高等医药院校改革创新教材
供基础、临床、口腔、预防等专业用

医学高等数学

主编　何穗智

人民卫生出版社

高等医药院校改革创新教材
供基础、临床、口腔、预防等专业用

医学高等数学

主　编　何穗智

编　者（以章节为序）

欧顺云（中山大学）　赵箭光（广州医学院）
楚慧珠（广东药学院）　陈平炎（暨南大学）
何穗智（中山大学）　田振明（广州中医药大学）
李　彬（南方医科大学）　刘素芳（中山大学）

秘　书　邓卓燊（中山大学）

人民卫生出版社

图书在版编目（CIP）数据

医学高等数学/何穗智主编. —北京：人民卫生出版社，2010.7

ISBN 978-7-117-12960-2

Ⅰ.①医… Ⅱ.①何… Ⅲ.①医用数学-高等学校-教材 Ⅳ.①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 092025 号

门户网：	**www.pmph.com**	**出版物查询、网上书店**
卫人网：	**www.ipmph.com**	**护士、医师、药师、中医师、卫生资格考试培训**

医学高等数学

主　　编： 何穗智
出版发行： 人民卫生出版社（中继线 010-59780011）
地　　址： 北京市朝阳区潘家园南里 19 号
邮　　编： 100021
E - mail： pmph @ pmph.com
购书热线： 010-67605754　010-65264830
010-59787586　010-59787592
印　　刷： 北京市顺义兴华印刷厂
经　　销： 新华书店
开　　本： 850×1168　1/16　　**印张：** 15
字　　数： 443 千字
版　　次： 2010 年 7 月第 1 版　　2010 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号： ISBN 978-7-117-12960-2/R・12961
定　　价： 29.80 元
打击盗版举报电话：010-59787491　E-mail：WQ @ pmph.com
（凡属印装质量问题请与本社销售中心联系退换）

前言

《医学高等数学》包括微积分、概率论、线性代数三部分。微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一，学过微积分是一个"受过高等教育的人"的标志，20 世纪 80 年代后期，美国人反思的结论是"微积分的教学质量关系到美国的科技发展"；概率论为医学统计打下坚实的基础，可以说没有概率论就没有现代统计，而缺乏现代统计思维的医学生是没有竞争力的；线性代数在培养发散性思维能力方面具有独特的魅力，而"线性代数＋生物化学"则是当代药物设计的发展方向。尽管数学不是医学生的主干课程，但是高等数学在现代医学教育中具有不可或缺的作用。

本书一个重要特点是增加了使用计算机进行"医学高等数学的演示与实验"，强调"做数学"：在探索数学现象中发现数学规律，即所谓重过程而不是重结果。

附表中的泊松分布的概率、标准正态分布的分布函数均采用 Excel 函数计算，同学们可参照附表下面相应的 Excel 函数上机体会。

《医学高等数学》共 8 章内容，分别由欧顺云、楚慧珠、何穗智、李彬、赵箭光、陈平炎、田振明、刘素芳编写，秘书为邓卓燊。

因作者水平所限，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者指正。

何穗智

2010 年 1 月，广州

目录

第一章

欧顺云

函数和极限

函数是描述变量之间依赖关系的重要数学模型，是高等数学的主要研究对象，极限刻画了变量的变化趋势，是研究函数的重要工具，因此，函数和极限是高等数学中最重要的基础概念. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的主要性质.

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在某一变化过程中，保持同一数值的量称为**常量**(constant)，可以取不同数值的量称为**变量**(variable).

一个量是常量还是变量，是相对的. 例如重力加速度，在研究同一地点的自由落体运动时是一常量，但对不同地点而言，重力加速度应视为变量.

2. 函数的概念

定义 1.1　设有两个数集 X、Y，f 是一个确定的对应规律，若对于 X 中的任意一个数 x，通过 f 在集合 Y 中都有唯一确定的 y 与之对应，则称 f 为定义在 X 上的一元函数，简称为函数. 记为

$$y=f(x)$$

x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependent variable)或**函数**(function)，X 为函数的**定义域**(domain of definition)，通常用 D_f 表示.

当 x 取数值 $x_0\in X$ 时，与之对应的是数值 y_0，称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$，$y(x_0)$，$y\Big|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 X 中的一切数时，与之对应的数 y 组成的数集 $V_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$，称为函数 f 的**值域**(domain of functional value).

函数的定义域和值域通常都是由区间来表示的，下面就介绍几种常用的区间概念.

a，b 为数轴上两个点，**有限区间**(definite interval)包括三种：**开区间**(open interval)$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$，**闭区间**(closed interval)$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，**半开半闭区间**(half closed interval)$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$和$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$. **无穷区间**(infinite interval)有以下几种形式：$(a,+\infty)=\{a<x<\infty\}$，$(-\infty,b)=(-\infty<x<b)$，$(-\infty,+\infty)=(-\infty<x<+\infty)$.

邻域(neighborhood)是以后学习中经常用到的一种区间概念，点 a 的 $\delta(\delta>0)$邻域记为 $U(a,\delta)$，表示数轴上以 a 为中心，以 δ 为半径内的所有点的集合，即 $U(a,\delta)=\{a-\delta<x<a+\delta\}$，邻域 $U(a,\delta)$ 实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，如图 1.1. 为体现其微观性，一般认为 δ 是很小的正数. **去心 δ 邻域**也是一个非常有用的概念，它指的是邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 后的点集，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，

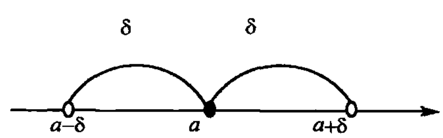

图 1.1

即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$.

例 1.1　已知 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}-\sqrt{1-x^2}$，求函数的定义域并用区间表示.

解　要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases}x+1\neq 0,\\ 1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$

解得　$-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq -1$，

即函数的定义域为 $[-1,1)$.

两个函数为相同函数必须要求函数的三要素，即**定义域、值域和对应法则相同**.

例 1.2　$f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 虽然形式不同，但由于定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，对应法则都是从 x 对应到 1，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 实际上是同一个函数.

3. 函数的表示法

函数的表示法有表格法、图像法和解析法(公式法)，解析法便于理论分析和数值计算，是今后常用的一种函数表示方法. 如例 1.1 和例 1.2 中用的都是解析法.

二、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数(basic elementary function)指的是以下五种函数：**幂函数**(power function) $y=x^a$ (a 为任意实数)，**指数函数**(exponential function) $y=a^x$ ($a>0,a\neq 1$)，**对数函数**(logarithmic function) $y=\log_a x$ ($a>0,a\neq 1$)，**三角函数**(trigonometric function) $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$ 等，**反三角函数**(antitrigonometric function) $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\operatorname{arccot} x$，$y=\arctan x$ 等. 前四种函数已在中学阶段的学习中为大家所熟知，下面仅给出反三角函数的简单内容介绍. 反三角函数表示的是角，如三角函数 $y=\sin x$ 在一个周期 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 内，有 $-1\leqslant y\leqslant 1$，则它的反函数 $x=\arcsin y$(习惯上记为 $y=\arcsin x$)表示的是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内的一个角，它的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，见图 1.2.

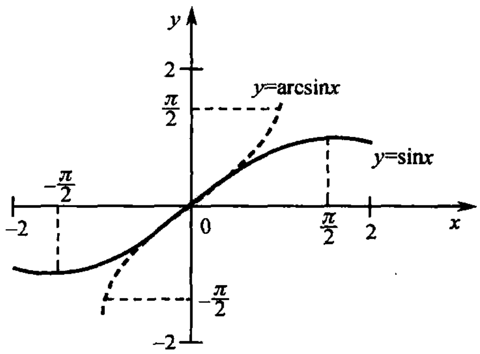

图 1.2

2. 复合函数

设变量 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in \mathrm{U}$，变量 u 又是变量的 x 函数 $u=\varphi(x)$，$x\in \mathrm{X}$，则对于相应的 u 使 $y=f(u)$ 有定义的那些 x 值，则称函数

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in \mathrm{D}$$

为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**(compound function). 也可记作 $y=(f\circ\varphi)(x)$. 其中变量 u 称为中间变量，$f(u)$ 称为外函数，$\varphi(x)$ 为内函数. 复合函数概念可以推广到多个函数构成情况，此时函数是通过多个中间变量的传递而形成的.

例 1.3　设 $y=\lg u$，$u=-x^2+1$，求出 y 关于 x 的复合函数.

解　$y=\lg u$，定义域为：$u>0$；若要求 $u=-x^2+1>0$，必须 $-1<x<1$，所以 y 关于 x 的复合函数是 $y=\lg(-x^2+1)$，其定义域为 $(-1,1)$.

注：复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域 D 不一定等同于内函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域 X，是 X 中使内函数的值域 $U_\varphi\subseteq U$ (U 为外函数的定义域)的部分，是 $u=\varphi(x)$ 定义域 X 的子集. 当 U_φ 与 U 无交集(也即 D 为空集)时，称 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 是不能复合的. 如 $y=\lg u$ 与 $u=-x^2$ 的复合函数是不存在的.

例 1.4　设 $f(x)=10^x$，$g(x)=\sin x$，$h(x)=x^2$，试求复合函数 $(f\circ g\circ h)(x)$.

解　$(f\circ g\circ h)(x)=10^{\sin x^2}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$

上述合成多个函数为一个表达式.而在后续学习中,更重要的是分析一个复合函数的复合过程,找出它是由哪些函数复合而成的,我们称该过程为复合函数的"分解",一般"分解"为若干个基本初等函数或由它们通过四则运算而得到的**简单函数**.

例 1.5　将下列复合函数"分解"为简单函数:

(1) $y=\cos(3x^2+4x-2)$

(2) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$

(3) $y=\sqrt{\lg(x^2-1)}$

解　(1) 在$(-\infty,+\infty)$内,$y=\cos(3x^2+4x-2)$可以看成是由 $y=\cos u$ 和$u=3x^2+4x-2$ 复合而成的.

(2) 当 $x\neq0$ 时,$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$可以看成是由 $y=e^u$,$u=v^2$,$v=\sin w$,$w=\dfrac{1}{x}$复合而成的.

(3) 当 $x^2-1\geqslant0$ 时,即在区间$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$内,$y=\sqrt{\lg(x^2-1)}$可以看成是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\lg v$ 和 $v=x^2-1$ 复合而成的.

注:将复合函数分解所得的简单函数应可以直接求导而不是复合求导(详见第二章),如 $y=\sqrt{\ln x^2}$分解为 $y=\sqrt{u}$,$u=2\ln x$ 是对的,而分解为 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln x^2$ 是错的.

3. 初等函数

定义 1.2　由基本初等函数经过有限次四则运算以及复合运算所得到的并且可以用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**(elementary function).

例如,$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$、$y=x\ln x+\cos(1-e^x)$等是初等函数,但也有一些常见的函数却不是初等函数.

例 1.6　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$不是初等函数.

解　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$,其对应法则无法用一个解析式表示,所以不是初等函数.

三、分段函数

像符号函数一样,某些函数在其定义域的不同区间上(个别的区间可退缩为一点)分别用不同的解析式表示,则称这类函数为**分段函数**(piecewise function).

应该注意的是,分段函数是一个函数,而不是两个或几个函数.求分段函数的函数值时,不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算.分段函数一般不属于初等函数,也有例外.

例 1.7　绝对值函数 $y=|x|$是分段函数,但也是初等函数.

解　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$对于其定义域内不同的 x 值,用了不同的式子表示,显然是分段函数;但另一方面,$y=|x|$又可以写成 $y=\sqrt{x^2}$,可以看作是 $y=\sqrt{u}$与 $u=x^2$ 复合而成的,所以它也是初等函数.

例 1.8　设 $f(x)=\begin{cases}x+4, & x\leqslant0\\ x^2-2x, & 0<x<4\\ x^3+2, & x\geqslant4\end{cases}$

求 $f(4)$、$f(-3)$、$f(1)$、$f(f(f(5)))$

解　$f(4)=4^3+2=66$,

$f(-3)=-3+4=1$,

$f(1)=1^2-2\times1=-1$,

$$f(f(f(-5)))=f(f(-5+2))=f(f(-3))=f(1)=-1.$$

四、函数的几种简单特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若$\exists M>0$，使对$\forall x\in I$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 I 上有界(其中$\exists$为“存在”、$\forall$为“对于任意给定的”)；否则称 $f(x)$在 I 上无界.

例如：$\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的；$y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$内是有界的，但在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，对$\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上单调递增；若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在(a,b)内是单调递减的. 若上述定义中有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$在 I 上是严格单调递增(减).

例如：x^2 在$(-\infty,0)$内是单调递减的，而在$(0,+\infty)$内是单调递增的；x^3 在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调递增的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，$\forall x\in I$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数；如果对$\forall x\in I$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数. 偶函数的图像是关于 y 轴对称的，而奇函数的图像是关于坐标原点对称的.

例如：$x^2+\cos x$、3^x+3^{-x}是偶函数；$\sin x+\tan x$、3^x-3^{-x}是奇函数.

4. 周期性

对于函数 $f(x)$，若存在一个最小的正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为函数 $f(x)$的周期.

例如：$\sin 2x$、$\cos 2x$ 是周期函数，周期都为 π.

第二节 极　　限

极限(limit)是微积分中的基础，微积分中的连续、微分、积分等重要概念都是以它来描述的. 极限概念描述和研究的是：自变量按一定的趋势变化时，函数的变化趋势如何.

一、极限的概念

根据自变量 x 的变化趋势，分两种情形讨论极限概念. 一种是自变量 x 的绝对值无限增大(记为 $x\to\infty$)；另一种是自变量 x 的值无限趋近于某一定值 x_0(记为 $x\to x_0$). 下面就这两种情况分别讨论.

1. $x\to\infty$时函数的极限

首先讨论 $x\to+\infty$时函数的极限

数列可以看做是一类特殊函数，如数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$可以看做是 x 取正整数时的函数 $f(x)=\frac{1}{x}$. 由表 1.1 可看出，x 是取正数且无限增大(记作 $x\to+\infty$)，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$也即函数 $f(x)=\frac{1}{x}$(x 为正整数)的变化趋势是无限趋近于 0，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. 见图 1.3 的第一象限的部分.

表 1.1

x	1	10	100	1000	10 000	100 000	…	$\to\infty$
$f(x)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…	$\to 0$

考察 x 为负值且无限减小时函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 显然也是越来越趋近于 0，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. 见图 1.3 的第三象限的部分.

一般地，$x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数的极限定义如下：

定义 1.3 A 为一常数，对 $\forall\varepsilon>0$（$\forall$ 表示“任意给定的”，ε 是一个充分小的正数），总 $\exists N>0$（$\exists$ 表示“存在”，N 是一个充分大的正数），当 $x>N$（或 $x<-N$）时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\text{（或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{）}$$

也可记作 $f(x)\to A(x\to+\infty)$（或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$）.

而当考察 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势则是另外一种情形了，它是同时考察 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势，如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，无论 x 是取正值并无限增大（即 $x\to+\infty$），还是取负值且其绝对值无限增大（即 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势都是无限趋近于 0. 如图 1.3.

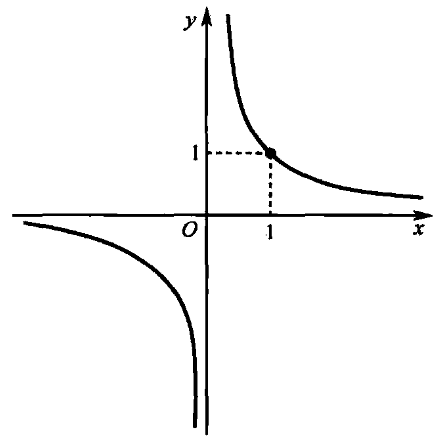

图 1.3

当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 上的图像无限地接近于 x 轴，即以直线 $y=0$ 为渐近线. 由此可见：0 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时无限接近的一个常数.

定义 1.4 A 为一常数，对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists N>0$，当 $|x|>N$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $x\to\infty$ 的函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to\infty).$$

上述定义也可以如下方式表述：当自变量 x 的绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就称当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限（或收敛于 A），记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to\infty).$$

显然 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

如函数 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\frac{\pi}{2}$；由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是不存在的. 而对函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时都有 $f(x)\to0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

若当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 不趋于某一个常数，则称 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在（**发散**）. 例如函数 $y=\cos x$ 当 $x\to\infty$ 时发散，因为当 $x\to\infty$ 时函数值始终在 -1 与 1 之间波动；而函数 $y=x^2$ 当 $x\to\infty$ 时的极限也不存在，因为当 $x\to\infty$ 时，函数值 $f(x)$ 没有无限趋近于一个常数 A，而是无限增大. 对于后者，常称当 $x\to\infty$ 时函数极限为无穷大，记为

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty\text{ 或 }x^2\to\infty(x\to\infty)$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

考察当自变量从 x 轴上 $x=1$ 的左右趋近于 1（记为 $x\to1$）时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势，由图

1.3 可见当 $x\to1$，不论是从右边还是从左边趋近于 1，函数 $f(x)$ 都趋近于 1，可见常数 1 是当自变量 $x\to1$ 时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近的常数.

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某**去心 δ 邻域** $\mathring{U}(a,\delta)$ 内有定义，对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$（δ 是一个充分小的正数），当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为 $x\to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

这个定义表示：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某**去心 δ 邻域** $\mathring{U}(a,\delta)$ 内有定义，无论自变量 x 以何种方式无限趋近于定点 x_0 时，函数 $f(x)$ 都无限趋近于一个常数 A，就称当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限（或**收敛**于 A）. 否则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在（**发散**）.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何意义是：

对任意给定的充分小正数 ε，可求出相应 δ>0，当限制 x 在 x_0 的去心邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 总位于直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 之间（图 1.4）.

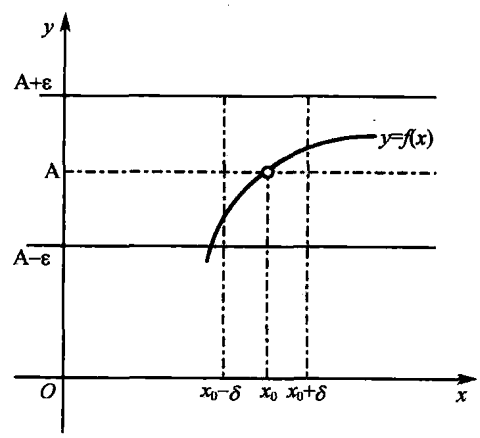

图 1.4

单侧极限：在上述定义中，限定 $x>x_0$，即从 x_0 的右（左）侧趋近于 x_0（记作 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$），函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A，则 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限（或左极限），记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A$$

$$\left(\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A\right)$$

显然 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

由此可知，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

例 1.9　用定义证明 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$

证明　$\forall\varepsilon>0$，为使 $|f(x)-1|=|(2x-1)-1|=|2(x-1)|<\varepsilon$，即 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，只需取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ 即可.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|2(x-1)|<2\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，即

$|f(x)-1|=|(2x-1)-1|=|2(x-1)|<\varepsilon$ 恒成立，故 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$.

例 1.10　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$ 当 $x\to1$ 时的极限.

解　这是分段函数，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限分别为：

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(1-x)=0$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在（图 1.5）.

例 1.11　若考察函数 $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x^3 & x>0\end{cases}$ 当 $x=0$ 时的极限（图 1.6），由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^3=0$$

左右极限相等，因此 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限存在且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

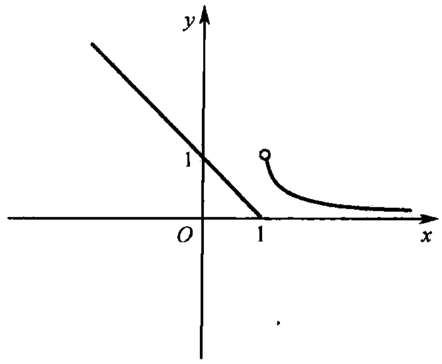

图 1.5

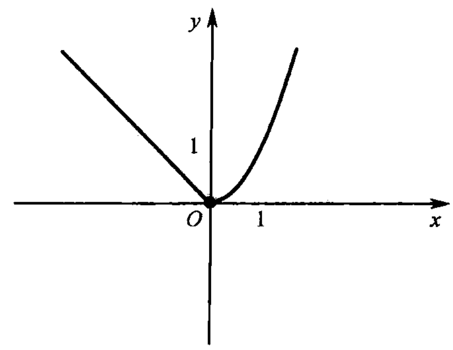

图 1.6

3. 判别极限存在的法则

法则 1(夹逼法则)　在同一极限过程中，若三个函数 $f_1(x)$、$f(x)$ 及 $f_2(x)$ 之间有如下关系：

$$f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$$

且　$\lim f_1(x)=\lim f_2(x)=A$

则　$\lim f(x)=A$

例　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n)^{\frac{1}{n}}$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2^x)^{\frac{1}{x}}$）

解　$2<(1+2^n)^{\frac{1}{n}}<(2\cdot 2^n)^{\frac{1}{n}}=2\cdot 2^{\frac{1}{n}}$

因为　$\lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot 2^{\frac{1}{n}}=2$，由夹逼法则，

则　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n)^{\frac{1}{n}}=2$.

法则 2(单调有界法则)　单调有界数列一定有极限. 即对 $\{a_n\}$ 而言，若有 $a_1\geqslant a_2\cdots\geqslant a_n\cdots$（递减）或 $a_1\leqslant a_2\cdots\leqslant a_n\cdots$（递增），且对一切 n，有 $|a_n|\leqslant M$（有界），则 $\{a_n\}$ 必有极限.

例　圆内接正多边形的面积 $S_3, S_4, S_5\cdots$ 递增，$\{S_n\}\leqslant$ 圆面积，

由法则 2 可知 $\{S_n\}$ 必有极限.

法则 2 对函数极限也是有效的.

二、极限的四则运算

定理 1.1　若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$.

特别地　$\lim kf(x)=k\lim f(x)$（k 为常数）;

(3) 当 $B\neq 0$，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

上述运算法则成立的前提是 $f(x)$，$g(x)$ 都有正常极限，即它们的极限是一个常数.

例 1.12　求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x-x^2)$

解　由于 $\lim\limits_{x\to 2}3x=3\lim\limits_{x\to 2}x=3\cdot 2=6$，$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$，

利用极限差的运算法则，可得 $\lim\limits_{x\to 2}(3x-x^2)=6-4=2$.

例 1.13 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

解 由于分母的极限为零,不能直接用极限差的运算法则.先消去公有零因子$(x-2)$再进行运算

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+2=4.$$

三、无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量

定义 1.6 **极限为零的变量为无穷小量**(infinitesimal).函数 $f(x)$称为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,如果 $f(x)$满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=0$).

定义 1.7 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时$|f(x)|$可无限增大,则称 $f(x)$是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量,简称**无穷大**(infinity).记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(\text{或 }\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty)$$

例如,$\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小,而当 $x\to\infty$时,$\sin x$ 既不是无穷小也不是无穷大;$\dfrac{1}{x}$是当 $x\to\infty$时的无穷小,却是当 $x\to 0$ 时的无穷大.

可见说某一变量是无穷小(或无穷大),一定是就某一变化过程而言的.如$\dfrac{1}{x}$是当 $x\to\infty$时的无穷小,说$\dfrac{1}{x}$是无穷小就是错误的.无穷小(或无穷大)是变量,不等同于很小(或很大)的数.**常数中只有零是无穷小**,其他任何很小的常数(零除外)都不能称为无穷小,任何很大的常数也不能称为无穷大.如数 10^{-20} 与零非常接近,但不是无穷小,数 10^{20} 非常大,但不能称其为无穷大.

2. 无穷小与函数极限的关系

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量(或记为 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$).

证 **必要性**.设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,可令 $f(x)=A+\alpha(x)$,对 $\forall\varepsilon>0$,总 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有$|f(x)-A|=\alpha(x)<\varepsilon$,即$|\alpha(x)-0|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$,所以 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

充分性.设 $f(x)=A+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}(A+\alpha)=A+\lim_{x\to x_0}\alpha=A.$$

3. 无穷小的运算性质

性质 1.1 无穷小的乘积或有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

即 若 $\lim\alpha_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=0,\lim\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=0$

性质 1.2 有界变量或常数与无穷小的乘积是无穷小.

即 若$|f(x)|\leqslant M,\lim\alpha=0$,则 $\lim\alpha f(x)=0$.

4. 无穷小与无穷大的关系

定理 1.3 在自变量的同一变化过程中,若 $f(x)$是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小;反之,若 $f(x)$是无