

TURING

图灵新知

Is God a Mathematician?

# 数学沉思录

## 古今数学思想的发展与演变

[美] Mario Livio 著  
黄征 译



- 《华盛顿邮报》2009年最佳图书
- 鲍德斯书店2009年原创之声获奖图书

人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知

Is God a Mathematician?

# 数学沉思录

## 古今数学思想的发展与演变

[美] Mario Livio 著  
黄征 译



人民邮电出版社  
北京

## 图书在版编目(CIP)数据

数学沉思录：古今数学思想的发展与演变 / (美) 李维 (Livio, M.) 著；黄征译. -- 北京：人民邮电出版社，2010.8

(图灵新知)

书名原文：Is God a Mathematician?

ISBN 978-7-115-23204-5

I. ①数… II. ①李… ②黄… III. ①数学史—世界—普及读物 IV. ①O11-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第122116号

## 内 容 提 要

数学无处不在，无所不能。它渗透在所有领域，能解释宇宙万物，完全超越了人类的能力。本书按照数学关键概念的演化过程来组织结构，引经据典地从哲学角度全方位阐释数学的本质，以及数学和我们的物质世界、人类思维之间的关系。其间，传奇的历史人物和神秘的古老传说让深奥的哲学论证趣味横生。

本书适合所有对数学感兴趣的读者阅读。

图灵新知

## 数学沉思录：古今数学思想的发展与演变

---

◆ 著 [美] Mario Livio

译 黄 征

责任编辑 傅志红

执行编辑 谢灵芝

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号

邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn

网址 <http://www.ptpress.com.cn>

北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：880×1230 1/32

印张：9.5

字数：245千字

2010年8月第1版

印数：1-3 500册

2010年8月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2009-3807号

ISBN 978-7-115-23204-5

---

定价：35.00元

读者服务热线：(010)51095186 印装质量热线：(010)67129223

反盗版热线：(010)67171154

# 版 权 声 明

Chinese translation copyright © 2010 by Posts & Telecom Press.

Original English language edition Copyright © 2009 by MARIO LIVIO.  
Simplified Chinese characters edition arranged with SIMON & SCHUSTER  
INC. through BIG APPLE TUTTLE-MORI AGENCY, LABUAN, MALAYSIA.

本书中文简体字版由Simon & Schuster Inc.授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

版权所有，侵权必究。

## 译者序

毫无疑问，数学是复杂的，以致于有太多的数学家感叹道：“数学是上帝书写宇宙的语言！”但是，毋庸置疑，数学又是重要的，现代科学发展的基石就是数学，甚至一门学科与数学联系的紧密程度可以代表该学科的发展水平。然而，即使在今天，对于究竟什么是数学这样一个看似简单的问题，我们仍然无法给出明确答案。数学王国是一个独立存在于宇宙之中，我们仅仅只能窥视一角的真实世界？如果是这样的话，数学家们所有的付出只是为了发现这个世界的奥秘。抑或数学是人类智慧与文明璀璨王冠上那颗最光彩夺目的明珠，数学的发展可以视为人类一种纯粹的思维上的智力活动？自从古希腊时代，这个问题使那些最优秀、最聪明的头脑困惑不已，包括毕达哥拉斯、柏拉图、阿基米德、伽利略、笛卡儿、牛顿、高斯、布尔、哥德尔……，每当我们自以为已经找到了答案时，就会有新的例子证明我们也许错了，唯一可以肯定的是，这个名单还会继续下去。

Mario Livio 本人是一位数学史学家，也是一位天体物理学家。在这本书里，他以一种非常宽广的历史视角，从数学与逻辑（人类思维）的联系等不同角度，深入研究了数学的本质、数学本身的发展、数学与哲学的关系。在这个探索与发现的旅途上，作者旁征博引，恣意纵横，通过大量的原始资料，让你可以在轻松的状态下了解到一个有声有色的数学世界，以及过去我们知之甚少的数学家的另外一面，最终，启发你得出自己的答案。正是作者深厚的学术素养、严谨的研究风格、活泼的写作方式，使得这本书在全美畅销书排行榜上占据了一席之地。

## 2 | 数学沉思录：古今数学思想的发展与演变

本书的写作切入角度非常独到，语言也十分活泼，本人在翻译过程中一直努力将作者的原意体现出来，但是由于水平所限，可能无法完全达到这一目的，诚为憾事。

黄征

2010年4月10日

## 前言

如果你从事的是宇宙学研究，那么每周都可能收到一些人的信件、电子邮件或传真，描述他们自己关于宇宙的理论（没错，这些人都是男性）。如果你礼节性地回信说自己想要了解更多的话，就会犯下大错：无穷无尽的信息将接踵而至，把你淹没。应当如何阻止这种“攻击”呢？根据我的经验，我发现了一个特别有效的招数（与根本不回信的粗鲁方式相比，这种方式可有礼貌多了），那就是告诉他们，如果该理论无法精确地用数学语言表达，就不可能评估它的意义。这种回应会令绝大多数业余宇宙论爱好者立刻停下脚步。事实也的确如此，如果没有数学，现代宇宙学家根本无法在理解自然法则方面有所进展，哪怕只是前进一小步。数学提供了能把任何关于宇宙的理论联系在一起的可靠的“脚手架”。这句话听上去可能不那么令人惊讶，那是因为你还没有意识到数学自身的本质在今天仍然不是完全清楚。正如英国哲学家迈克尔·达米特（Michael Dummett）爵士曾经指出的：“哲学和数学这两门最抽象的学科都引发出了同样的疑问：它们是关于什么的？”这种困惑不仅仅是出于无知，甚至数学家和哲学家们都发现很难给出确切的答案。

在本书中，我试图澄清两个方面的问题：数学的本质，以及数学和我们观察到的世界之间关系的本质。本书肯定不是一本包罗万象的数学史，而是按数学中的一些关键概念在历史上的演化过程来组织结构的，这些概念可以有效帮助我们认识数学在解释宇宙时的重要性。

长期以来，很多人都为本书写作提供了直接或间接的帮助，促成了书中很多观点的形成。我要感谢迈克尔·阿蒂亚（Michael Atiyah）爵士、

戈尔·德瓦利 (Gia Dvali)、弗里曼·戴森 (Freeman Dyson)、希勒尔·盖斯曼 (Hillel Gauchman)、戴维·格罗斯 (David Gross)、罗杰·彭罗斯爵士 (Roger Penrose)、马丁·里斯勋爵 (Martin Rees)、拉曼·桑卓姆 (Raman Sundrum)、麦克斯·泰格马克 (Max Tegmark)、史蒂文·温伯格 (Steven Weinberg)、史蒂芬·沃尔夫拉姆 (Stephen Wolfram) 等人，与他们的交流使我获益良多。我要特别感谢多瑞斯·摩根斯坦·托马斯 (Dorothy Morgenstern Thomas)，他允许我使用奥斯卡·摩根斯坦 (Oscar Morgenstern) 关于库尔特·哥德尔 (Kurt Gödel) 在美国移民归化局的经历的全部报道。我要感谢威廉·克里斯滕森-巴里 (William Christens-Barry)、凯斯·诺里斯 (Keith Knox)、罗杰·伊斯顿 (Roger Easton)，特别是威尔·诺埃尔 (Will Noel)，他们向我提供了破译阿基米德手稿的许多细节信息。还有劳拉·加尔博利诺 (Laura Garbolino)，他给了我一些十分重要同时也极为珍贵的数学史研究资料。我还要感谢约翰·霍普金斯大学、芝加哥大学和法国巴黎国家图书馆的收藏部门，他们找来的一批珍稀的手稿对我的写作帮助很大。

我非常感谢斯坦福纳·凯斯特纳 (Stefano Casertano)，他为我翻译了许多难以理解的拉丁文献。我还要对伊丽莎白·弗雷泽 (Elizabeth Fraser) 和吉尔·莱格斯都 (Jill Lagerstrom) 表达谢意，她们为我提供了极宝贵的目录索引和语言文字上的支持 (她们永远都是面带微笑)。

特别感谢莎郎·图兰 (Sharon Toolan)，她为本书的付印提供了专业的帮助，还有安妮·菲尔德 (Ann Feild)、克瑞丝塔·沃尔德 (Krista Wildt) 和史黛丝·班尼 (Stacey Benn)，他们帮我绘制了书中的部分图表。

每位作者可能都会认为自己十分幸运，能得到爱人持续的支持和理解，我也不例外。在本书写作的那段时间里，我的妻子苏菲亚 (Sofie) 以极大的耐心给予我源源不断的支持。



最后，我还要感谢我的经纪人苏珊·瑞宾奈尔 (Susan Rabiner)，没有她的鼓励，这本书也许永远不会出现。我还要向本书编辑鲍伯·班德 (Bob Bender) 表达深深的谢意，他仔细阅读了书稿，并给出了富有洞察力的评论。约翰娜·李 (Johanna Li) 也为本书出版给予了许多帮助。还有罗瑞塔·丹娜 (Loretta Denner) 和艾米·莱恩 (Amy Ryan) 在文字编辑方面，维多利亚·梅耶 (Victoria Meyer) 和凯蒂·葛林奇 (Katie Grinch) 在宣传方面都做了大量工作。此外，Simon & Schuster 公司的生产和市场营销团队也为本书面世付出了辛勤的汗水。

# 目 录

<b>第 1 章 神秘的数学</b> .....	1
发现还是发明 .....	7
<b>第 2 章 神秘学：命理学家和哲学家</b> .....	15
毕达哥拉斯 .....	16
进入柏拉图的洞穴 .....	31
<b>第 3 章 魔法师：大师和异端</b> .....	44
给我一个支点，我将撬起地球.....	48
阿基米德重写稿 .....	58
《方法论》 .....	62
阿基米德最优秀的学生.....	67
星际信使 .....	70
自然之书 .....	79
科学和神学 .....	86
<b>第 4 章 魔法师：怀疑论者和巨人</b> .....	93
一个梦 .....	94
一位现代人 .....	100
纽约市地图上的数学问题.....	102
那儿有光 .....	109
我开始思考月亮上的引力.....	114
《原理》 .....	117
牛顿和笛卡儿的数学家上帝.....	124

2 | 数学沉思录：古今数学思想的发展与演变

<b>第 5 章 统计学家和概率学家：不确定的科学</b> .....	127
超越死亡和税捐的可能性 .....	134
平均人 .....	142
靠碰运气取胜的游戏 .....	149
事实和预测 .....	154
<b>第 6 章 几何学家：未来的冲击</b> .....	162
欧几里得“真理” .....	162
奇异的新世界 .....	167
空间、数学和人类 .....	175
<b>第 7 章 逻辑学家：思考推理的人</b> .....	185
逻辑和数学 .....	187
思维的法则 .....	192
罗素的悖论 .....	201
类似非欧几何的危机再次重演了吗 .....	206
不完全的真理 .....	208
<b>第 8 章 无理由的有效性</b> .....	218
纽结 .....	218
生命之结 .....	230
宇宙是在一根弦上吗 .....	233
重要的精确性 .....	235
<b>第 9 章 人类大脑中的数学和宇宙</b> .....	243
形而上学、物理学和认知学 .....	246
发现和发明 .....	252
你能说数学语言吗 .....	257
维格纳的难题 .....	260
<b>注解</b> .....	272

# 第 1 章

## 神秘的数学

几年前，我在康奈尔大学发表演讲时，我的幻灯片中有一个标题是：“上帝是数学家吗？”当这个标题刚投影出来时，我听到坐在前排的一个学生倒吸了一口凉气：“天啊，我可不希望这样。”

这个一语惊人的问题，并不代表我打算从哲学上来定义上帝，也不是用来恐吓那些讨厌数学的人们的。事实上，我只是提出了一个谜，这个谜曾令那些最富有创新精神的先贤们苦苦思索了几个世纪：数学无处不在、无所不能。这些正是会让人们联想到神的特性。正如英国物理学家詹姆斯·琼斯<sup>[1]</sup>（James Jeans, 1877—1946）曾指出的：“宇宙似乎是由一位理论数学家设计的。”数学似乎不仅是描述和解释整个宇宙最有效的工具，而且可以用来解释最复杂的人类活动。

今天，无论是物理学家试图创立一种关于宇宙的新理论，股票市场分析员苦苦思索以预测下一轮股市暴跌，神经生物学家构建大脑功能模型，还是军事情报专家优化各种军事资源配置，他们都要使用数学。而且，即使他们在形式上发展出了数学的不同分支，在基础研究中他们依然需要求助于通用、一致的数学基本理论。是什么赋予数学如此令人难以置信的力量？或者，正如爱因斯坦<sup>[2]</sup>曾经惊叹的：“数学，这个独立于人类经验存在的人类思维产物，怎么会如此完美地与物理现实中的物质相一致？”

这种困惑并非一件新鲜事。一些古希腊哲学家，特别是毕达哥斯拉

和柏拉图学派的，已经清晰认识到了数学在形成和支配宇宙方面所具有的能力，并对之怀有深深的敬畏之心。他们发现（数学的）这种能力似乎真实存在，而且超越了人类改变、引导和影响它的能力。英国政治哲学家托马斯·霍布斯（Thomas Hobbes, 1588—1679）毫不掩饰他对此能力的崇敬之情。在他的《利维坦》（*Leviathan*）一书中，霍布斯关于社会和政府基础的阐述给人留下了深刻印象。他选择几何学作为理性论证的范例<sup>[3]</sup>。

可以看到，真理存在于把各种名称正确排序后所组成的断言中，因此，追求严谨真理的人需要记住他所使用的每个名称的含义，并把它们正确地排列好，否则就会发现自己绕在了文字表述中，就好像一只陷在椴树枝中的小鸟，挣扎得越厉害，就越不能自拔。为此，在几何学中（这是迄今为止唯一令上帝满意并恩赐给人类的学问），人们首先确定名称的含义（这种含义称为“定义”），并且把它们作为认知的起点。

上千年来给人以深刻印象的数学研究和广博的哲学思考，都没有真正解释清楚数学力量的奥秘，甚至可以说，在某种意义上，数学的这种神秘感又加剧了。比如，著名的牛津数学物理学家罗杰·彭罗斯（Roger Penrose）意识到，人类周围并不是仅有 1 个世界，而应该有 3 个神秘世界。按彭罗斯的划分<sup>[4]</sup>，这 3 个世界是：意识感知的世界、物理现实的世界和数学形式的柏拉图世界。第一个世界是我们所有精神影像的家园，包括我们看到自己孩子笑脸时的欢欣愉悦、欣赏落日余晖壮美景色的心旷神怡，或者观察怵目惊心的战争场面时的恐惧和憎恶。在这个世界中还包括爱、忌妒、偏见、害怕，以及我们欣赏音乐、闻到美食时的感觉。第二个世界就是我们日常所提到的物理现实世界，包括鲜花、阿斯匹林药片、白云、喷气式飞机，还有星系、行星、原子、狒狒的心脏、

人类的大脑，这些真实存在的东西构成了这个世界。第三个世界是数学形式的柏拉图世界，这里是数学的家园，对彭罗斯而言，和精神世界和物理世界一样，这个世界也是真实存在的。这里有自然数 1、2、3、4……，欧几里得几何学所有图形和定理、牛顿运动定律、弦论、突变论，以及研究股票市场行为的数学模型等。彭罗斯还观察到了这 3 个世界之间神秘相联的 3 种现象。首先，物理世界的运行似乎遵循着一定的法则，而这些法则真实存在于数学世界中。这也令爱因斯坦感到困惑。诺贝尔物理学奖得主尤金·维格纳（Eugene Wigner, 1902—1995）也有同样的疑惑<sup>[5]</sup>：

数学语言适于表达物理法则，这种神奇是上天赐予我们的绝妙礼物。事实上我们并未真正理解这份礼物，同时也受之有愧。我们应当感谢这份礼物，希望在未来的研究中它仍然有效，而且继续扩展以拓展人类认识，无论这是好是坏，也无论这带给我们的是欢乐还是困惑。

其次，人类洞察性思维本身——我们主观认知能力的源泉——似乎来自于物理世界。思维究竟是如何从物质中产生的？我们是否能够将思维的工作机理上升为一种理论，如同今天的电磁场理论那样条理清晰、令人信服？最后，这 3 个世界神秘地联到一起，形成了一个闭合的圆。通过发现或创造抽象的数学公式和概念，并将它们清晰地表达出来，洞察性思维才得以奇迹般地进入数学王国之中。

彭罗斯并未给出任何关于这 3 个世界神秘现象的解释。实际上，他的结论非常简洁：“毫无疑问，并不真正存在 3 个世界，而是只有 1 个世界。并且直到目前为止，对于这个真实世界的本质，我们对它的认识甚至连肤浅也谈不上。”与戏剧《四十年来》（*Forty Years On*，由英国作家艾伦·贝内特创作）中的那位教师回答类似的问题相比，彭罗斯的回答

可谓谦逊而坦白。下面即是那位教师的回答。

福斯特 (Foster): 先生, 我仍然对 ( 圣父、圣灵、圣子 ) 三位一体的说法有点困惑。

教师: 三合为一, 一分为三, 非常直接, 如果有任何疑问就去请教你的数学老师。

这个谜题甚至比我刚才提到的那个更错综复杂。利用数学成功解释我们周围的世界 ( 维格纳称之为 “ 数学无理由的有效性 ” ), 实际上可以从两个方面去认识, 它们都同样令人惊奇。第一, 是其 “ 主动 ” 的一面。当物理学家在自然的迷宫里迷失方向时, 数学会为他们照亮前方的道路, 他们使用和创造的工具、建立的模型, 和他们所期望得到的解释, 所有这些都离不开数学。显然, 这本身就是一个奇迹。牛顿观察到落地的苹果、月亮、海滩上的潮汐 ( 我不是很确信他是否真正看见了 ), 不过他所看到的可都不是数学方程式。但是牛顿却从这些自然现象中抽象、总结出了清晰、简洁和精准的数学规律。同样, 苏格兰物理学家麦克斯韦 ( 1831—1879 ) 在 19 世纪 60 年代拓展了经典物理学范畴。他仅仅使用 4 个数学公式, 就解释了所有已知的电磁学现象。可以想象, 电磁学和光学实验通常充斥着大量细节性信息, 数据量十分巨大, 以前都需要用大量篇幅才能归纳和解释所有这些现象和结论, 但现在只需要 4 个简洁的方程式! 爱因斯坦的广义相对论更使人惊叹, 它是极度精确与自相一致的数学理论中的一个完美范例, 这个理论所揭示的正是如时空结构一类的基础事物。

除了 “ 主动 ” 的一面外, 数学神秘的效应中还包括 “ 被动 ” 的一面, 它甚至令前者黯然失色, 这可能让你十分惊讶。数学家研究探索数学概念以及各种概念之间的关系时, 有时仅仅是出于理论研究的目的, 绝对没有考虑过理论的实用性问题。但是在几十年后 ( 有时甚至是几百年后 )

人们突然发现，他们的理论出人意料地为物理现实问题提供了解决方案。你可能要问这怎么可能呢？那位行为古怪的英国数学家戈弗雷·哈罗德·哈代（Godfrey Harold Hardy, 1877—1947）的例子就十分有趣。哈代为他的纯理论数学研究感到非常自豪，他曾断然宣称<sup>[6]</sup>：“我的发现没有一项已经或者将要给世界带来丝毫影响，无论这种影响是直接的还是间接的，有益的抑或有有害的。”猜猜结果如何？他错了！他的一项研究成果被命名为哈代-温伯格定律<sup>[7]</sup>，这是以哈代和德国物理学家威廉·温伯格（Wilhelm Weinberg, 1862—1937）的名字命名的，该定律是遗传学家研究人口进化的基础。简单地说，哈代-温伯格定律认为：如果一个基数很大的人口群体随机婚配（没有人口迁移、基因突变和选择性婚配），基因构成将保持恒定，而且不因世代变化而变化。表面上，哈代研究的是抽象的数论——一门研究自然数的学科，却出乎意料地被发现能解决现实问题。1973年，英国数学家克利福德·柯克斯<sup>[8]</sup>（Clifford Cocks）利用数论在密码学领域取得了突破性进展。柯克斯的研究成果再次证明了哈代言论的过时。哈代在他1940年出版的那本著名的著作《一个数学家的自白》（*A Mathematician's Apology*）中声称：“任何人都不可能把数论用于战争。”很明显，他又错了！密码学在现代军事信息传递中绝对不可或缺。因此，即使哈代这位最有名的实用数学批判论者也被“拽入”研究具有实用价值的数学理论（如果他还在世的话，一定会对此高声抱怨）。

这还只是冰山一角。开普勒和牛顿发现了太阳系行星运行轨道是椭圆形的，而古希腊数学家门奈赫莫斯（Menaechmus, 大约公元前350年）两千年前就已经研究过这个曲线了。乔治·弗里德里希·伯恩哈特·黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826—1866）在1854年的一次经典演讲中概括了几门新兴几何学的主要内容，它们恰好是爱因斯坦解释宇宙结构时所必需的工具。还有一门叫群论（group theory）的数学“语言”，它是由年轻的数学天才伽罗瓦（Evariste Galois, 1811—1832）所创



建的。起初仅仅用来判别代数方程式的可解性，但今天它已经被物理学家、工程师、语言学家甚至人类生态学家们广泛使用，以研究几乎所有的对称性问题<sup>[9]</sup>。此外，数学上对称的概念在某种程度上还颠覆了整个科学研究过程。几个世纪以来，科学家认识宇宙的第一步，都是在反复试验和观察后，收集汇总数据和结果，再从其中归纳出通用的自然规律。这种梳理过程从局部观察开始，之后像拼拼图一样一块块地拼起来。进入 20 世纪后，人们认识到条理清晰的数学设计描述了亚原子世界的基础结构，当代物理学家们开始反其道而行之<sup>①</sup>。他们把数学对称性置于第一位，坚持认为自然法则和构成事物的基本要素应当遵循某种特定模式，于是根据这种要求，他们推演出通用规律。自然界又是如何知道应当遵循数学上的对称原理呢？

在 1975 年的某天，年轻的数学物理学家米奇·费根鲍姆（Mitch Feigenbaum）在洛斯阿拉莫斯国家实验室利用他的 HP-65 便携式计算器演算一个简单的方程式。他渐渐注意到计算器上的数<sup>[10]</sup>越来越接近一个特定的数字：4.669…。他惊奇地发现，在他演算其他方程式时，这个神奇的数字再次出现了。虽然费根鲍姆还不能解释其原因，但他很快就得出结论，他所发现的这个数字似乎标志着从有序到混沌过渡时的某种普遍性规律。对此，你大可不必惊讶，物理学家们在刚开始时都是怀疑论者。究竟什么原因导致那些看起来差异极大的系统行为背后却有相同的数学特征呢？经过半年的专家评审，费根鲍姆就此专题撰写的第一篇论文被退稿了。不久之后，实验证明当液态氦从下面开始加热时，其变化过程同费根鲍姆通用解决方案预测的结果恰恰一样。人们发现不仅这一种体系会如此表现。费根鲍姆发现的这个令人惊讶的数字，不但出现在流体从有序流向紊乱的转换过程中，也会出现在水龙头滴水的过程中。

---

① 指不必像过去一样先观察现象再总结规律。——译者注