全国高等农林院校"十一五"规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

经济管理类专业用

陈绩馨 编著

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高　等　数　学

经济管理类专业用

陈绩馨　编著

中　国　农　业　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／陈绩馨编著．—北京：中国农业出版社，2010.7
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-14600-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第103872号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码 100125）
策划编辑 朱 雷
文字编辑 魏明龙

中国农业出版社印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行
2010年7月第1版　2010年7月北京第1次印刷

开本：787mm×1092mm 1/16　印张：27.5
字数：668千字
定价：39.80元

前　言

高等数学是大学课程中一门重要的基础课，是经济管理类各专业的一门必修的公共基础理论课．学好这门课程，对于培养社会所需要的高级经济技术和工程管理人才，具有十分重要的意义．在大学数学中，高等数学是重要的基础与起点，它不仅在物理、化学、生物等自然科学领域中有非常广泛的应用，而且近几十年来它也不断地应用于社会、经济、人文等领域，成为这些领域的一个重要的研究工具．通过本课程的学习，可以逐步培养学生抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、自学能力、熟练运算能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为学生学习后续课程和进一步获得近代管理技术知识奠定必要的数学基础．

本教材参照教指委的《经济数学基础》大纲，在认真研究同类教材的基础上，针对经济管理类学生的特点，取长补短而编写的．本教材结构严谨简明、针对性强；语言叙述表达确切、思路清楚、由浅入深、直观形象、通俗易懂，并注意数学思想与数学方法的论述．例题具有典型性，既便于教师教学，又利于学生自学．同时，本教材编者结合多年的数学教学经验，将高等数学和经济学的有关内容进行了有机结合，并精选历年考研真题，供学生复习、总结和考研之用．

在本教材的编写过程中，得到了学校教务处等有关部门和学院领导的大力支持，温永仙、王秀丽、张朝阳、李德新、姜永、薛凌霄等老师提出了许多宝贵的意见和建议．在此谨表诚挚的谢意．本教材在编写过程中参阅了大量相关书籍和论文，特向有关作者表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，教材中难免有不妥之处，希望专家、同行和读者批评指正，使本教材在教学实践中不断完善．

编　者

2010 年 4 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

函数是高等数学研究的对象，也是高等数学中最重要、最基本的一个概念．极限是微积分中最基本的概念，微积分的其他基本概念都是用极限的概念来表达的．极限方法是微积分的最基本的方法，微分法与积分法都借助极限方法来描述，所以掌握极限概念与极限运算是非常重要的．本章将介绍函数、极限的基本概念以及它们的一些性质．

§1.1　函　　数

在客观世界中，往往同时有几个变量共同变化着．但这几个变量并不是孤立地变化，而是相互联系，遵循一定的规律变化．其中一个量变化时，另外的量也跟着变化；前者的值一确定，后者的值也就随之而唯一地确定．如：在几何中，圆的面积 A 是随着半径 r 的变化而变化的，其变化规律是 $A=\pi r^2$．当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个值时，由 $A=\pi r^2$ 就可以确定面积 A 的相应数值．在现实世界中广泛存在着变量之间的这种相互依赖关系，正是函数概念的客观背景．下面给出函数的定义．

一、函数的概念

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照对应规律 f 总有一个确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

数集 D 称为这个函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．

若任取一数值 $x_0\in D$，函数 $f(x)$ 有确定的对应值 $f(x_0)$，则称**函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义**．$f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**函数值**，记为

$$f(x_0)、y\Big|_{x=x_0} \text{ 或 } y=y_0.$$

全体函数值组成的数集，称为函数的**值域**．记为

$$W=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

定义 1.1 中的 f 反映自变量 x 与因变量 y 的对应规律，对应规律还可以用 F、g、φ、h 等记号表示，这时的函数就记为 $F(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$、$h(x)$等，有时为简化符号，也将 y 是 x 的函数记为 $y=y(x)$，等号左边的 y 是因变量，等号右边的 y 是对应法则．

函数定义中涉及定义域 D、对应法则 f 和值域 W．若定义域 D 和对应法则 f 确定了，则这个函数的值域 W 就确定了．因此，定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素．至于自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的．当两个函数的定义域和对应法则相同时，这两个函数就是相同的，例如，$y=3x-1$ 与 $z=3t-1$ 是相同的函数；而 $f(x)=2\lg x$ 是定

义在(0，$+\infty$)上的函数关系，$g(x)=\lg x^2$ 是定义在$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 上的函数关系，因此，$f(x)=2\lg x$ 与 $g(x)=\lg x^2$ 是定义域不同的两个不同的函数．

在实际问题中，函数的定义域就是使实际问题有意义的自变量的值的全体．例如，圆的面积 $A=\pi r^2$ 的定义域 $D=(0, +\infty)$.

在数学问题中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量值的全体．例如，函数 $f(x)=\lg(1-x)$的定义域是 $D=(-\infty, 1)$；$f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-1}+\ln(x+3)$的定义域 $D=(-3, 1)\cup(1, 4]$.

对于自变量 x 在定义域内每取一个值，因变量 y 有且只有一个值与它对应，这类函数称为**单值函数**．我们还会遇到另一种情况，即当自变量 x 在定义域内任取一个确定的值时，因变量 y 有多个值与它对应，这类函数称为**多值函数**．

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数．

函数的表示法是指表示函数对应规律的方法．函数的表示法通常有三种：**解析法、图像法、列表法**．用得较多的是解析法，除此以外，有时还直接用语句来反映一个函数．用解析法表示函数，也是多种多样的，如分段表示法、参数表示法和方程表示法等．

下面着重介绍一下分段函数．

如，函数 $y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$称为**绝对值函数**. 表示当 x 取不同区间内的数值时，函数用不同的式子来表示．如 $x=1>0$ 时，由 $f(x)=x$ 计算得到 $f(1)=1$；当 $x=-2<0$ 时，由 $f(x)=-x$ 计算得到 $f(-2)=2$，如图 1－1 所示．

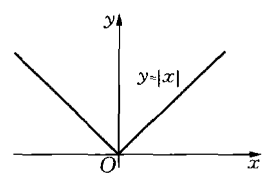

图 1－1

像这样的一个函数要用几个式子表示．这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，称为**分段函数**．

例 1 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$称为**符号函数**．它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1, 0, 1\}$，它的图像如图 1－2 所示．对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

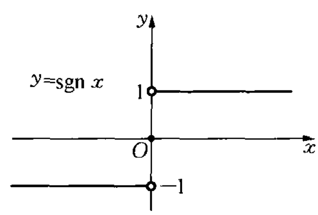

图 1－2

从图 1－1 和图 1－2 可看出，分段函数的图像是由若干段曲线组成的，各曲线可能相连接，也可能断开．

例 2 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**，记为$[x]$，如$\left[\dfrac{1}{3}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[2]=2$. 若把 x 看成变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$. 值域 $W=Z$. 它的图像如图 1－3 所示，这个图像称为**阶梯曲线**. 在 x 为整数值处，图像发生跳跃，跃度为 1，这个函数也是分段函数，称为**取整函数**．

例 3　某市出租车按如下规定收费：当行驶里程不超过 3 km时，一律收起步费 10 元；当行驶里程超过 3 km 时，除起步费外，对超过 3 km 且不超过 10 km 的部分，按每千米 2 元计费，对超过 10 km 的部分，按每千米 3 元计费．试写出车费 C 与行驶里程 s 之间的函数关系．

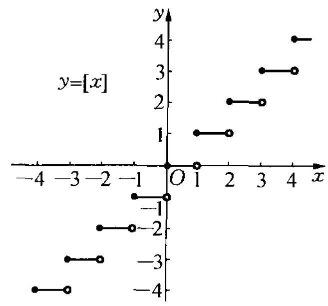

图 1-3

解　以 $C=C(s)$ 表示这个函数，其中 s 的单位是 km，C 的单位是元．按上述规定，当 $0<s\leqslant 3$ 时，$C=10$；当 $3<s\leqslant 10$ 时，$C=10+2(s-3)=2s+4$；当 $s>10$ 时，$C=10+2(10-3)+3(s-10)=3s-6$. 或写成：

$$C(s)=\begin{cases}10, & 0<s\leqslant 3,\\ 2s+4, & 3<s\leqslant 10,\\ 3s-6, & s>10.\end{cases}$$

$C(s)$就是一个分段函数．

又如邮资的计费办法，个人所得税的收取办法等都用分段函数表示．

注　(1) 分段函数是用几个式子合在一起来表示**一个函数**，而不是表示几个函数．

(2) 它的定义域是各个表示式的定义域的**并集**．

(3) 求自变量为 x_0 的函数值时，先要看 x_0 属于那个表示式的定义域，然后按这个表示式计算 x_0 所对应的函数值．

为了阐述函数的局部性态，还经常用到邻域的概念，它是由某点附近的所有点组成的集合．

定义 1.2　设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$，称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**，它在数轴上表示以点 a 为中心，长度为 2δ 的对称开区间，如图 1-4所示．

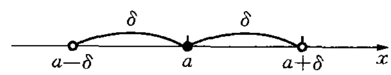
图 1-4

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，如图 1-5 所示．

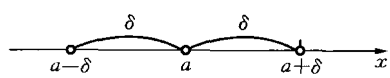
图 1-5

实数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了说明函数在点的一侧附近的情况，还要用到左、右邻域的概念．

开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**，$(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**，a 的任意一个左(右) δ 邻域简称为 a 的**左(右)邻域**．

二、函数的几种基本特性

函数的基本特性主要包括：奇偶性、单调性、周期性和有界性．

1. 函数的奇偶性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任一 x，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $y=f(x)$为**奇函数**；如果对于定义域中的任一 x 有

$$f(x)=f(-x),$$

则称 $y=f(x)$为**偶函数**．不是奇函数也不是偶函数的函数，称为**非奇非偶函数**．

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-6(a)、(b)所示．

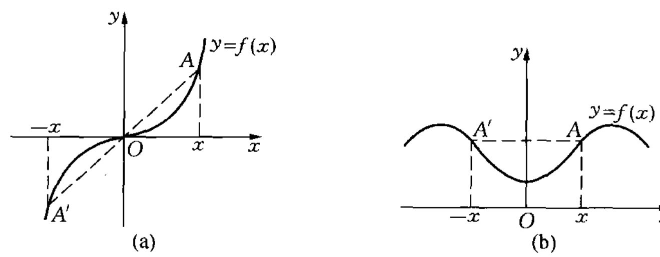

图 1-6

例如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=x^2+x^3$ 是非奇非偶函数．

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数．

(2) 偶数个奇（或任意多个偶）函数之积为偶函数；奇数个奇函数之积为奇函数．

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数．

2. 函数的单调性

定义 1.4 设 x_1 和 x_2 为区间(a,b)内的任意两个数，若当 $x_1<x_2$ 时函数值 $f(x_1)$和 $f(x_2)$满足

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称该函数在区间(a,b)内**单调增加**，或称**递增**；若当 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称该函数在区间(a,b)内**单调减少**，或称**递减**．

函数的递增，递减统称为函数是**单调的**，从几何直观来看，递增就是当自变量 x 自左向右变化时，函数的图形上升；递减就是当自变量 x 自左向右变化时，函数的图形下降，如图 1-7(a)、(b)所示．

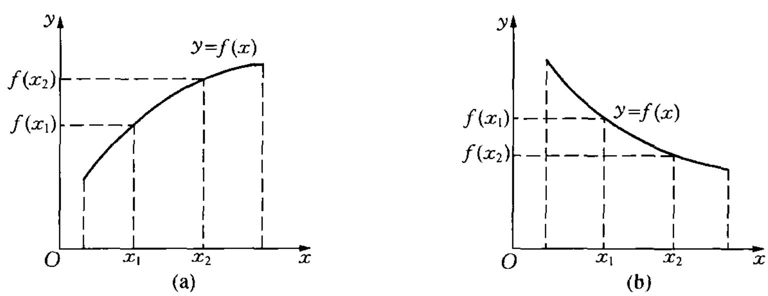

图 1-7

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的；在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的，在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调的．

3. 函数的周期性

定义 1.5　对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 T，使得对于定义域内的任何 x 值，$x \pm T$ 仍在定义域内，且关系式

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**．

图 1－8 表示周期为 T 的一个周期函数，在每个长度为 T 的区间上，函数图形有相同的形状．

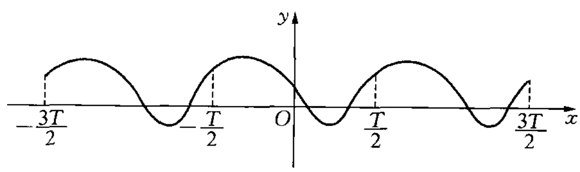

图 1－8

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$，$\cot x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$ 都是以 π 为周期的周期函数．

周期函数的运算性质：

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数．

(3) 若 $f(x)$、$g(x)$ 是分别以 T_1，$T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1，T_2 的最小公倍数为周期的函数．

4. 函数的有界性

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 如果存在数 M_1，使得

$$f(x)\leqslant M_1$$

对任一 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有**上界**，而 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界. 如果存在数 M_2，使得

$$f(x)\geqslant M_2$$

对任一 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有**下界**，而 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**．

注意　函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的．

显然，$f(x)$ 在 I 上有界，使上述不等式成立的常数 M 不是唯一的，如 $M+2$，$3M$ 等都是可以的．有界性体现在常数 M 的存在性上．如果这样的 M 不存在，也就是说无论 M 取得多么大，总存在某一个 $x\in I$ 使得 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在 I 上**无界**．

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，那么它的图形是介于两条平行线 $y=M_1$，$y=M_2$ 之间，如图 1－9 所示．

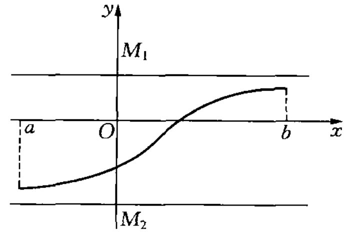

图 1－9

例 4　函数 $f(x)=\sin x$ 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它是有界函数.