同时时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大师生和读者批评指正。

编　　者

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

高等数学以函数为主要研究对象，函数是一条主线，贯穿了整个高等数学．极限是初等数学与高等数学的分水岭，是高等数学中重要的推导工具，是研究变量的一种基本方法．连续是函数的重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识，为后面的学习奠定必要的基础．

本章基本要求：

(1) 理解函数概念．

(2) 理解极限概念．

(3) 熟练掌握极限的四则运算法则．

(4) 熟练掌握两个重要极限．

(5) 理解无穷大、无穷小的概念．

(6) 掌握无穷小的性质及比较．

(7) 理解无穷小与无穷大的性质．

(8) 理解函数的连续性的概念．

(9) 熟练掌握函数的间断点及其类型．

(10) 熟练掌握闭区间上连续函数的性质．

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

定义　设有两个变量 x、y 及非空数集 D，如果对于 D 中任意一个数 x，按照某一个确定的法则 f，变量 y 总有惟一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$．

D 为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0，因变量 y 能够得到一个确定的值，那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，其因变量的对应函数值记为 $y_0 = f(x_0)$ 或 $f(x)\big|_{x=x_0}$ 或 $y\big|_{x=x_0}$，全体函数值的集合称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 M．

必须注意，定义域和对应法则是确定函数的两大要素，当且仅当两个函数的定义域和对应法则都相同时，才能说这两个函数是相同的，而与自变量和应变量用什么字母表示无关．例如函数 $y = f(x)$ 也可以用 $y = f(t)$ 表示．

如果对于数集 D 中的某些或全部 x 值，有多个确定的 y 值与之对应，则称 y 是 x 的多值函数．相应地，将变量 x 对应一个确定的 y 值的情形，称为单值函数．本书中，若无特别说明，所谈到的函数都是指单值函数．

例 1-1 求函数 $f(x)=\arccos\dfrac{x^2+1}{5}$ 的定义域．

解 显然其定义域为满足不等式 $\left|\dfrac{x^2+1}{5}\right|\leqslant 1$ 的解集，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$，故所求定义域为闭区间 $[-2,2]$．

例 1-2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ 的定义域．

解 其定义域为满足不等式 $x^2+2x-3>0$ 的解，解得 $x>1$ 或 $x<-3$，则其定义域为 $x>1$ 或 $x<-3$，即 $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$．

1.1.2 函数的四种基本性态

1．奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果有 $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．既不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数．

不难验证 $y=x^2$，$y=x^2\cos x$ 等在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数，而 $y=x^3$，$y=x\sin^2 x$ 等在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数．偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

例 1-3 证明函数 $y=f(x)=a^x+a^{-x}\ (a>0)$ 为偶函数．

证明 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$，故 $f(x)=a^x+a^{-x}\ (a>0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数．

例 1-4 证明函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数．

证明 因为 $x+\sqrt{x^2+1}>x+|x|\geqslant 0$，函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ $=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数．

2．单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）则称 $f(x)$ 在区间上是单调增加的（或单调减少的）．称区间 I 为函数 $y=f(x)$ 的单

调区间．单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数．

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间（$-\infty$，0）内单调减少，而在区间（0，$+\infty$）上单调增加．函数 $g(x)=x^3$ 在整个定义区间（$-\infty$，$+\infty$）内是单调增加的．

从几何直观来看，递增，就是当 x 自左向右变化时，函数的图形呈上升趋势变化；递减，就是当 x 自左向右变化时，函数的图形呈下降趋势变化（见图 1-1）．

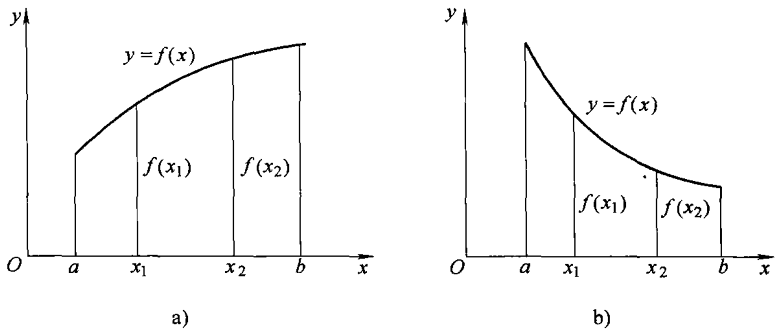

图 1-1

3．周期性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在常数 T（$T\neq 0$），使得对于任意 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，并且等式 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $y=f(x)$ 的周期．

对于每个周期函数来说，定义中的 T 有无穷多个．T 是周期，则 kT（$k=\pm1$，±2，±3，$\cdots$）也是 $f(x)$ 的周期．人们规定：若其中存在一个最小正数 a，则规定 a 为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期．

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期是 2π；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期是 π．

4．有界性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数，否则，称 $f(x)$ 在 D 上无界．

例如，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内是有界函数，而 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数．

有的函数可能在定义域的某一部分有界，而在另一部分无界．例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在（1，2）内有界，而在（0，1）内无界．因此，对于有界函数或者无界

函数而言，应指出其自变量的相应范围.

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

以下六类函数称为基本初等函数：

(1) 常数函数 $y = C, x \in (-\infty, +\infty)$(其中 C 为已知常数)；

(2) 幂函数 $y = x^a (a \in \mathbf{R}$，且 $a \neq 0)$；

(3) 指数函数 $y = a^x (a > 0$，且 $a \neq 1)$；

(4) 对数函数 $y = \log_a x (a > 0$，且 $a \neq 1)$；

(5) 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$；

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \mathrm{arccot}\, x$.

2. 复合函数

若函数 $y = f(u)$，定义域为 U_1，函数 $u = \Phi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y = f(x)$ 和函数 $u = \Phi(x)$ 构成的复合函数，记为 $y = f[\Phi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

例 1-5 试求函数 $y = \ln u$ 与 $u = x^2 - 1$ 构成的复合函数.

解 将 $u = x^2 - 1$ 代入 $y = \ln u$，易得到复合函数 $y = \ln(x^2 - 1)$，其定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

例 1-6 指出下列函数的复合过程.

(1) $y = \sin^2 \sqrt{x+1}$　　　　(2) $y = \mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$

解 (1) 由 $y = u^2$，$u = \sin v$，$v = \sqrt{w}$，$w = x + 1$ 复合而成.

(2) 由 $y = \mathrm{e}^u, u = \tan v, v = \dfrac{1}{x}$ 复合而成.

例 1-7 设 $f(x) = 2^x$，$\Phi(x) = \sqrt{x-1}$，求 $f[\Phi(x)]$ 及 $\Phi[f(x)]$.

解 $f[\Phi(x)] = f[\sqrt{x-1}] = 2^{\sqrt{x-1}}$

$\Phi[f(x)] = \Phi[2^x] = \sqrt{2^x - 1}$

例 1-8 设 $f(x-1) = x^2 - 3x + 4$，求 $f(x+1)$.

解 方法一：令 $x - 1 = t$，$x = 1 + t$ 代入原式，

可得
$$\begin{aligned} f(t) &= (1+t)^2 - 3(1+t) + 4 \\ &= 1 + t^2 + 2t - 3 - 3t + 4 \\ &= t^2 - t + 2 \end{aligned}$$

即 $f(x) = x^2 - x + 2$

$f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + 2$

$$= x^2 + x + 2$$

方法二：$f(x-1) = [(x-1)+1]^2 - 3[(x-1)+1] + 4$

$$f(x) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 4$$

$$f(x+1) = (x+2)^2 - 3(x+2) + 4$$

$$= x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 + 4$$

$$= x^2 + x + 2$$

注意：不是任意两个函数都可以构成一个复合函数，例如 $y = \arccos u, u = 1 + 2^x$ 就不能构成一个复合函数．有时一个复合函数可能有三个或更多的函数构成．比如 $y = \arctan u, u = \ln v, v = x^2 - 1$ 可以构成复合函数 $y = \arctan[\ln(x^2 - 1)]$，其中 u 和 v 都是中间变量．

同时，应熟练掌握复合函数的复合过程，即“分解”复合函数，这对于后面的学习很有帮助．

例 1-9 指出下列函数是由哪些函数复合而成．

(1) $y = (2x+1)^5$　　　　(2) $y = 2^{(\sin x)^2}$

解 (1) 由 $y = u^5, u = 2x + 5$ 复合而成．

(2) 由 $y = 2^u, u = v^2, v = \sin x$ 复合而成．

3. 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合构成，并且可以用一个数学式子表示的函数，称为初等函数．例如，$y = |x|, y = \sqrt{2^x - \sin x + \ln x}, y = \dfrac{\tan x + \sqrt[3]{x}}{1 - 2^x}$ 等都是初等函数．不能用一个式子表示或不能用有限个式子表示的函数都不是初等函数．

习 题 1-1

1. 下列各题中两个函数是否相同？为什么？

(1) $y = \dfrac{x}{x}$ 与 $y = 1$；　　　　(2) $y = \lg x^3$ 与 $y = 3\lg x$；

(3) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$；　　　　(4) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ 与 $y = x + 3$.

2. 求下列函数的定义域．

(1) $y = \ln(1 - x) + \sqrt{x + 2}$；　　　　(2) $y = e^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y = \ln\arcsin x$；　　　　(4) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为区间 $(0, 1)$，求函数 $f(\ln x)$ 的定义域．

4. 指出下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y = \sin x + \cos x$；　　　　(2) $y = a^x - a^{-x}(a > 0$，且 $a \neq 1)$；

(3) $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$；(4) $y = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

5. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right),\varphi(-3)$.

6. 设 $f\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x}{2x-1}$，求 $f(x)$.

7. 下列哪些函数是周期函数？对于周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin(x-2)$ ；　　(2) $y=\cos 4x$ ；

(3) $y=x\cos x$ ；　　(4) $y=\cos^2 x$.

8. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=(1+3x)^{100}$ ；　　(2) $y=\sin^5 x$ ；

(3) $y=2^{\sin^2 x}$ ；　　(4) $y=\arctan\sqrt{x-1}$ ；

(5) $y=\lg(\arctan\sqrt{1-x^2})$ ；　　(6) $y=\sqrt[3]{1-2\cos x}$.

9. 有一个窗框，上部是半径为 x 的半圆，下部是长方形. 若此窗框围成的面积为常数 a，窗框的周长为 s，求 s 与 x 的函数关系 $s=f(x)$ 及其定义域.

10. 某运输公司收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从南京到某地每 1kg 收 0.15 元；当超过 50kg 时，超重部分按每 1kg 0.25 元收费，试求运费 y（单位：元）与质量 x（单位：kg）之间的函数关系式，并画出这函数的图形.

1.2　函数的极限

1.2.1　数列的极限

定义 1　函数 $u_n=f(n)$，其中 n 为正整数，那么按自变量 n 增大的顺序排列的一串数 $f(1)$，$f(2)$，…，$f(n)$，称为数列. 记作 $\{u_n\}$ 或数列 u_n. 数列的单调性和有界性，与函数的相应定义基本一致. 若存在一个常数 $M>0$，使得 $|u_n|\leqslant M$（$n=1, 2, \cdots$）恒成立，则称 u_n 为有界数列；若数列 u_n 满足 $u_n<u_{n+1}$ 恒成立或 $u_n>u_{n+1}$（$n=1, 2, \cdots$）恒成立，则分别称 $\{u_n\}$ 为单调递增数列或单调递减数列，这两种数列统称为单调数列.

定义 2　当 $n\to\infty$ 时，数列 u_n 无限接近一个确定的常数 A，则称 A 为数列 u_n 的极限. 记作：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或者 $u_n\to A$（$n\to\infty$）.

例 1-10　观察下列数列的变化趋势，试确定它们有无极限，有极限的求出极限.

(1) $u_n=\frac{1}{n}$　　(2) $u_n=\frac{n+2}{n+1}$

(3) $u_n=n^2$　　(4) $u_n=\sin\frac{n\pi}{2}$

解　由题意可得表 1-1.

表 1-1

数　列	1	2	3	4	5	…	极限
$U_n=\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	…	$\to 0$
$U_n=\frac{n+2}{n+1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	…	$\to 1$
$U_n=n^2$	1	4	9	16	25	…	$\to\infty$
$U_n=\sin\frac{n\pi}{2}$	1	0	−1	0	1	…	不存在

由表 1-1 可得出以下结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 不存在；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ 不存在 .

1.2.2 函数的极限

1. $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

从函数 $f(x)=x^2$ 的图形可以看出，当自变量 x 任意无限接近于 1 时，(以 $x\to 1$ 来表示)，函数 $y=f(x)=x^2$ 无限接近于常数 1，称常量 1 为函数 $f(x)=x^2$ 当 $x\to 1$ 时的极限.

对于符号函数 $y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，当 x 从左边无限接近于 0 时，函数无限接近于 −1；而当 x 从右边无限接近于 0 时，函数无限接近于 1. 这种情况下，称 $x\to 0$ 时函数无极限.

定义 3 (1) 当 x 小于 x_0 而趋向于 x_0（记为 $x\to {x_0}^-$）时，$f(x)$ 趋向于常数 A. 则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限，或简称 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限为 A，记作：$\lim\limits_{x\to {x_0}^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A(x\to {x_0}^-$ 时).

(2) 当 x 大于 x_0 而趋向于 x_0（记为 $x\to {x_0}^+$）时，$f(x)$ 趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限，或简称 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限为 A，记作：$\lim\limits_{x\to {x_0}^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A(x\to {x_0}^+$ 时).

左极限和右极限统称为单侧极限.

定义 4 当 x 趋向于 x_0 时，$f(x)$ 趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时的 $f(x)$ 的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0$ 时).

显然，当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是：$f(x)$ 当 $x\to x_0$

时的左、右极限都存在而且相等，即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 时，这个值就是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 由此可见，符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在 $x\to 0$ 时的极限不存在.

例 1-11 试求函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leqslant 0 \\ e^x & x>0 \end{cases}$，当 $x\to 0$ 时的极限.

解 $x=0$ 是函数的分段点.

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,\ f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}e^x=1$$

故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

例 1-12 设 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leqslant 0 \\ a & x>0 \end{cases}$，问 a 为何值时，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

解 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的分段点.

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,\ f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}a=a$$

若要极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，必须 $f(0-0)=f(0+0)$，即当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

2. $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 5 当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限. 记作：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty$ 时).

这时，根据 x 的正负性，当 $|x|$ 无限增大时，可分为两种情况：

(1) $x>0$ 且 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，此时极限可记作：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(2) $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，此时极限可记作：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

由此可见，$x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限存在的充要条件是：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，即此时有极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 成立.

例 1-13 求当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

例 1-14 考察下列函数的极限.

(1) $x\to+\infty$ 时，函数 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的变化趋势.

(2) $x\to\infty$ 时，函数 2^x 的变化趋势.

解 (1) 由图 1-2，可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$；

(2) 由图 1-2，可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$，故$\lim\limits_{x\to\infty} 2^x$不存在.

例 1-15 考察当 $x\to\infty$时，函数 $y=\arctan x$ 的极限.

解 由图 1-3 可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x \neq \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以函数 $y=\arctan x$ 当$x\to\infty$时，极限不存在.

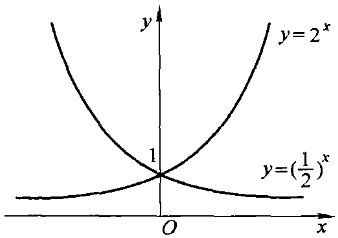

图 1-2

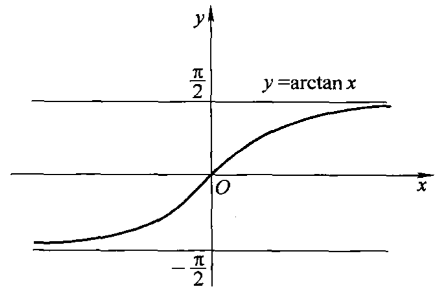

图 1-3

习 题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　(2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$；

(3) $x_n=\frac{n+1}{n-1}$；　(4) $x_n=\frac{2^n-1}{2^n}$.

2. 证明函数 $f(x) = \frac{x}{|x|}$，当 $x\to0$ 时极限不存在.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x\geqslant2 \\ 4-x & x<2 \end{cases}$，求函数 $f(x)$ 当 $x\to2$ 时的左、右极限，并确定当 $x\to2$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

1.3 极限的四则运算

定理 设函数 $y = f(x)$，$z = g(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时都存在极限，且 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则它们的和、差、积、商（分母的极限不为零时）在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时也存在极限，且有如下结论：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x)\pm\lim g(x) = A\pm B$；

(2) $\lim f(x)g(x) = \lim f(x)\lim g(x) = AB$；

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}\quad(B\neq0)$.

推论 1 常数可以提到极限号前，即

$$\lim Cf(x) = C\lim f(x)$$

推论 2 若 $\lim f(x) = A$，且 m 为自然数，则

$$\lim[f(x)]^m = [\lim f(x)]^m = A^m$$

下面举几个用极限的四则运算法则求函数极限的例子.

例 1-16 求 $\lim\limits_{x\to1}(x^3-2x^2+2x-1)$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to1}(x^3-2x^2+2x-1) = \lim\limits_{x\to1}x^3 - 2\lim\limits_{x\to1}x^2 + 2\lim\limits_{x\to1}x - 1$

$$= 1-2+2-1 = 0$$

例 1-17 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+x-1}$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+x-1) = 5 \neq 0$

故
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+4}{x^2+x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2-2x+4)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2+x-1)} = \frac{4}{5}$$

例 1-18 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}(x^3-1)=0$，因此此题不能直接用运算法则，一般称这一极限为“$\dfrac{0}{0}$”型的未定型.

注意到 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ 分子与分母都有趋向于 0 的公因子 $(x-1)$，故分子、分母可以消去公因子.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to1}(x^2+x+1) = 3$$

例 1-19 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+2x+3}$ 的值.

解 当 $x\to\infty$时，分子、分母的极限皆为无穷大，一般称这一极限为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定型. 可以用 x^2 去除以分子、分母.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-1}{x^2+2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = 3$$

例 1-20 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{4x^3+x-1}$ 的值.

解 这是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，用 x^3 去除分子、分母得