

机械振动系统的 现代动态设计与分析

韩清凯 于涛 孙伟 编著



科学出版社
www.sciencep.com

机械振动系统的现代 动态设计与分析

韩清凯 于 涛 孙 伟 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书针对典型机械结构和设备所对应的机械振动系统,详细介绍了进行动态分析与动态设计所需要的主要理论与方法。包括经典振动与模态分析理论、减振理论与动力修改方法、非线性振动以及非线性系统的现代分析方法等方面的内容。首先介绍了机械振动的基本原理、机械结构计算模态和实验模态分析方法,其次分别叙述了机械系统减振理论及减振设计、机械结构动力修改的原理与方法,最后分别介绍了非线性振动的经典解析理论和非线性振动周期运动稳定性理论,以及分岔与混沌、非线性参数估计等现代非线性理论和方法的有关内容。本书还给出了多个实例,附有必要的计算程序。

本书可供从事机械振动分析和机械动态设计等专业的科技人员阅读,还可供相关领域的教师、研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动系统的现代动态设计与分析/韩清凯,于涛,孙伟编著. —北京:科学出版社,2010

ISBN 978-7-03-028363-4

I. 机… II. ①韩…②于…③孙… III. ①机械振动-机械系统-系统设计②机械振动-机械系统-系统分析 IV. TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 140766 号

责任编辑:汤 枫 王志欣 / 责任校对:何艳萍
责任印制:赵 博 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010 年 7 月第一次印刷 印张: 13 1/4

印数: 1—2 500 字数: 257 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

随着机械设备复杂程度的日益提高以及高速、重载、高精、轻巧等极端工作性能和使用性能要求的不断提出,机械结构与机械系统的振动分析和动态设计的理论与方法越来越重要。以典型机械结构和机械装备所对应的机械振动系统为对象,如旋转机械转子系统、汽车动力减振装置、多自由度机械臂等,以先进的振动分析与动态设计理论为基础,进行机械结构和机械系统的分析、设计与优化,具有重要的理论和学术价值以及重要的工程实际意义。

现代机械动态设计及分析涉及产品设计方法学、振动理论、多体动力学、有限元、优化设计、非线性分析以及控制理论等多个领域的内容。目前,有关机械线性振动和非线性振动、动力有限元、减振理论等相关领域的教材著作和资料文献十分丰富。多年以来,作者从事机械结构与系统的振动分析和动态设计的理论基础与工程应用的科研工作,对机械线性振动和非线性振动分析的基本理论与方法、模态分析与动力修改、分岔与混沌等有深刻理解。同时,对于具有广泛代表意义的振动系统,以振动理论为核心,进行动态分析与动态设计,是十分重要而复杂的工作,许多科研工作者也需要这些方面的专门知识。为此,作者综合振动和非线性振动理论,总结所在团队近年的科研成果和经验,完成了既强调基础性又体现先进性且涉及面较广的《机械振动系统的现代动态设计与分析》一书。

本书前半部分介绍了经典线性振动理论,叙述了计算模态分析和实验模态分析的理论与方法,对机械减振理论及其工程应用进行了介绍。后半部分则分别介绍了非线性振动的解析分析方法、非线性振动系统的周期运动稳定性理论、非线性系统的分岔与混沌以及参数估计等内容。书中各章均列举具有代表性的示例和应用分析实例,并附有必要的计算程序。

本书共分9章。第1章机械振动基本理论,介绍了单自由度与多自由度振动系统分析的基础理论知识;第2章围绕计算模态分析,分别介绍了基于有限元法的机械结构系统的模态方程、固有特性和振动响应的求解方法等内容;第3章介绍了实验模态分析的基本理论、过程与算法;第4章以发动机悬置元件的减振分析和动态优化设计为例,介绍了动态设计中的减振理论及其设计方法;第5章介绍了动态设计中重要的机械结构动力修改和灵敏度分析的原理及典型应用;第6章~第9章,分别介绍了非线性振动系统的解析分析方法、周期运动及其稳定性、分岔与混

沌理论,以及 Lyapunov 指数、分形维数、近似熵、复杂度等非线性参数的估计与预测方法。

本书得到了国家高技术研究发展计划(863 计划)项目(2007AA04Z418)、国家自然科学基金项目(50775028、10402008)、辽宁省教育厅科技研究项目以及教育部新世纪优秀人才支持计划项目、东北大学“985”工程科技创新平台建设项目的支持。韩清凯教授、于涛博士、孙伟博士共同进行全书的撰写,姚红良博士、翟敬宇博士等也参加了部分内容的撰写和整理,项目组其他成员也给予了大力支持。在撰写过程中,我们还得到了许多同行专家的大力支持和帮助。作者还特别对所在科研团队学术带头人、中国科学院院士闻邦椿教授表示衷心感谢。

由于作者水平所限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正。

韩清凯

2010 年 5 月

目 录

前言

| | |
|---------------------|----|
| 第 1 章 机械振动基本理论 | 1 |
| 1.1 单自由度振动系统分析 | 1 |
| 1.1.1 单自由度系统的自由振动 | 2 |
| 1.1.2 单自由度系统的受迫振动 | 4 |
| 1.2 多自由度振动系统分析 | 7 |
| 1.2.1 多自由度振动系统的运动方程 | 7 |
| 1.2.2 固有频率、主振型和方程解耦 | 8 |
| 1.2.3 多自由度系统的受迫振动 | 10 |
| 1.3 线性振动分析实例 | 11 |
| 参考文献 | 13 |
| 第 2 章 计算模态分析 | 15 |
| 2.1 引言 | 15 |
| 2.2 机械结构系统的动态有限元方程 | 16 |
| 2.2.1 单元的动力学方程 | 16 |
| 2.2.2 机械结构的动力学方程 | 18 |
| 2.2.3 机械结构模态分析的基本方程 | 18 |
| 2.3 机械结构固有特性的求解方法 | 19 |
| 2.3.1 广义 Jacobi 法 | 20 |
| 2.3.2 逆迭代法 | 20 |
| 2.3.3 Rayleigh 商迭代法 | 21 |
| 2.3.4 Sturm 序列对分法 | 21 |
| 2.3.5 行列式搜索法 | 21 |
| 2.3.6 子空间迭代法 | 22 |
| 2.4 机械结构振动响应的求解方法 | 24 |
| 2.4.1 振动响应的振型叠加法 | 25 |
| 2.4.2 振动响应的时域积分法 | 26 |
| 2.5 机械结构计算模态分析实例 | 28 |

| | |
|------------------------------|-----------|
| 参考文献 | 41 |
| 第 3 章 实验模态分析 | 42 |
| 3.1 引言 | 42 |
| 3.2 频率响应函数与模态参数 | 43 |
| 3.2.1 实模态分析 | 44 |
| 3.2.2 复模态分析 | 45 |
| 3.2.3 实模态系统频率响应函数的留数表示 | 48 |
| 3.3 实验模态分析的基本过程 | 49 |
| 3.3.1 结构激振 | 49 |
| 3.3.2 数字信号采集与处理 | 50 |
| 3.3.3 频率响应函数估计 | 51 |
| 3.3.4 模态参数识别 | 51 |
| 3.4 实验模态分析的算法程序 | 55 |
| 3.4.1 信号处理的实现 | 55 |
| 3.4.2 频率响应函数估计的实现 | 56 |
| 3.4.3 部分模态参数辨识的实现 | 56 |
| 3.4.4 模态振型拾取的实现 | 59 |
| 3.5 实验模态分析实例 | 60 |
| 参考文献 | 67 |
| 第 4 章 减振理论与减振设计 | 68 |
| 4.1 被动隔振的基本原理 | 68 |
| 4.2 被动消振的基本原理 | 70 |
| 4.2.1 阻尼消振的原理 | 70 |
| 4.2.2 动力消振的原理 | 72 |
| 4.2.3 冲击消振的原理 | 73 |
| 4.3 主动减振简介 | 74 |
| 4.4 发动机悬置元件的减振分析 | 76 |
| 4.4.1 橡胶材料本构关系的确定 | 76 |
| 4.4.2 橡胶悬置的有限元模型 | 78 |
| 4.4.3 橡胶悬置的应力分析 | 79 |
| 4.5 发动机悬置元件的减振优化设计实例 | 82 |
| 4.5.1 原悬置系统的能量耦合分析 | 82 |
| 4.5.2 发动机悬置系统的减振优化设计 | 85 |

| | |
|--------------------------------------|------------|
| 4.5.3 发动机减振效果的比较分析 | 88 |
| 参考文献 | 90 |
| 第 5 章 机械结构系统的动力修改 | 91 |
| 5.1 引言 | 91 |
| 5.2 结构动力修改的灵敏度分析 | 93 |
| 5.2.1 灵敏度分析的基本原理 | 93 |
| 5.2.2 结构的复模态灵敏度 | 94 |
| 5.3 结构动力修改的矩阵摄动迭代法 | 95 |
| 5.4 机械结构灵敏度分析实例 | 96 |
| 5.5 转子系统的灵敏度分析实例 | 98 |
| 5.5.1 无故障转子系统的灵敏度分析 | 98 |
| 5.5.2 碰摩转子系统的灵敏度分析 | 101 |
| 参考文献 | 103 |
| 第 6 章 非线性振动系统的解析分析 | 104 |
| 6.1 引言 | 104 |
| 6.2 单自由度弱非线性自治系统的渐近法 | 107 |
| 6.3 单自由度非自治非线性系统的渐近法 | 110 |
| 6.3.1 非共振情况 | 111 |
| 6.3.2 共振情况 | 114 |
| 6.3.3 简谐力作用的情况 | 115 |
| 6.4 多自由度弱非线性系统的渐近法 | 118 |
| 6.5 慢变参数非线性振动系统的渐近法 | 122 |
| 6.5.1 慢变参数非线性自治系统 | 122 |
| 6.5.2 慢变参数非线性非自治系统 | 123 |
| 6.6 非线性振动系统的解析分析实例 | 125 |
| 参考文献 | 128 |
| 第 7 章 非线性振动系统的周期运动及其稳定性 | 129 |
| 7.1 引言 | 129 |
| 7.2 非线性振动系统周期运动的求解方法 | 131 |
| 7.2.1 求解周期运动的 Newton 迭代法 | 131 |
| 7.2.2 确定 Newton 迭代初始值的延拓法 | 134 |
| 7.3 非线性振动系统周期运动的 Floquet 稳定性理论 | 135 |
| 7.3.1 Floquet 稳定性理论简介 | 135 |

| | |
|--------------------------------|------------|
| 7.3.2 数值算例 | 136 |
| 7.4 碰摩转子系统的周期运动稳定性分析实例 | 138 |
| 7.4.1 碰摩转子系统运动微分方程的建立 | 138 |
| 7.4.2 周期运动的稳定性分析方法 | 139 |
| 7.4.3 分析结果 | 140 |
| 参考文献 | 148 |
| 第8章 分岔与混沌 | 150 |
| 8.1 概述 | 150 |
| 8.2 分岔理论 | 152 |
| 8.2.1 分岔的基本概念 | 152 |
| 8.2.2 一维系统平衡点的静态分岔 | 153 |
| 8.2.3 高维系统平衡点的静态分岔 | 155 |
| 8.2.4 平衡点的动态分岔 | 157 |
| 8.3 含滞回环节的非线性振动系统的分岔分析实例 | 162 |
| 8.4 混沌理论 | 168 |
| 8.4.1 混沌的 Li-Yorke 定义 | 168 |
| 8.4.2 混沌分析的定性方法 | 170 |
| 8.5 几个经典的混沌系统实例 | 177 |
| 参考文献 | 183 |
| 第9章 非线性参数估计 | 184 |
| 9.1 Lyapunov 指数 | 184 |
| 9.2 分形维数 | 187 |
| 9.3 非线性预测 | 191 |
| 9.4 代替数据法 | 196 |
| 9.5 近似熵 | 198 |
| 9.6 复杂度 | 202 |
| 参考文献 | 204 |

第 1 章 机械振动基本理论

振动是指物体在其平衡位置附近所做的往复运动。机械设备的振动量如果超过允许范围,将产生较大的动载荷,从而影响其工作性能和使用寿命,严重时会导致加速导致零部件的失效。现代机械设备结构复杂,运动速度往往较高,振动的危害更为突出。另一方面,利用振动原理进行工作的机械设备,即振动机械,则需要有效地产生预期的振动。在机械工程中,除固体振动之外,还有流体振动以及固体和流体耦合振动等不同形式。

早在 17 世纪,荷兰物理学家 Huygens 首次提出单摆理论,并创制了机械摆钟。20 世纪初,人们关心的机械振动问题主要集中在避免共振上,研究的重点在于机械结构的固有频率和振型的确定。30 年代,机械振动的研究开始由线性振动发展到非线性振动。50 年代以来,研究由规则振动发展到用概率统计方法描述的随机振动。由于自动控制理论和电子计算机的发展,过去十分困难的多自由度系统的振动计算问题已经得到解决。振动理论及其实验技术是机械振动分析与机械动态设计的重要基础。

机械振动有不同的分类方法^[1]。按产生振动的原因可以分为自由振动、受迫振动和自激振动;按振动的规律可以分为简谐振动、非简谐周期振动和随机振动;按机械结构变形特征可以分为扭转振动和直线振动;按振动参数的分布特点可以分为离散系统的振动和连续系统的振动;按振动稳定性质可以分为稳定振动和非稳定振动;按振动参数随时间变化的性质可以分为定常振动和时变振动;按振动系统的本质特性可以分为线性振动和非线性振动等。

在许多情况下,工程实际中的振动系统大多可以近似地简化为线性系统来处理,其结构和性能参数一般不随时间变化,且多是微幅振动。

本章主要介绍单自由度和多自由度线性振动系统的基本概念和分析方法。

1.1 单自由度振动系统分析

许多机械结构系统可以简化为单自由度振动系统来分析,仍然可以得到满意的结果,如钟摆的振动、单盘转子的振动、机械的隔振等。单自由度振动系统分析还可以揭示振动系统的许多本质以及基本的研究方法。

单自由度振动系统只要用一个独立的坐标便可以描述其运动的形态(或运动

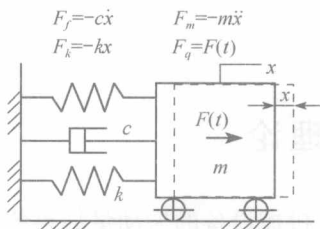


图 1.1 单自由度振动系统

规律),如图 1.1 所示。单自由度振动系统包括一个定向振动的质量、连接于振动质量与基础之间的弹性元件以及运动过程中所产生的阻尼。振动质量、弹簧刚度(使弹簧产生单位变形所需的力)和阻尼是振动系统的三个基本要素,当系统出现振动时,它们将相应地产生惯性力、弹性力和阻尼力。在线性振动系统中,惯性力、阻尼力和弹性力分别与加速度、速度及位移的一次方成正比。

在工程实际中,机械运转的阻尼总是存在的。阻尼主要来自于物体间表面摩擦力、空气或液体阻力、材料内摩擦力等。不同的设备和工作环境下,阻尼的性质也是有所区别的。黏性阻尼是指阻尼力大小与速度成正比、方向与运动方向相反的阻尼。

若在振动系统中加入持续作用的激振力,则该系统将产生持续的振动。根据达朗贝尔原理,在振动的每一个瞬时,惯性力、阻尼力、弹性力和外激振力的合力必然为零。若作用于此振动系统的激振力是周期变化的,则与此力相平衡的各组成力也是周期变化的。通常情况下,各个组成力有各自不同的相位。图 1.2 表示了位移、速度和加速度的矢量图,如图 1.2(a)所示的位移矢量 r 是以角速度 ω 沿逆时针方向旋转的,当以水平轴为起点计算时,经过时间 t 以后,矢量在纵轴上的投影为 x ,即 $x=r\sin\omega t$ 。图 1.2(b)表示了振动系统中不同的组成力之间的相位关系。

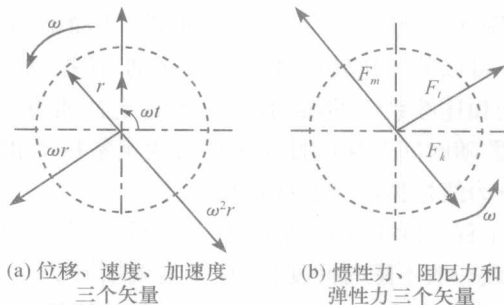


图 1.2 由旋转矢量的投影表示的简谐振动

1.1.1 单自由度系统的自由振动

如图 1.1 所示的单自由度系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{1.1}$$

式中, m 为振动物体的质量; k 为弹簧刚度; c 为阻尼系数; $F(t)$ 为外加激振力。当 $F(t)=0$ 且不考虑阻尼(即 $c=0$)时,上式变为无阻尼自由振动的方程

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.2)$$

对该二阶齐次常系数线性微分方程进行求解,可得

$$x = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (1.3)$$

或

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (1.4)$$

式中, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为振动系统的固有频率(角频率); $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 为振幅; $\varphi = \arctan \frac{A_1}{A_2}$ 为初始相位差。

对于初始条件 $t=0$ 时, $x=x_0, \dot{x}=v_0$ 的情况,单自由度振动系统的解为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (1.5)$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_n}{v_0} \quad (1.6)$$

如果考虑阻尼的影响,设 $2n = \frac{c}{m}$,式(1.1)可简化为

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1.7)$$

对于常见的欠阻尼状态或弱阻尼状态,即阻尼比 $\zeta < 1$ 的情形,其中 $\zeta = \frac{n}{\omega_n}$,上面的有阻尼振动系统自由振动的解为

$$x = Ae^{-nt} \sin(\omega_r t + \varphi) \quad (1.8)$$

可见,其运动是周期性的振动,式中所表示出来的有阻尼自由振动的固有频率为

$$\omega_r = \sqrt{\omega_n^2 - n^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.9)$$

有阻尼自由振动的振幅会随时间以指数形式衰减,例如某一系统的自由衰减振动如图 1.3 所示。有阻尼振动系统自由振动的振幅衰减的规律可用减幅率 η 表示,即两相邻振幅之比称为减幅率,即

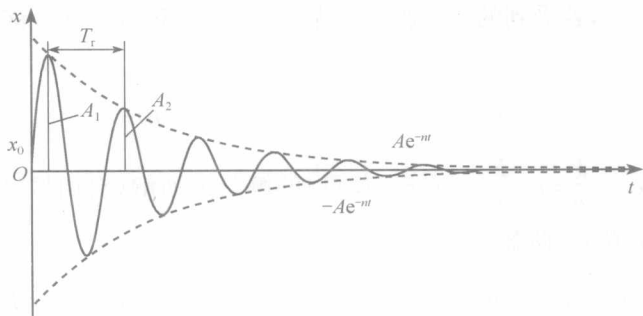


图 1.3 弱阻尼单自由度振动系统的减幅振动

$$\eta = \frac{A_m}{A_{m+1}} = \frac{Ae^{-m}}{Ae^{-n(t+T_r)}} = e^{nT_r} \quad (1.10)$$

【附注】如图 1.3 所示的有阻尼自由衰减振动的 MATLAB 计算程序。

该振动系统的微分方程为 $\ddot{x} + 0.2\dot{x} + x = 0$ 。设 $t=0$ 时, $x=0, \dot{x}=5$, 其自由振动解为 $x = 5.0252 \times e^{-0.1t} \times \sin(0.995t)$ 。所采用的 MATLAB 代码如下。

%m 为质量; c 为阻尼; k 为刚度; x0 为初始位移; v0 为初始速度; j 为阻尼比
%wn 为固有频率; wd 为圆频率; A 为振幅; f 为相角

m=1; c=0.2; k=1;

x0=0; v0=5;

j=c/(2*(m*k)^(1/2));

wn=(k/m)^(1/2);

wd=(1-j^2)^(1/2)*wn;

A=(x0^2+((v0+j*wn*x0)/wd)^2)^(1/2);

f=atan(wd*x0/(v0+j*wn*x0));

%

t=0:0.01:50;

x=A*exp(-j*wn*t).*sin(wd*t+f); y=A*exp(-j*wn*t);

z=-A*exp(-j*wn*t);

plot(t,x,t,y,t,z)

1.1.2 单自由度系统的受迫振动

振动系统受到外界动态作用力的持续作用时, 将产生受迫振动, 受迫振动就是系统对外力的响应。作用在系统上持续的激振力按其随时间变化的规律可以归为三类, 即简谐激振、非简谐周期性激振和任意力激振。这里仅讨论单自由度系统在简谐激振力作用下的受迫振动。

参考式(1.1), 若受到的简谐激振力为 $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \beta)$, 该系统的运动微分方程可化为

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = q \sin(\omega t + \beta) \quad (1.11)$$

式中, $n = \frac{c}{2m}$; $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$; $q = \frac{F_0}{m}$ 。方程(1.11)的解分为通解(自由振动项 x_1)和特解(稳态受迫振动项 x_2)两部分, 即

$$x = x_1 + x_2 = e^{-m}(C_1 \cos \omega_r t + C_2 \sin \omega_r t) + B \sin(\omega t + \beta - \theta) \quad (1.12)$$

若存在初始条件(当 $t=0$ 时), $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$, 则得到

$$\begin{aligned}
 x = & e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega_r t + \frac{nx_0 + v_0}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) \\
 & - B e^{-nt} \left[\sin(\beta - \theta) \cos \omega_r t + \frac{\omega \cos(\beta - \theta) + n \sin(\beta - \theta)}{\omega_r} \sin \omega_r t \right] \\
 & + B \sin(\omega t + \beta - \theta)
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

由于阻尼的存在,系统运动的自由振动随着时间的增长而逐渐消失,只剩下稳态的受迫振动项,即

$$x_2 = B \sin(\omega t + \beta - \theta) \quad (1.14)$$

式中

$$B = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\zeta^2 z^2}}; \quad \theta = \arctan \frac{2z\zeta}{1-z^2} \quad (1.15)$$

其中, δ_{st} 为静变形, $\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{q}{\omega_n^2}$; z 为频率比, $z = \frac{\omega}{\omega_n}$; ζ 为阻尼比, $\zeta = \frac{n}{\omega_n}$ 。

根据式(1.15)可以绘制出单自由度振动系统的幅频响应曲线和相频响应曲线。

幅频响应曲线与静变形 δ_{st} 、阻尼比 ζ 和频率比 z 有关,反映了这些参数与稳态响应振幅的关系。此外,由于阻尼的作用,稳态响应滞后于外部激励,两者相位差为 θ 角。 θ 角是阻尼比和频率比的函数,这种关系曲线是相频响应曲线。如图 1.4(a)所示为一典型的幅频响应曲线,图 1.4(b)所示为一典型的相频响应曲线。

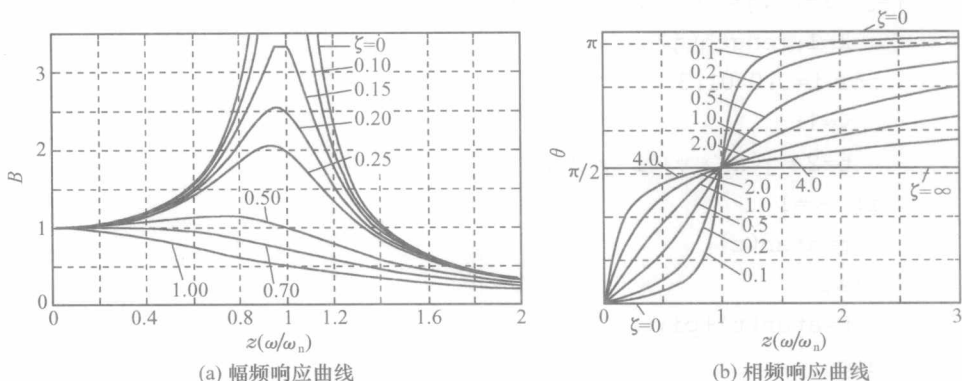


图 1.4 有阻尼单自由度振动系统的共振曲线

另外,在工程实际中,非简谐周期性激励的情形也十分常见。解决这类问题的方法是首先把周期性激励力展开成傅里叶级数,分解为若干与激励的基频成整数倍关系的简谐激励函数,然后逐项求解谐响应,最后利用线性叠加原理,把

谐响应叠加起来,即为该非简谐周期性激振的响应。除了周期性激振力外,还有冲击、瞬变等其他形式的复杂激振力作用。在复杂激振情况下,振动系统通常没有稳态振动而只有瞬态振动,可以采用杜哈美积分等方法求解,请参阅相关文献[2]和[3]。

【附注】 图 1.4 所示的幅频响应曲线和相频响应曲线的计算程序。

(1) 幅频响应曲线计算代码。

%Y 为频率比;B 为幅值;j 为阻尼比

```
Y=[];B=[];j=[0 0.1 0.15 0.2 0.25 0.5 0.7 1];
```

```
for k=1:length(j)
```

```
    for i=0:0.01:2
```

```
        y=i;
```

```
        b=1/(((1-y^2)^2+(2*j(k)*y)^2)^(1/2));
```

```
        B=[B;b];
```

```
        Y=[Y;y];
```

```
    end
```

```
plot(Y,B);axis([0 2 0 4]);hold on;
```

```
Y=zeros();B=zeros();
```

```
end
```

(2) 相频响应曲线计算代码。

%Y 为频率比;F 为相角;j 为阻尼比

```
Y=[];F=[];j=[0.1 0.2 0.5 1.0 2.0 4.0];
```

```
for k=1:length(j)
```

```
    for i=0:0.01:3
```

```
        y=i;
```

```
        t=2*j(k)*y/(1-y^2);
```

```
    if i<=1
```

```
        f=atan(t);
```

```
    else
```

```
        f=atan(t)+pi;
```

```
    end
```

```
        F=[F;f];
```

```
        Y=[Y;y];
```

```
    end
```

```
plot(Y,F);axis([0 3 0 pi]);hold on;
```

```
Y=zeros();F=zeros();
```

```
F=zeros();
end
```

1.2 多自由度振动系统分析

在工程实际中,很多情况下需要把机械结构系统简化为多自由度振动系统。多自由度系统的主要内容是固有特性分析和响应分析^[4~10]。

1.2.1 多自由度振动系统的运动方程

多自由度系统运动方程的建立方法主要包括三种:牛顿运动定律、达朗贝尔原理和拉格朗日方程,可以根据实际情况选用。

如图 1.5 所示的三自由度弹簧质量系统,利用牛顿运动定律直接分析各质体的受力情况,写出其运动方程

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = f_1 - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = f_2 - k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) \\ m_3 \ddot{x}_3 = f_3 - k_3 (x_3 - x_2) \end{cases} \quad (1.16)$$

式(1.16)用矩阵表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.17)$$

式中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, $\ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3]^T$, $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]^T$ 分别为位移向量、加速度向量和外激励向量; \mathbf{M} 为质量矩阵,可表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

\mathbf{K} 为刚度矩阵,可表示为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

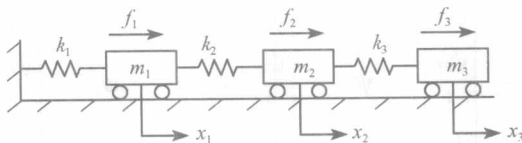


图 1.5 三自由度的弹簧质量系统

由三自由度振动系统可以推广到 n 个自由度的情形。 n 自由度振动系统的运动方程有如下形式:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

1.2.2 固有频率、主振型和方程解耦

(1) 固有频率。

式(1.20)所表示的 n 自由度振动系统,它所对应的无阻尼自由振动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (1.21)$$

设上式的解的形式为

$$x_i = X_i \sin(\omega t + \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.22)$$

代入式(1.21),消去 $\sin(\omega t + \alpha)$,可得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{X} = 0 \quad (1.23)$$

式(1.23)中的系数矩阵称为方程(1.21)的特征矩阵。此代数方程具有非零解的条件是其系数矩阵行列式等于零,即

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (1.24)$$

由式(1.24)可以得到 ω^2 的 n 次代数方程式,对其求解可以得到 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$,即为原系统的 n 个固有频率。

(2) 主振型。

将已求得的第 i 阶固有频率代入方程(1.23),可以求出 n 个振幅间的比例关系,它们构成了系统的振动形态,称之为第 i 阶主振型或固有振型。固有振型是一组振幅间的相对值。规定主振型中最大的一个坐标幅值为 1,进而确定其他各坐标的相对幅值,这种经过归一化处理后的特征向量称为振型向量。对应于 n 个固有频率的各个振型向量分别记为

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \vdots \\ \psi_{n1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2 = \begin{bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \\ \vdots \\ \psi_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{\psi}_n = \begin{bmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \vdots \\ \psi_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

将所有振型向量按列排列,可得到 $n \times n$ 阶振型矩阵(或称为模态矩阵)