九年义务教育三年制初级中学

几何证题思想策略方法（第二册）

王岳庭 张国旺 主编

北京师范大学出版社

九年义务教育三年制初级中学

几何证题思想策略方法

第二册

主编 王岳庭 张国旺
编著 陈光大 张豫南

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

九年义务教育三年制初级中学几何证题思想策略方法第 2 册/王岳庭,张国旺主编;陈光大,张豫南编著.—北京:北京师范大学出版社,1997.8

ISBN 7-303-04421-3

Ⅰ.九… Ⅱ.①王… ②张… ③陈… ④张… Ⅲ.几何课-初中-解题 Ⅳ.G634.635

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 10600 号

北京师范大学出版社出版发行
(100875 北京新街口外大街 19 号)
北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/32 印张:8.375 字数:174 千
1997 年 8 月北京第 1 版 1997 年 8 月北京第 1 次印刷
印数:1—5 000 册
定价:8.20 元

前 言

《几何证题思想策略方法》是一套专门讲述九年义务教育三年制初级中学教科书的《几何》各册中的解题思想和方略的辅助读物. 相应地按照教科书的册数和章序撰写,每章中所涉及到的思想和方略仅限于用本章的基本知识和基本技能以及之前学过的“双基”内容范围之内可解的题型. 也就是说,对于每一思想和方法的出现,不作全面系统地阐述该方法的理论,而是只讲本章知识范围内可能用到的一些侧面,随着日后“双基”学习的不断增长,在以后的各章中将这一方法逐步加以补充和完善. 不过,每章从不同角度所介绍的方法,总的说来,不仅可以满足于课本中的复习题、与课本相配套的课外习题集中的综合题以及与课本相适应的基础训练中有一定难度的题目的需要,而且,对于在此“双基”之上的竞赛题型,也提供了相应的解题思路与途径. 特别是学生理应掌握,而在配套练习中又未曾出现过的题型,也有范例以资弥补. 总之,期望用这套书所阐述的思想和方略之矢,足以能射题海中之的.

每章分为五大部分.

一、一般数学方法与技巧

常用数学方法可解的题目归入这一部分. 全面阐述方法步骤,并指明应用中的技巧.

二、数学思维方法

集中表现用数学思维方法来解的题目归入这一部分. 重

在阐述此类题型的解题策略上.

三、一题一议

这种题目只能用一种特殊的途径来处理.可是,在阐发这种思路之后,确有举一反三,深化题目之效.

四、特殊数学方法与技巧

必须用特殊的数学方法来解的题目归入这一部分. 重在介绍特殊方法以及解题过程中的一些特殊技巧.

五、数学思想及其唯物辩证观

将突出用本章出现的数学思想来解的题目以及较为显著体现唯物辩证法的题目归入这一部分. 重在分析用其思想之巧妙以及唯物辩证法在解题中的作用.

这里需要说明的是数学方法、数学思维方法和数学思想这三者没有严格的界定,仅在其层次和应用的意义上有所不同.数学方法就是直接应用于解数学题的做法,它有一定确切的内涵,有具体的、可操作的步骤和作法,应用起来更直接有效. 如代入法、比较法、配方法、待定系数法和换元法等等. 数学思维方法是抽象程度较高,更具有一般性的提供解题策略和思路的方法.如抽象与概括、归纳与演绎、递推与类比等等.数学思想是解数学题的指导思想,它更抽象更概括,只是提示一种思考的方向,并不具备实施操作的步骤,但其应用却更为广泛. 如数形结合的思想、函数和方程的思想、分类讨论的思想以及等价转化的思想等等.不过,每种思想一旦在某一侧面构成具体的模式,也就形成一种具体的方法.

在这套书中,对于思想和方法不给予理论上的探讨.仅在每节的标题中出现,对提到的思想和方法仅在内文中略加说明.主要是通过有限的可能出现的各种题型的实例,以提供足

量的感性材料，用以充实学生对所述方法的感性认识和悟性．使学生在不知不觉的逐步学习之中，潜移默化地培养他们的唯物辩证观和科学的思维．通过他们自己的学习，以逐步形成他们的创造思维的广阔天地．

这套书可读性强，可以丰富假日益趣，开阔知识视野，拓宽思维途径和增进能力基础．因此，这套书是教师理想的教学参考；是学生期望的自学良师；是家长渴求的辅导帮手．

这套书的设想与撰写还是首次，难免有不尽如人意之处．在此诚恳地希望读者提出宝贵意见．我们满怀信心，相信通过不断修改的再版中，是会得到充实和完善的．

主编　王岳庭　张国旺

1997年1月6日

目　录

第三章　三　角　形

三角形是最简单的封闭图形．但是，和前两章学习的角、线段、相交线、平行线这类简单图形相比，它的内容和研究方法都有了重大的发展，在空间想象和逻辑推理方面也都有了更高的要求．同时，它的研究方法和技巧以及其中蕴含的数学思想又为后续内容的学习起了奠基的作用，因此，本章所研究的证题思想方法和策略，在平面几何的学习中处于十分关键的地位．

§1　一般的数学方法和技巧

一、概念的判别和分类

概念是思维的细胞，辨别概念是思维的起点．

数学的概念是把数学研究的对象进行抽象概括，并应用数学语言（普通语言、符号语言、图形语言）进行表达．因此理解概念，根据概念对研究对象进行研究，就成了研究每类数学问题的第一步．

例如在刚刚进行三角形的学习时，就必须进行以下概念的辨别．

(1)三角形的分类；

(2)三角形的主要线段；

(3)构成三角形的条件；

(4)三角形的内角和及内外角关系；

(5)全等三角形的对应边与对应角.

这些概念的辨别是进一步学习的基础. 辨析概念必须要抓住概念的本质特征.

例 1 下面一些说法是否正确，为什么？

(1)三角形可以分为直角三角形、等腰三角形和等边三角形三类；

(2)三角形按边来分，可以分为不等边三角形、等腰三角形和等边三角形三类.

分析：概念的分类；对我们的研究有着十分重要的意义，它是揭示概念的所有对象（概念外延）的逻辑活动，分类的结果可以帮助我们提纲挈领地掌握系统的知识. 为了使分类正确，做到分类的结果不遗漏，也不重复，必须遵守分类的基本原则，这些原则主要是：

1. 分类必须按照一个“标准”（即按照被分概念的一个本质属性）. 例如在三角形的分类中，可以按照边来分类，也可以按照角分类，但不可在同一层次分类中采用不同的标准. 直角三角形是按照角分类得到的，而等腰三角形是按边分类得到的，因此，直角三角形和等腰三角形在同一层次的分类中出现是不正确的.

2. 分类应当是相称的，即被分成对象的总和必须与被分概念的对象总和相等. 例如把三角形分成锐角三角形和钝角三角形就是不正确的，因为这样的分类少了一个直角三角形，而把三角形分为等边三角形、等腰三角形和不等边三角形也是不正确的，因为等边三角形包括在等腰三角形中.

例 2 有一组三角形，其中三个是等腰三角形，一个是等

边三角形,一个是直角三角形,一个是锐角三角形,一个是钝角三角形,问这组三角形中至少有几个三角形.

解:在这一组三角形中,按角分类,已经是完全相称的:一个是直角三角形,一个是锐角三角形,一个是钝角三角形,这三种类型的三角形是互不相容的. 所以这一组三角形中至少有三个三角形,而等腰三角形与按角分类的三种三角形却是相容的,等边三角形也是等腰三角形. 因此,这三个三角形可以是一个等边三角形,一个等腰直角三角形,另一个是钝角的等腰三角形.

三角形内的三条主要线段是又一个易于产生混淆和错误的概念,在判别时常常会受到垂线、角的平分线等几何图形的干扰.

例 3 下列命题中真命题是( ).

(A)过三角形的顶点且和它的对边垂直的线段是三角形的高.

(B)直角三角形中三条高的交点恰好是直角的顶点.

(C)三角形的内角的平分线是三角形的角平分线.

(D)如果三角形的三条高有两条不在三角形的内部,这个三角形是钝角三角形.

分析:辨析概念要扣住概念的本质. 三角形的角平分线、中线和高线都是线段,要注意把三角形的角平分线与内角平分线区别开来,后者是一条射线,而前者是一条特指的线段. 同样,三角形的高与过顶点且和它对边垂直的线段也是不同的,高是指顶点和垂足间的线段. 所以(A)、(C)都是假命题. 辨析概念也可以通过实际图形,在辨析选择分支(D)时特别注意三角形的高在三类不同的三角形中垂足的位置,锐角三

角形三条高都在三角形内部，而直角三角形和钝角三角形都有两条高不在内部，而直角三角形三条高的交点恰为直角顶点，所以(D)也是错误的，只有(B)是正确的.

例 4 设三角形三边长分别是 $3, 1-2a, 8$.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)如三角形为等腰三角形，求 a 的值.

分析：判断已知长度的三条线段是否可以组成一个三角形的依据是三角形三边关系定理，方法是检查较短的两条线段之和是否大于最长的那条线段. 如果在三条边中不能确定哪一条边是最长边，那就必须注意到第三边不但要小于其它两边之和，还要大于其它两边之差，于是有 $8-3<1-2a<8+3$，解这个不等式组，得 $-5<a<-2$.

如果这个三角形是等腰三角形，那么 $1-2a=3$ 或 $1-2a=8$，当 $1-2a=3, a=-1$，三边长为 $3,3,8$. 但长度为 $3,3,8$ 的三条线段不能组成三角形. 所以，$1-2a=3$ 不能成立，只有 $1-2a=8, a=-\frac{7}{2}$，此时，等腰三角形三条边长为 $3,8,8$.

例 5 三角形中的一个角是第二个角的 2 倍，第三个角比这两个角的和还大 $12°$，求这三个角的度数.

分析：因为三角形的三个内角和是 $180°$，而题设中的三个内角之间又具有一定的数量关系，因此可以用代数的方法列出相应的等式，这是几何计算题中常用的方法.

解：设第二个角的度数为 x，则另外两个角的度数分别是：$2x, 2x+x+12$. 由三角形内角和定理：$2x+x+(2x+x+12)=180$，解得 $x=28$，所以三个角分别为 $28°, 56°, 96°$.

全等三角形涉及两个三角形的合同关系，“对应”的思想

贯穿全等三角形这一单元的始终，学会寻找全等三角形的对应部分(对应顶点，对应角，对应边，对应线段)是学习和应用全等三角形的重要基础.

例 6 (如图 3-1)，$\triangle ABE \cong \triangle ACD$，$AB=AC$，写出两个全等的三角形中的对应角与对应边，并问图中是否存在其它的全等三角形.

分析：由 $AB=AC$，则 AB 和 AC 是对应边，$\angle AEB$ 和 $\angle ADC$ 是对应角. 又 $\angle A$ 是这两个三角形的公共角，它与其自身对应，因而 BE 和 CD 是对应边. 于是剩下的 $\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角；AE 和 AD 是对应边.

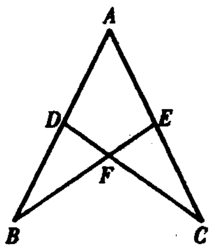

图 3-1

由于 $AB=AC$，$AD=AE$，$\therefore AB-AD=AC-AE$，即 $BD=CE$，又由 $\angle B=\angle C$，$\angle DFB=\angle EFC$，于是构成一对全等三角形 $\triangle BFD$ 和 $\triangle CFE$.

利用两个三角形的公共边或公共角寻找对应关系，推得

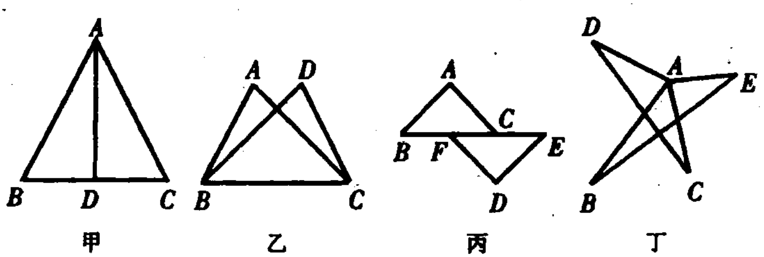

图 3-2

新的等量因素是寻找两个三角形全等的重要途径之一. 如图

3-2(甲)中的 AD,图(乙)中的 BC 都是相应三角形的公共元素. 而在图(丙)中,如有 $BF=CE$,利用公有的线段 FC,就可以推出 $BC=EF$,在图(丁)中,如有 $\angle DAB=\angle CAE$,就能推出 $\angle DAC=\angle BAE$.

寻找全等三角形对应元素的另一途径是利用:全等三角形的两个对应角所夹的边是对应边,两条对应边所夹的角是对应角.

例 7 如图 3-3,$\triangle ABD\cong\triangle ACE$,且 $AB=AC$,$\angle ABD=\angle ACE$,寻找两全等三角形的对应边与对应角.

分析:由 $AB=AC$,则 AB 和 AC 的对角 $\angle D$ 和 $\angle E$ 是对应角,$\angle D$ 和 $\angle ABD$ 的夹边 BD 与 $\angle E$ 和 $\angle ACE$ 的夹边 CE 是对应边,剩下的 AD 和 AE,$\angle BAD$ 和 $\angle CAE$ 分别是对应边和对应角.

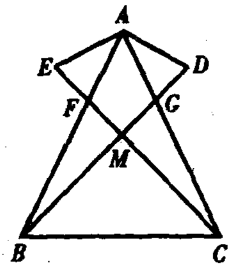

图 3-3

二、全等三角形论证的基本方法

全等三角形的论证,是研究图形性质的重要工具,是进一步学习平面几何知识的基础. 这是因为,研究图形的性质,往往要从研究图形中的线段相等关系或角的相等关系入手. 发现和论证全等三角形正是研究这些关系的基本方法. 另一方面,论证全等三角形又是训练推理论证的起始,是培养逻辑推理能力的关键一环.

三角形全等的证明的基本模式是:

$$\boxed{\text{题设} \xrightarrow{\text{全等判定}} \triangle_1\cong\triangle'_1}$$

具体的可以分为四步基本格式,下面通过一个例题进行

具体的操作.

例 8 (图 3-4)$AD=AE$,点 D,E 在 BC 上,$BD=CE$,$\angle 1=\angle 2$,求证:$\triangle ABD\cong\triangle ACE$.

分析:已知条件中已经给出了 $AD=AE,BD=CE$,要证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$,只需证明 AD 与 BD,AE 与 EC 的夹角相等,根据 SAS 公理就可以得出结论. 通过分析,我们就可以写出推理的四步格式:

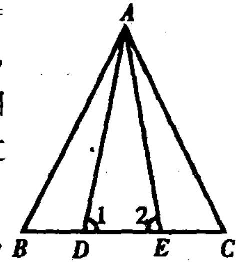

图 3-4

(i)证明三角形全等需要有三个条件,三个条件中如有需要预先证明的,应预先证出. 例如:

$\because\quad \angle 1=\angle 2$,(已知),

$\angle ADB=180^\circ-\angle 1$,$\angle AEC=180^\circ-\angle 2$(补角定义),

$\therefore\quad \angle ADB=\angle AEC$(等量关系).

(ii)写出在哪两个三角形中证明全等,格式如:

"在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 中"(书写时必须把表示对应顶点的字母写在对应的位置上).

(iii)按边、角、边顺序列出三个条件,用大括号合在一起,并写出推理的根据,格式如

$$\begin{cases} AD=AE(\text{已知}), \\ \angle ADB=\angle AEC(\text{已证}), \\ BD=CE(\text{已知}), \end{cases}$$

(iv)写出结论,格式如:

$\therefore\quad \triangle ABD\cong\triangle ACE(SAS)$.

在平面几何中,证明两条线段相等,两个角相等,两条直线互相平行,两条直线互相垂直等问题,常常可以通过证三角

形全等来解决，而且在整个证明过程中往往要完成多次的三角形全等的证明. 如果需要进行多次的全等三角形证明，可以按以下结构进行：

$$\text{题设} \xrightarrow{\text{全等判定}} \triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{I}' \xrightarrow{\text{全等性质}} \text{中间条件} \xrightarrow{\text{全等判定}} \triangle \mathrm{II} \cong \triangle \mathrm{II}' \xrightarrow{\text{全等性质}} \text{结论}.$$

例 9 (如图 3-5)已知：AB，CD 互相平分于 O 点，过 O 点引直线与 AD，BC 分别交于 E，F 点.

求证：$AE=BF$.

分析：分析证明的思路，可以按两个方向进行：

(i)从已知条件出发，根据已知条件，已经可以证明哪几对三角形全等？由此可以得出哪些线段或角相等？能由此得到求证的结论吗？

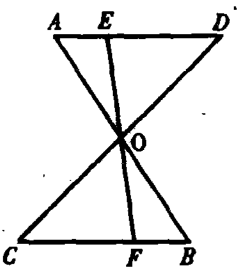

图 3-5

在本题中，根据已知条件，$AO=BO$，$\angle AOD=\angle BOC$，$DO=CO$，很快可以用(SAS)公理证得$\triangle AOD\cong\triangle BOC$，于是根据全等三角形的性质可以得到 $AD=BC$，$\angle A=\angle B$，$\angle D=\angle C$ 的结论. 考虑到最终证明的结论，从这三个中间结果中选择最有效的转为新的三角形全等的条件. 由于 AE 与 BF 分别处于$\triangle AOE$ 和$\triangle BOF$ 之中，于是选择$\angle A=\angle B$ 作为新的条件，用(SAS)公理证明$\triangle AOE\cong\triangle BOF$，最终得到结论.

(ii)根据求证目标，需证哪一对三角形全等；如果条件不够，能通过证另一对三角形全等提供条件吗？

在本题中，为了证明 $AE=BF$，最好能证明$\triangle AOE\cong$