高等学校教材

高等数学教程

上册

主　编　李继彬
副主编　蔡光程　戴　琳　李庶民

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学教程

上册

主编　李继彬

副主编　蔡光程　戴　琳　李庶民

编　者

蔡光程　陈秀华　戴　琳　董艳梅　冯　彬

干晓蓉　李怀远　李继彬　李庶民　杨凤藻

（以汉语拼音为序）

高等教育出版社

内容提要

本书根据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成，分为上、下两册。上册内容包括：空间解析几何，函数、极限与连续性，导数与微分，导数的应用，一元函数积分学，无穷级数。书后附积分表和习题参考答案。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材使用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程．上册／李继彬主编．—北京：高等教育出版社，2009.9

ISBN 978-7-04-018683-3

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 155056 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 张　志
责任绘图 黄建英　**版式设计** 马敬茹　**责任校对** 杨凤玲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009 年 9 月第 1 版
印　　张	21.5	印　　次	2009 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	400 000	定　　价	23.30 元

物料号　18683-00

序　言

高等数学作为高等工科院校的一门重要的基础课，不仅应向学生传授必需的数学基础知识，而且还应加强数学素质的培养，让学生通过知识载体，学习对事物进行洞察、抽象及研究的思想和方法；培养必要的思维逻辑性和严密性；提高应用数学的意识、兴趣和能力。为学生今后根据工作需要进一步学习和应用现代数学的知识奠定基础，提高可能性。

李继彬、蔡光程、戴琳、李庶民等编写的《高等数学教程》一书，从上述基本观点出发，根据前国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会《关于工科数学系列课程教学改革的建议》精神，结合作者们多年的教学经验，就渗入现代数学观点，促使分析、代数和几何的相互联系，加强数学建模和数值计算等方面进行了有益的探索和改革，力图使本书既能适当反映科学技术现代化的要求又能切合当前教学的实际。这是值得倡导的一种改革方向。

教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点与难点，应当鼓励不同层次、不同模式的改革试点；鼓励不同要求、不同风格的教材百花齐放。相信本书的出版将以其具有的特色为工科数学课程教材改革的百花园增添一枝鲜花，对提高工科数学教学质量、培养学生的数学素质产生积极作用。

马知恩

2008 年 11 月于西安交大

前　言

本书是在我校获教育部2001年度国家级教学成果二等奖教材《高等数学教程》的基础上，适应本世纪创新性人才培养和全面素质教育的需要而重新编写的。本版的初稿经昆明理工大学印刷成册，已经在本科教学中试用多年。我们结合教学实践，反复推敲、经多次修改而定稿。

面对我国改革开放、教育和科学发展的新形势，高等学校工科基础数学的教学如何改革？教材如何更新？这是一个十分值得研究和实践的重要问题。

我们在本版高等数学新教材的整体设计思想上作了以下的考虑：

1. 对“高等数学教学大纲”规定的基础内容部分着力下工夫。对基本概念的叙述尽量深入浅出，对基本定理的证明力求简明易懂，对基本方法的介绍力求充实到位，对例题的选择力求典型和富有应用性。

2. 在内容组织上，根据学生的认识发展规律和心理特点精心安排，便于学生自学。学习过程一般为感知、理解、巩固和应用四个阶段，而“理解”是学习和获取知识的最重要阶段。在教材编写中精心安排有关练习和内容，在便于学生“理解”上下工夫。

3. 更新教学内容，适应当代计算机和数学软件（如 Matlab，Mathematica 和 Maple 等）发展和普及的新形势，增加了数学试验的内容，并编写数值计算和数学建模初步等，使教材更加直观化和现代化。

4. 正确处理好高等数学教学中的逻辑推导、概念抽象和计算与应用的关系。我们强调数学教育的意义不仅是要使学生学会有关的数学知识，更重要的是培养学生数学思维的习惯，增加数学文化的修养，以备将来工作中具备较严密的逻辑思维能力和对具体问题的抽象能力。换言之，在教材的编写中注意素质教育和创新精神的培养。

每一门科学和技术都有自己的产生和发展的历史，都记录着人们个别的活生生的劳动痕迹。因此，为了打破数学学科的神秘性，激发学生们的创造精神，点燃初学者的探索之火，高等数学课程的讲授，不是一堆定义、定理、公式等组织得天衣无缝的僵死的数学事实。讲授者应该自始至终从历史唯物论的观点出发，把数学科学的发展看作是学者们提出问题、解决问题的能动的创造过程。编者提倡在讲授过程中，把揭露问题摆到比叙述事实更高的地位。用具体的例子说明，在学科发展的过程中，学者们是怎样在“山穷水尽疑无路”的

条件下，通过克服困难，达到“柳岸花明又一村”境界的。

数学和哲学一样，是自然科学，工程科学和社会科学共有的基础和工具，是人们应当掌握的思维方法和文化精神。数学为我们提供了诸如建立模型、符号化、抽象化、公理化、最优化、逻辑推理和数据分折等独具特色的思想方法，并蕴含着严谨求实和一丝不苟的科学精神。学习数学，学好数学，不仅可以提高自身认识世界，改造世界和服务社会的能力，也可培养自己勤奋踏实，求真务实的品质。谨此，用这些文字与学习本书的同学们共勉。

本书分上、下两册出版。第一章由蔡光程编写，第二章由杨凤藻编写，第三、四章由李怀远编写，第五章由冯彬和董艳梅编写，第六章由董艳梅编写，第七章由干晓蓉编写，第八、十章由陈秀华编写，第九章由戴琳编写，第十一章由李庶民编写，第十二章由蔡光程和李庶民共同编写。初稿完成后由李继彬、蔡光程、戴琳、李庶民对全书进行了系统的统稿、定稿和加工工作。稿中的所有作图由李建飞、何维刚完成。姜麟和石剑平协助编者们做了大量计算机编辑工作。

本书承蒙原国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会主任、高校教学名师奖获奖者、西安交通大学马知恩教授撰写序言，在此向马知恩教授表示诚挚的感谢。

本书的出版得到昆明理工大学教务处和校领导的大力支持，高等教育出版社为本书的出版做了大量工作，在此一并表示感谢。

限于编者的水平，本书不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

李继彬

2009 年 7 月

目　　录

第一章　空间解析几何

平面解析几何通过建立平面中的点与它的坐标之间的对应关系，导出直线和曲线的方程，从而可以应用方程来描述平面曲线的特性. 本章将介绍空间直角坐标系，即实数集 $\mathbf{R}$ 的三维笛卡儿积 $\mathbf{R}^3$，又称三维几何空间. 引入空间向量的概念以及向量的运算，以向量作为工具，研究空间中直线和平面、曲面和曲线及其之间的关系. 本章的知识将为微积分的学习作准备.

第一节　空间曲面的轨迹与方程

考虑到后续课程，如在积分学的应用中求平面图形的面积、平面曲线的弧长等，需要应用极坐标与参数方程的知识，而一些高中教材忽略了对极坐标系与参数方程的讲授，本节先介绍极坐标系与参数方程的基本知识.

一、极坐标与参数方程

1. 极坐标

极坐标系是平面上的点与有序实数组的一种对应关系. 在平面上取一固定点 O 叫做**极点**，自点 O 引一条固定的轴 Ox 称做**极轴**，对于平面上的任一点 P，以 O 点为原点，向 P 点作有向射线，记射线 OP 与极轴间的有向角为 θ，点 P 到点 O 的距离为 ρ(图 1-1)，显然 $\rho\geqslant 0$.

称 ρ 为点 P 的**极半径或极径**，θ 为点 P 的**极角**，点 O 为**极坐标原点**，极半径与极角组成点 P 的极坐标，记做(ρ,θ).

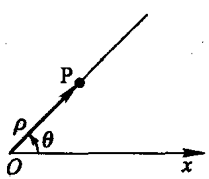

图 1-1

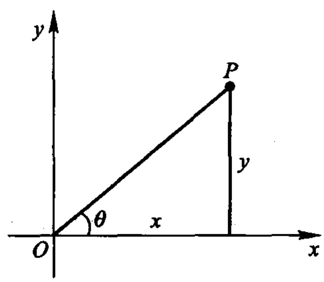

图 1-2

极坐标系与直角坐标系虽然不相同，但却有着密切联系，现在就来讨论这两种坐标系之间的关系，见图 1-2. 极坐标系的极点与直角坐标系的坐标原点同为

[illegible]轴,设 P 点的直角坐标为(x,y),极半径 $\rho=|OP|$,于是极坐[illegible]的公式为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases} \tag{1}$$

直角坐标转换成极坐标的公式为

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}, \end{cases} \tag{2}$$

即

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{3}$$

通过公式(1),(2),(3)可以自由地在直角坐标系与极坐标系之间进行转换.在极坐标系下,如果平面曲线上的动点 $P(\rho,\theta)$ 满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$,反之满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 的点(ρ,θ)在曲线 C 上,则称 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 为曲线的极坐标方程.引入极坐标后,一些在直角坐标系中有较复杂表达式的平面曲线,在极坐标下有比较简单的表示形式.例如心形线、螺旋线等.下面举例说明.

例 1　已知某圆圆心在原点,半径为 r,分别写出其在直角坐标系与极坐标系下的曲线方程.

解　根据题意,该圆在直角坐标系下的曲线方程为

$$x^2+y^2=r^2.$$

由 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,则所求圆的极坐标曲线方程为 $\rho=r$,并且 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

例 2　已知某直线在直角坐标系下的方程为 $x=a$,求其在极坐标系下的方程.

解　将 $x=\rho\cos\theta$ 代入方程 $x=a(a>0)$,得 $\rho=\dfrac{a}{\cos\theta}$,并且 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

例 3　将 $\rho=2a\cos\theta(a>0)$化为直角坐标方程.

解　将原方程化为 $\rho^2=2a\rho\cos\theta$,由 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$\rho\cos\theta=x$,得 $x^2+y^2=2ax$,即$(x-a)^2+y^2=a^2$.说明该曲线为圆心在点$(a,0)$,半径为 a 的圆.

同样,读者可以自己推导出方程 $\rho=2a\sin\theta(a>0)$表示圆心在点$(0,a)$,半径为 a 的圆.

例 4　给出阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$与心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$的图形.

解　阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$,θ 从 0 变到 2π,得其图形为图 1-3(a).

心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$，$\theta$ 从 0 变到 π，π 变到 2π，得其图形为图 1-3(b).

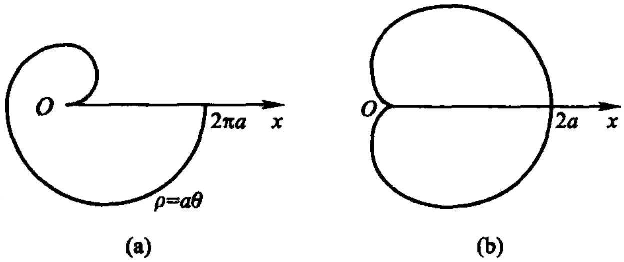

图 1-3

2. 参数方程

在几何中，曲线又常常可视为一个质点的运动轨迹，某些曲线运动的规律并不是直接反映在动点的两个坐标 x 与 y 之间的关系上，而是通过动点的位置随着时间 t 而改变的规律来确定. 当动点按照某种规律运动时，与它对应的 (x,y) 也将随着 t 的不同而改变，记为 $(x(t),y(t))$.

换言之，若取 t 在区间 $[a,b]$ 内的一切值，由 $(x,y)=(x(t),y(t))$ 表示的点总在一条曲线上；反过来，在这条曲线上的任意点可由 t 的某一值 t_0 通过 $(x(t),y(t))$ 完全确定，则 $(x(t),y(t))$ 叫做曲线的**参数方程**，记作

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b). \tag{4}$$

在式(4)中消去参数 t(如果可能的话)，就得到了曲线的普通方程. 下面是几个常用的参数方程：

(1) 圆　$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$;

(2) 椭圆　$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$;

(3) 双曲线　$x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$;

(4) 抛物线　$x=at^2, y=2at$;

(5) 星形线　$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$.

星形线的图形如图 1-4 所示.

例 5　说明下面两个参数方程在直角坐标系下所表示的图形：

(1) $\begin{cases} x=a+a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a+a\sin\theta. \end{cases}$

解　(1) 参数方程可表示为

$$(x-a)^2+y^2=(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2=a^2,$$

则其在直角坐标系下表示圆心为 $(a,0)$，半径为 a 的圆.

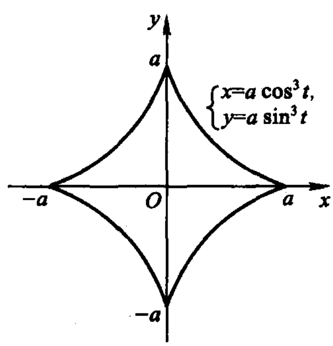

图 1-4

(2) 与(1)同理,此参数方程表示圆心为$(0,a)$,半径为 a 的圆.

二、空间直角坐标系

过空间一点 O,作三条互相垂直的数轴 Ox,Oy,Oz. 一般情况下,取相同的单位长度,且将三轴的交点 O 作为原点. 这三条轴分别叫做**横轴**,**纵轴**,**竖轴**或 **x 轴**,**y 轴**,**z 轴**,统称为**坐标轴**. 通常采用右手系,把 x 轴和 y 轴画在水平面上,z 轴竖立直上. 它们的方向可以由右手法则确定,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向.

三个坐标轴中任意两条可以确定一个平面,这样确定的三个平面统称为**坐标面**. x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫做 **xOy 面**,类似地,由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面,分别叫做 **yOz 面**和 **xOz 面**. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个**卦限**,含 x 轴,y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限. 在 xOy 面上方,从第一卦限开始,按逆时针方向依次确定的三个卦限分别叫做第二卦限,第三卦限和第四卦限. 第五至第八卦限,在 xOy 面下方,由第一卦限之下的第五卦限开始,按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用罗马数字Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ,表示(见图 1-5).

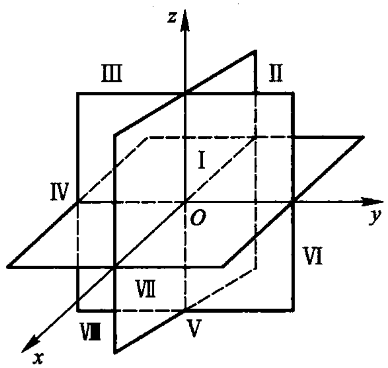

图 1-5

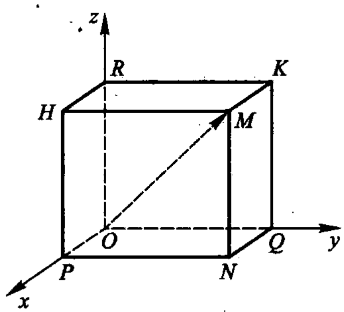

图 1-6

设 M 是空间中一点,过点 M 作三个平面分别与三个坐标轴垂直. 它们与三个坐标轴的交点依次记作 P,Q,R(见图 1-6),这三个交点在 x 轴,y 轴,z 轴上的坐标依次为 x,y,z,则点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z); 反过来,已知一个有序数组(x,y,z),可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后过点 P,Q,R 分别作 x 轴,y 轴,z 轴的垂直平面,则这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组(x,y,z)所确定的唯一的点. 这样就建立了空间点 M 和有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系. 这组数(x,y,z)叫做点 M 的坐标,分别称为点 M 的 x 坐标,y 坐标和 z 坐标,记作$M(x,y,z)$.

三、空间两点之间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间中的两点. 过点 M_1,M_2 各作三个分