从高考到联赛一试专题讲座丛书

平面区域与线性规划

◎ 李世杰 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

从高考到联赛一试专题讲座丛书

平面区域与线性规划

李世杰　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面区域与线性规划/李世杰著. —杭州：浙江大学出版社,2010.7(2010.8 重印)

ISBN 978-7-308-07753-8

Ⅰ.①平… Ⅱ.①李… Ⅲ.①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 123447 号

平面区域与线性规划

李世杰 著

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 11.25
字　　数 274 千
版 印 次 2010 年 7 月第 1 版 2010 年 8 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-07753-8
定　　价 20.00 元

编 写 说 明

平面区域是一个重要的数学概念，也是解决许多数学问题的基础，比如线性规划问题都是在特定的平面区域进行处理的. 而线性规划问题不仅在现代生产生活中有着广泛的应用，而且在数学领域里也潜藏着深厚的文化底蕴，题型千变万化，从而成为高考命题的重点和热点. 线性规划最常见的问题有：二元一次不等式(组)所表示的平面区域；简单的线性规划问题；运用线性规划问题解决生产生活中的一些实际问题，特别是实际生活中涉及的整数解问题，等等.

本书从七个方面全面剖析了平面区域与线性规划问题，力求把问题讲透，把隐含的数学背景和数学思想呈现给读者，让读者感受、体验线性规划问题的本质，从而达到熟练掌握其思想方法，並能充分应用线性规划的思想分析问题和解决问题.

鉴于作者水平有限，书中难免有疏漏之处，请读者批评指正.

目　录

CONTENTS

第一章　直线划分平面问题

知识扫描

1. 二元一次不等式表示平面区域

设(x_0,y_0)是直线$Ax+By+C=0$上的任意一点，则$Ax_0+By_0+C=0$，过(x_0,y_0)作平行于x轴的直线，则对于(x_0,y_0)右侧的点(x,y)，$x>x_0$，$y=y_0$，有

$$Ax+By+C=Ax+By+C-(Ax_0+By_0+C)=A(x-x_0).$$

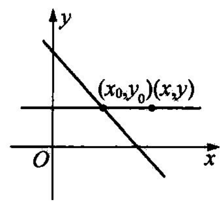

图 1－1

因为$x-x_0>0$，故$Ax+By+C$的值的符号与A同号，于是对直线$Ax+By+C=0$左侧的点(x,y)，$Ax+By+C$的值的符号与A异号.

可见二元一次不等式$Ax+By+C>0$，在平面直角坐标系中表示直线$Ax+By+C=0$某一侧的点组成的平面区域，即$\{(x,y)\mid Ax+By+C>0\}$图形不包括边界，画图时边界画虚线；$\{(x,y)\mid Ax+By+C\geqslant 0\}$图形包括边界，画图时边界画实线.

如：画出不等式组$\begin{cases}x+y-6\geqslant 0,\\ x-y\geqslant 0,\\ y\leqslant 3,\\ x<5\end{cases}$表示的平面区域.

不等式$x+y-6\geqslant 0$表示在直线$x+y-6=0$上及右上方的点的集合，$x-y\geqslant 0$表示在直线$x-y=0$上及右下方的点的集合，$y\leqslant 3$表示在直线$y=3$上及其下方的点的集合，$x<5$表示直线$x=5$左方的点的集合（不含边界），所以不等式组$\begin{cases}x+y-6\geqslant 0,\\ x-y\geqslant 0,\\ y\leqslant 3,\\ x<5\end{cases}$表示的平面区域如 1－2 图所示.

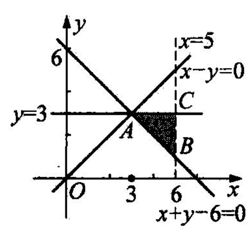

图 1－2

不等式组表示的区域应特别注意其边界线的虚实.

2. 可行域

以x轴为横轴，y轴为纵轴建立直角坐标系，方程$Ax+By+C=0$在平面直角坐标系中表示一条直线，那么满足线性约束条件$Ax+By+C\geqslant 0$或$Ax+By+C\leqslant 0$的解(x,y)叫做

可行解，由所有可行解组成的集合叫做可行域. 可行域在平面直角坐标系中表示了一个平面区域.

判定可行域有如下方法：

(1) 直接判定法

对于 $Ax+By+C\geqslant 0$ 或 $Ax+By+C\leqslant 0$ 所表示的区域的情况有如下结论：

表 1　$Ax+By+C\geqslant 0$ 或 $Ax+By+C\leqslant 0(B\neq 0)$ 所表示的区域情况

不等式($B\neq 0$)	$B>0$	$B<0$
$Ax+By+C\geqslant 0$	表示直线 $Ax+By+C=0$ 的上方区域	表示直线 $Ax+By+C=0$ 的下方区域
$Ax+By+C\leqslant 0$	表示直线 $Ax+By+C=0$ 的下方区域	表示直线 $Ax+By+C=0$ 的上方区域

表 2　$Ax+By+C\geqslant 0$ 或 $Ax+By+C\leqslant 0(B=0)$ 所表示的区域情况

不等式($B=0$)	$A>0$	$A<0$
$Ax+C\geqslant 0$	表示直线 $Ax+C=0$ 的右侧区域	表示直线 $Ax+C=0$ 的左侧区域
$Ax+C\leqslant 0$	表示直线 $Ax+C=0$ 的左侧区域	表示直线 $Ax+C=0$ 的右侧区域

必须注意不等式中的符号"$\leqslant$"、"$\geqslant$"或"$<$"、"$>$"，它们的唯一区别就是前者表示的区域包括边界，后者表示的区域不包括边界.

(2) 点判定法

二元一次不等式 $Ax+By+C>0$(或 <0)在平面直角坐标系中表示直线 $Ax+By+C=0$ 在某一侧面所有点组成的平面区域.

方法：由于在直线 $Ax+By+C=0$ 同一侧的所有点 (x,y)，把它的坐标 (x,y) 代入 $Ax+By+C$ 所得实数的符号都相同，所以只需在此直线的某一侧取某一个特殊点 (x_0,y_0)，从 Ax_0+By_0+C 的正负即可判断 $Ax+By+C>0$(或 <0)表示直线哪一侧的平面区域.

为了方便，一般来说都是取原点来判定 $Ax+By+C\geqslant 0$ 或 $Ax+By+C\leqslant 0$ 所表示在直线 $Ax+By+C=0$ 某一侧的平面区域的. 当 $C=0$ 时，因原点已在直线 $Ax+By+C=0$ 上，故不能通过原点来判定.

如：判定不等式 $2x+y-6<0$ 表示的平面区域.

我们先画直线 $2x+y-6=0$(画成虚线)

取原点 $(0,0)$，代入 $2x+y-6$ 中，由于 $2x+y-6=-6<0$，

所以原点在不等式 $2x+y-6<0$ 表示的平面区域内，所以不等式 $2x+y-6<0$ 表示的平面区域为图 1-3 阴影部分.

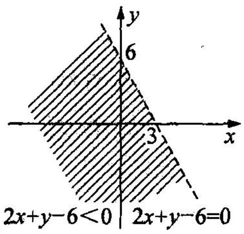

图 1-3

在判断不等式 $Ax+By+C>0$(或 <0)表示的平面区域时，除了选点，用点的坐标代入式子 $Ax+By+C$，由式子 $Ax+By+C$ 的值的符号来确定不等式 $Ax+By+C>0$(或 <0)所表示的平面区域外，还可以直接由不等式中 y 的系数的符号来确定不等式所表示的平面区域.

(3)(简洁有效的)符号判断法则 1

① 平面内任意一点 (x,y) 在直线 $Ax+By+C=0$ 的右侧 $\Leftrightarrow A(Ax+By+C)>0$；

② 平面内任意一点 (x,y) 在直线 $Ax+By+C=0$ 的左侧 $\Leftrightarrow A(Ax+By+C)<0$；

③ 平面内任意一点(x,y)在直线$Ax+By+C=0$的上方$\Leftrightarrow B(Ax+By+C)>0$；

④ 平面内任意一点(x,y)在直线$Ax+By+C=0$的下方$\Leftrightarrow B(Ax+By+C)<0$.

上述法则可简记为："同号右侧，异号左侧"，"同号上方，异号下方".

证明　如图1-4，设$P(x,y)$是直线$Ax+By+C=0$外任意一点，过P作平行于x轴的直线交直线$Ax+By+C=0$于点$P_0(x_0,y)$，则$Ax_0+By+C=0$，

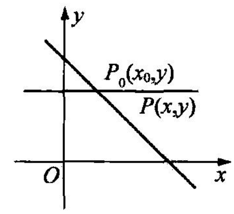

图1-4

所以$A(Ax+By+C)=A[(Ax+By+C)-(Ax_0+By+C)]=A^2(x-x_0)$.

若点$P(x,y)$在$Ax+By+C=0$的右侧，则$x>x_0$，

所以$A^2(x-x_0)>0$，即$A(Ax+By+C)>0$.

若点$P(x,y)$在$Ax+By+C=0$的左侧，则$x<x_0$，

所以$A^2(x-x_0)<0$，即$A(Ax+By+C)<0$.

反之亦成立．故结论①得证.

②，③，④中结论类似可证，略.

(4) 符号判断法则2

① 如果$B>0$，那么不等式$Ax+By+C>0$（或<0）所表示的平面区域是在直线$Ax+By+C=0$上方（或下方）的平面区域.

② 如果$B<0$，那么不等式$Ax+By+C>0$（或<0）所表示的平面区域是直线$Ax+By+C=0$下方（或上方）的平面区域.

③ 如果$B=0$，当$A>0$时，不等式$Ax+By+C>0$（或<0）所表示的平面区域是直线$x=-\frac{C}{A}$右半平面（或左半平面）区域.

④ 如果$B=0$，当$A<0$时，不等式$Ax+By+C>0$（或<0）所表示的平面区域是直线$x=-\frac{C}{A}$左半平面（或右半平面）区域.

证明　如果$B>0$，在直线$Ax+By+C=0$上任取一点$P_1(x_0,y_0)$，则$y_0=-\frac{A}{B}x_0-\frac{C}{B}$，过点$P_1$作平行于$y$轴的直线$x=x_0$，在此直线上任取不同于点$P_1$的点$P(x,y)$.

若点P在点P_1的上方时，有$y>y_0$，从而得到$y>-\frac{A}{B}x_0-\frac{C}{B}$，由$B>0$，整理可得$Ax_0+By+C>0$，又$x=x_0$，所以$Ax+By+C>0$.

若点P在点P_1的下方时，有$y<y_0$，即$y<-\frac{A}{B}x_0-\frac{C}{B}$，从而可得$Ax+By+C<0$.

结论①成立.

类似可证②，③，④的结论成立.

(5) 符号与轴混合判断法

对于任何一个不等式我们总可以化为$Ax+By+C\geqslant 0$（或>0）或$Ax+By+C\leqslant 0$（或<0）的形式，其中$A\geqslant 0$．由于有无等号主要是步骤①画直线边界时为实线还是虚线，对定区域无影响，所以下面我们就以取到等号为例说明如何定区域.

当$A=0$时，不等式总可化为$y\geqslant m$或$y\leqslant m$的形式，此时$y=m$表示一条平行于x轴或

与 x 轴重合的直线,所以 $y \geqslant m$ 表示 $y=m$ 上方的区域,$y \leqslant m$ 表示 $y=m$ 下方的区域.

当 $A>0$ 时,可以证明:(1)包含 x 轴正方向的区域(即直线的右上方或右方或右下方)为$Ax+By+C \geqslant 0$ 表示的区域;(2)包含 x 轴负方向的区域(即直线的左上方或左方或左下方)为 $Ax+By+C \leqslant 0$ 表示的区域.

证明 在包含 x 轴正方向的区域内任取一点 $M(x_0, y_0)$,过 M 作 x 轴的平行线交直线 $Ax+By+C=0$ 于 N,则 $N(x_1, y_0)$,且 $x_0>x_1$,

因为 N 在直线上,所以 $Ax_1+By_0+C=0$.

又因 $x_0>x_1$,$A>0$,故 $Ax_0+By_0+C>Ax_1+By_0+C$,

即 $Ax_0+By_0+C>0$.

当 M 点在直线上时,有 $Ax_0+By_0+C=0$.

由上可知,包含 x 轴正方向的区域(右上方或右方或右下方)为 $Ax+By+C \geqslant 0$ 表示的区域.

同理可证,包含 x 轴负方向的区域(左上方或左方或左下方)为 $Ax+By+C \leqslant 0$ 表示的区域.

利用此方法,可以直接对平面区域进行判断,更直接,更快速,只要能作出直线就能正确地画出区域.特别是在画不等式组所表示的平面区域时,这种方法的优点就更明显了.

3. 直线划分平面各种情况

一般地,不等式

$$Ax+By+C>0,$$

当 $B \neq 0$,可变形为

$$y>kx+b(B>0),$$

$$y<kx+b(B<0).$$

当 $B=0$ 时,可变形为

$$x>m, x<m.$$

我们可以作出相应区域,见下面(1)、(2)、(3).

(1) $y>kx+b$ 表示直线 $y=kx+b$ 上方区域.

若 $k>0$,$y>kx+b$ 表示直线 $y=kx+b$ 左上方区域(图 1-5);

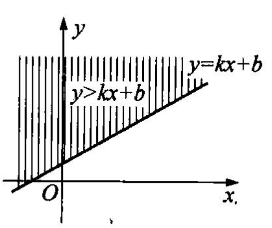

图 1-5

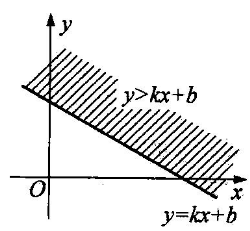

图 1-6

若 $k<0$,$y>kx+b$ 表示直线 $y=kx+b$ 右上方区域(图 1-6).

(2) $y<kx+b$ 表示直线 $y=kx+b$ 下方区域.

若 $k>0$，$y<kx+b$ 表示直线 $y=kx+b$ 右下方区域(图 1－7)；

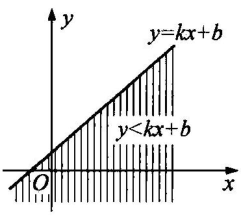

图 1－7

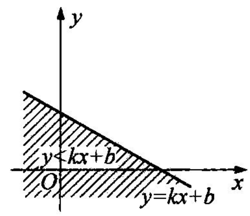

图 1－8

若 $k<0$，$y<kx+b$ 表示直线 $y=kx+b$ 左下方区域(图 1－8).

(3) $x>m$ 表示直线 $x=m$ 右侧区域(图 1－9)，而 $x<m$ 表示直线 $x=m$ 左侧区域(图 1－10).

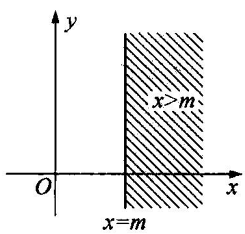

图 1－9

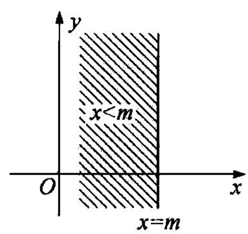

图 1－10

(4) $y>n$ 表示直线 $y=n$ 上方区域(图 1－11)，而 $y<n$ 表示直线 $y=n$ 下方区域(图 1－12).

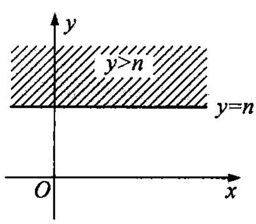

图 1－11

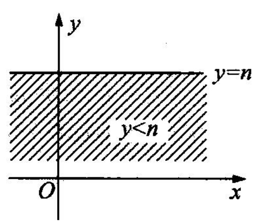

图 1－12

4. 二元一次不等式组

二元一次不等式组由若干个二元一次不等式或者由若干个二元一次不等式、一元一次不等式组成，各个不等式解的公共部分即不等式组的解.

由于平面区域是由不等式(组)、方程来表示的，所以它与函数、不等式、方程等有着密切联系. 用平面区域来解决有关问题，尤其是含两个变量及可转化为两个变量的问题，会有独特的作用.

范例精析

例 1 （2008 年高考安徽省文科 11，理科 15 题）若 A 为不等式组 $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ y - x \leqslant 2 \end{cases}$ 表示的平面区域，则当 a 从 -2 连续变化到 1 时，动直线 $x + y = a$ 扫过 A 中的那部分区域的面积为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　　　B. 1

C. $\frac{7}{4}$　　　　D. 2

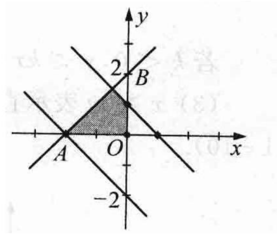

图 1－13

解　如图 1－13，知区域的面积是 $\triangle OAB$ 去掉一个小直角三角形. 阴影部分面积比 1 大，比 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 小，故选 C.

评析： 这里阴影部分面积不需要算出来，就能判定正确选择 C 了. 一般地，求直线划分的平面区域面积，若平面区域是三角形，则可尽量以与坐标轴平行的边为底求其面积；如果平面区域不是三角形，可将其划分为几个易求面积的三角形.

例 2　若点(0,0)在直线 $3x-2y+a=0$ 的上方区域，则点(1,3)在此直线的上方还是下方区域？

解　因直线 $3x - 2y + a = 0$ 的上方区域的点的坐标满足 $y > \frac{3}{2}x + \frac{a}{2}$，已知点(0,0)在直线 $3x - 2y + a = 0$ 的上方区域，所以 $\frac{a}{2} < 0$，即 $a < 0$. 又因为 $3 \times 1 + \frac{a}{2} - 3 = \frac{a-3}{2} < 0$，所以点(1,3)在此直线的上方区域.

评析： 一般地，$y \geqslant kx + b$ 表示直线 $y = kx + b$ 及其上方的平面区域；$y \leqslant kx + b$ 表示直线 $y = kx + b$ 及其下方的平面区域.

若方程 $Ax + By + C = 0$ 表示的直线为 l，不等式 $Ax + By + C > 0$ 表示的平面区域为 D，则

① 当 $A > 0, B > 0$ 时，D 为 l 的右上方区域.
　当 $A > 0, B < 0$ 时，D 为 l 的右下方区域.

② 当 $A < 0, B > 0$ 时，D 为 l 的左上方区域.
　当 $A < 0, B < 0$ 时，D 为 l 的左下方区域.

③ 当 $A = 0, B > 0$ 时，D 为 l 的上方区域.
　当 $A = 0, B < 0$ 时，D 为 l 的下方区域.

④ 当 $B = 0, A > 0$ 时，D 为 l 的右方区域.
　当 $B = 0, A < 0$ 时，D 为 l 的左方区域.

例 3　解不等式组

$$\begin{cases} 2x + y - 5 < 0, \\ x - y + 2 > 0. \end{cases}$$

解　对 y 求解，得

$$\begin{cases} y < 5-2x, \\ y < x+2. \end{cases}$$

对于 x 的给定值，y 必须选择小于 $(5-2x)$ 与 $(x+2)$ 中的较小者，为了解决二式中的较小值的问题，解不等式 $5-2x < x+2$，

得 $x > 1$.

所以 $x < 1$ 时，$5-2x > x+2$.

故原不等式组的解可表示为：

若 $x = 1$ 时，$y < 3$；

若 $x < 1$ 时，$y < x+2$；

若 $x > 1$ 时，$y < 5-2x$.

评析： 事实上，例 3 不等式组的解，为不等式 $2x+y-5<0$ 与 $x-y+2>0$ 所示区域的公共部分，也就是说，表示不等式组解的区域，它既属于 $y=x+2$ 右下方区域，又属于 $y=5-2x$ 左下方区域（图1－14）.

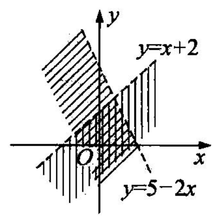

图 1－14

解二元一次不等式组，也可用图示各不等式所表示的区域来达到目的.

例 4　（2009 年北京市高考文科卷试题）设 D 是正 $\triangle P_1P_2P_3$ 及其内部的点构成的集合，点 P_0 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中心，若集合 $S=\{P \mid P\in D, |PP_0| \leqslant |PP_i|, i=1,2,3\}$，则集合 S 表示的平面区域是　　(　　)

A. 三角形区域　　B. 四边形区域　　C. 五边形区域　　D. 六边形区域

解　如图 1－15，A、B、C、D、E、F 为各边三等分点，答案是集合 S 为六边形 $ABCDEF$，其中，$P_0A = P_2A \leqslant P_iA(i=1,3)$，

即点 P 可以是点 A. 故选 D.

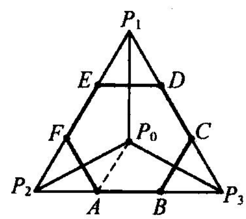

图 1－15

评析： 将集合与平面几何基础知识相结合，主要考查阅读与理解、信息迁移以及考生的学习潜力，及分析问题和解决问题的综合能力，本题是一道创新题.

例 5　（2005 年浙江省高考试题）设集合 $A=\{(x,y) \mid x,y,1-x-y$ 是三角形的三边长$\}$，则 A 所表示的平面区域（不含边界的阴影部分）是　　(　　)

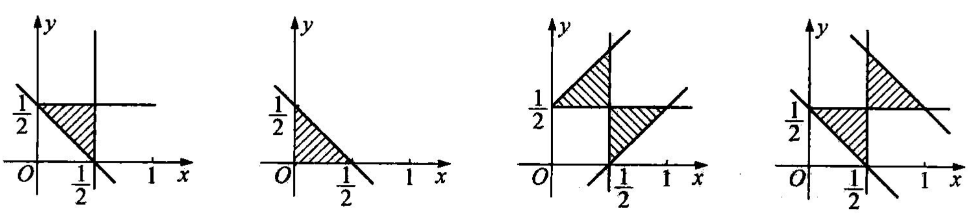

图 1－16

解　因为集合 $A=\{(x,y) \mid x,y,1-x-y$ 是三角形的三边长$\}$，则 $x,y,1-x-y$ 应

满足

$$\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ x+y<1,\\ x+y>1-x-y,\\ x-y<1-x-y,\\ y-x<1-x-y.\end{cases}\text{即}\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ x+y<1,\\ x+y>\dfrac{1}{2},\\ x<\dfrac{1}{2},\\ y<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

应用“直线定界、原点定域”的解题方法，即可确定二元一次不等式组表示的平面区域的位置. 所以正确答案应选 A.

评析：确定二元一次不等式(组)所表示平面区域应注意的事项：画不等式 $Ax+By+C>0$ 表示的平面区域时，直线应画成虚线；画不等式 $Ax+By+C\geqslant 0$ 表示的平面区域时，直线应画成实线；画不等式组表示的平面区域，应找出各个不等式所表示的平面区域的公共部分.

例 6　用不等式组表示下列各题图示区域：

解　(1) 由图 1－17 之各顶点坐标可知各边方程分别为

直线 AB：$x=-1$；

直线 BC：$y=0$；

直线 CD：$x=6$；

直线 DA：$y=4$.

则表示矩形 $ABCD$ 内部区域的不等式组为

$$\begin{cases}x>-1,\\ y>0,\\ x<6,\\ y<4.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}-1<x<6,\\ 0<y<4.\end{cases}$

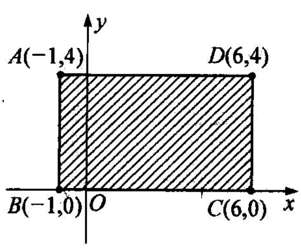

图 1－17

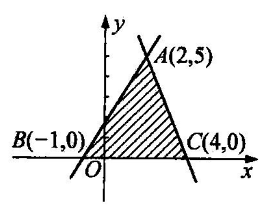

图 1－18

(2) 由图 1－18 可知直线 AB 的方程为 $y=\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}$，表示它的右下方区域的不等式为

$y<\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}$.

直线 BC 的方程为 $y=0$,表示它的上方区域的不等式为 $y>0$.

直线 CA 的方程为 $y=-\frac{5}{2}x+10$,表示它的左下方区域的不等式为 $y<-\frac{5}{2}x+10$.

所以,图示区域为

$$\begin{cases} y<\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}, \\ y>0, \\ y<-\frac{5}{2}x+10. \end{cases}$$

例 7 (2007 年高考江苏理科卷试题) 在平面直角坐标系 xOy 中,已知平面区域 $A=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1$,且 $x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,则平面区域 $B=\{(x+y,x-y)\mid(x,y)\in A\}$ 的面积为　　　　(　　)

A. 2　　　　B. 1　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{1}{4}$

分析:这道题貌似线性规划问题,本质上却是以仿射几何为背景,求一个封闭区域图形经过仿射变换后区域图形的面积.

解法 1　令 $\begin{cases} x+y=s, \\ x-y=t, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} 2x=s+t, \\ 2y=s-t, \end{cases}$ 由区域 A 的条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 1, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} s\leqslant 1, \\ s+t\geqslant 0, \\ s-t\geqslant 0, \end{cases}$ 用线性规划的方法不难画出区域 B,求得其面积为 1,选 B.

说明:这个问题的实质是将面积为 $\frac{1}{2}$ 的区域 A,经过仿射变换 $\begin{cases} s=x+y, \\ t=x-y \end{cases}$ 后变成了面积为 1 的区域 B.(图 1-19)

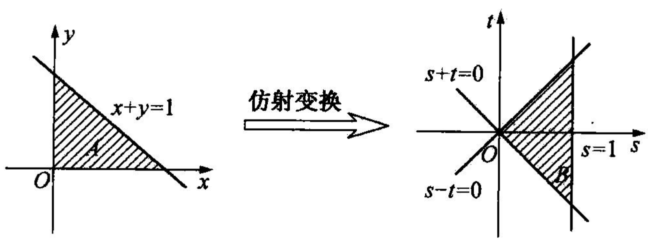

图 1-19

解法 2(代点法)　A 是一个三角形区域,它的三个顶点坐标是 $O(0,0)$、$M(1,0)$、$N(0,1)$,将这三点的坐标代入 $(x+y,x-y)$ 中得:$O'(0,0)$、$M'(1,1)$、$N'(1,-1)$,画出由 O'、M'、N' 三点确定的三角形区域 B,求得区域 B 的面积为 1,从而选 B. 这种解法很巧妙,因为给定的变换 $(x,y)\rightarrow(x+y,x-y)$ 为仿射变换,直线仍变成直线,所以 $\triangle OMN$ 围成的区域变成了 $\triangle O'M'N'$ 所围区域.

评析:该解法的巧妙之处在于回避了线性规划问题中边界交点问题,直接根据顶点来确定三角形的面积.

例 8 设 $A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$，$B=\{(x,y)\mid x\leqslant 10,y\geqslant 2,y\leqslant x-4\}$ 是直角坐标平面 xOy 上的点集. 则 $C=\left\{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\middle|(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\right\}$ 所成图形的面积是________.

解 集合 A 为正方形 $OABC$，集合 B 为 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$，如图 1－20 所示.

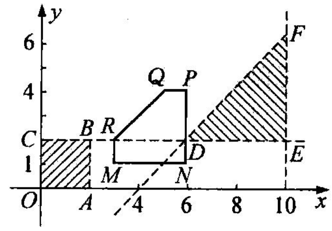

图 1－20

OD 的中点为 $M(3,1)$，AE 的中点为 $N(6,1)$，BF 的中点为 $P(6,4)$，CF 的中点为 $Q(5,4)$，CD 的中点为 $R(3,2)$.

所成图形的面积为

$$S_{MNPQR}=S_{MNDR}+S_{DPQR}=7.$$

例 9 若 $2^a+4^b<2\sqrt{2}$，则点 (a,b) 必在 （　　）

A. 直线 $x+y=1$ 的右上方　　B. 直线 $x+y=1$ 的左下方

C. 直线 $x+2y=1$ 的右上方　　D. 直线 $x+2y=1$ 的左下方

解 由于 2^a，4^b 都是正数，故 $2^a+4^b\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 4^b}=2\sqrt{2^{a+2b}}$. 又由于 $2^a+4^b<2\sqrt{2}$，所以 $2\sqrt{2^{a+2b}}<2\sqrt{2}$，从而 $a+2b<1$，因此点 (a,b) 在直线 $x+2y=1$ 的左下方，选 D.

评析：此题将点 (a,b) 所表示的平面区域巧妙地置身于一个需通过基本不等式进行转化的场景之中，让人感到既新颖又别致.

例 10 用 A、B、C 表示坐标 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，P 为 $\triangle ABC$ 内一点(含边界)，则

$$P=xA+yB+(1-x-y)C,$$

其中 x、$y\in[0,1]$，且 $x+y\leqslant 1$.

证明 连结 AP 并延长交 BC 于 D. 则由定比分点公式，存在 α、$\beta\in[0,1]$，使

$$D=\alpha B+(1-\alpha)C,$$
$$P=\beta D+(1-\beta)A,$$

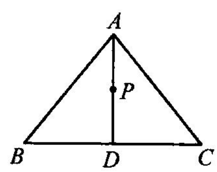

图 1－21

所以 $P=\beta[\alpha B+(1-\alpha)C]+(1-\beta)A$

$=\alpha\beta B+(\beta-\alpha\beta)C+(1-\beta)A.$

令 $x=1-\beta$，$y=\alpha\beta$，则 $1-x-y=\beta-\alpha\beta\geqslant 0$，

故 $P=xA+yB+(1-x-y)C$，

易知 x、$y\in[0,1]$，且 $x+y\leqslant 1$.

例 11 （2009 年全国高中数学联合竞赛第 1 试试题）在坐标平面上有两个区域 M 和 N，M 为 $\begin{cases}y\geqslant 0,\\ y\leqslant x,\\ y\leqslant 2-x,\end{cases}$ N 是随 t 变化的区域，它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 所确定，t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 1$，则 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)=$________.

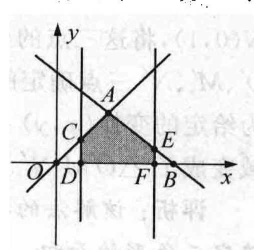

图 1－22

解　由题意知　$f(t) = S_{阴影部分面积}$

$$= S_{\triangle AOB} - S_{\triangle OCD} - S_{\triangle BEF}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(1-t)^2$$

$$= -t^2 + t + \frac{1}{2}.$$

例 12　画出满足不等式 $\log_x y \geqslant \log_{\frac{x}{y}}(xy)$ 的点(x,y)所形成的平面区域.

分析　本题是以对数不等式的形式出现，将其化为代数不等式：

解　因为

$$\log_x y \geqslant \log_{\frac{x}{y}}(xy) = \frac{\log_x(xy)}{\log_x \frac{x}{y}} = \frac{1+\log_x y}{1-\log_x y},$$

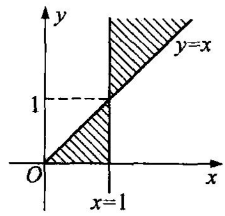

图 1-23

令 $u = \log_x y$，则 $u \geqslant \frac{1+u}{1-u}$. 由此得 $u > 1$，即 $\log_x y > 1$.

所以当 $x > 1$ 时，$y > x$；当 $0 < x < 1$ 时，$0 < y < x$.

所以点(x,y)所形成的区域为图 1-23 中阴影部分(不含边界).

评析：关键在于将非线性条件转化为线性条件.

例 13　若 $x、y、z \geqslant 0$，$p = -3x + y + 2z$，$q = x - 2y + 4z$，$x + y + z = 1$，求点(p,q)在 pOq 平面上的区域.

分析　由等式组成的方程组解出 $x、y、z$(用 $p、q$ 表示)，代入线性约束条件，再作出区域.

解　由已知得(混合组)

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0, \\ 3x - y - 2z = -p, \\ x - 2y + 4z = q, \\ x + y + z = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8-6p+q}{27} \geqslant 0, \\ y = \dfrac{3p-5q+14}{27} \geqslant 0, \\ z = \dfrac{3p+4q+5}{27} \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6p - q - 8 \leqslant 0, \\ 3p - 5q + 14 \geqslant 0, \\ 3p + 4q + 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

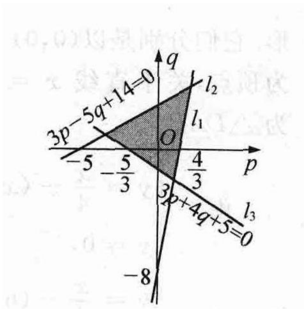

图 1-24

作出在 pOq 平面上的区域(如图 1-24).

所作区域为 l_1：$6p - q - 8 = 0$，l_2：$3p - 5q + 14 = 0$，l_3：$3p + 4q + 5 = 0$ 三直线围成的三角形区域.

例 14　已知关于 t 的方程 $t^2 + tx + y = 0$ 有两个绝对值都不大于 1 的实数根，试求动点(x,y)所在平面区域的图形的面积.