

高等学校教材

高等数学教程

上册

主 编 李继彬
副主编 蔡光程 戴 琳 李庶民



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学教程

上册

主编 李继彬

副主编 蔡光程 戴琳 李庶民

编者

蔡光程 陈秀华 戴琳 董艳梅 冯彬
干晓蓉 李怀远 李继彬 李庶民 杨凤藻

(以汉语拼音为序)

高等教育出版社

内容提要

本书根据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成,分为上、下两册。上册内容包括:空间解析几何;函数、极限与连续性,导数与微分,导数的应用,一元函数积分学,无穷级数。书后附积分表和习题参考答案。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材使用,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程.上册/李继彬主编. —北京:高等教育出版社, 2009.9

ISBN 978-7-04-018683-3

I. 高... II. 李... III. 高等数学-高等学校-教材
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 155056 号

策划编辑	马丽	责任编辑	张耀明	封面设计	张志
责任绘图	黄建英	版式设计	马敬茹	责任校对	杨凤玲
责任印制	朱学忠				

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京明月印务有限责任公司

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16
印 张 21.5
字 数 400 000

版 次 2009 年 9 月第 1 版
印 次 2009 年 9 月第 1 次印刷
定 价 23.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18683-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010) 58581118

序 言

高等数学作为高等工科院校的一门重要的基础课，不仅应向学生传授必需的数学基础知识，而且还应加强数学素质的培养，让学生通过知识载体，学习对事物进行洞察、抽象及研究的思想和方法；培养必要的思维逻辑性和严密性；提高应用数学的意识、兴趣和能力。为学生今后根据工作需要进一步学习和应用现代数学的知识奠定基础，提高可能性。

李继彬、蔡光程、戴琳、李庶民等编写的《高等数学教程》一书，从上述基本观点出发，根据前国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会《关于工科数学系列课程教学改革建议》精神，结合作者们多年的教学经验，就渗入现代数学观点，促使分析、代数和几何的相互联系，加强数学建模和数值计算等方面进行了有益的探索和改革，力图使本书既能适当反映科学技术现代化的要求又能切合当前教学的实际。这是值得倡导的一种改革方向。

教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点与难点，应当鼓励不同层次、不同模式的改革试点；鼓励不同要求、不同风格的教材百花齐放。相信本书的出版将以其具有的特色为工科数学课程教材改革的百花园增添一枝鲜花，对提高工科数学教学质量、培养学生的数学素质产生积极作用。

马知恩

2008年11月于西安交大

前 言

本书是在我校获教育部 2001 年度国家级教学成果二等奖教材《高等数学教程》的基础上, 适应本世纪创新性人才培养和全面素质教育的需要而重新编写的。本版的初稿经昆明理工大学印刷成册, 已经在本科教学中试用多年。我们结合教学实践, 反复推敲、经多次修改而定稿。

面对我国改革开放、教育和科学发展的新形势, 高等学校工科基础数学的教学如何改革? 教材如何更新? 这是一个十分值得研究和实践的重要问题。

我们在本版高等数学新教材的整体设计思想上作了以下的考虑:

1. 对“高等数学教学大纲”规定的基础内容部分着力下工夫。对基本概念的叙述尽量深入浅出, 对基本定理的证明力求简明易懂, 对基本方法的介绍力求充实到位, 对例题的选择力求典型和富有应用性。

2. 在内容组织上, 根据学生的认识发展规律和心理特点精心安排, 便于学生自学。学习过程一般为感知、理解、巩固和应用四个阶段, 而“理解”是学习和获取知识的最重要阶段。在教材编写中精心安排有关练习和内容, 在便于学生“理解”上下工夫。

3. 更新教学内容, 适应当代计算机和数学软件(如 Matlab, Mathematica 和 Maple 等)发展和普及的新形势, 增加了数学试验的内容, 并编写数值计算和数学建模初步等, 使教材更加直观化和现代化。

4. 正确处理好高等数学教学中的逻辑推导、概念抽象和计算与应用的关系。我们强调数学教育的意义不仅是要使学生学会有关的数学知识, 更重要的是培养学生数学思维的习惯, 增加数学文化的修养, 以备将来工作中具备较严密的逻辑思维能力和对具体问题的抽象能力。换言之, 在教材的编写中注意素质教育和创新精神的培养。

每一门科学和技术都有自己的产生和发展的历史, 都记录着人们个别的活生生的劳动痕迹。因此, 为了打破数学学科的神秘性, 激发学生们的创造精神, 点燃初学者的探索之火, 高等数学课程的讲授, 不是一堆定义、定理、公式等组织得天衣无缝的僵死的数学事实。讲授者应该自始至终从历史唯物论的观点出发, 把数学科学的发展看作是学者们提出问题、解决问题的能动的创造过程。编者提倡在讲授过程中, 把揭露问题摆到比叙述事实更高的地位。用具体的例子说明, 在学科发展的过程中, 学者们是怎样在“山穷水尽疑无路”的

条件下,通过克服困难,达到“柳岸花明又一村”境界的。

数学和哲学一样,是自然科学,工程科学和社会科学共有的基础和工具,是人们应当掌握的思维方法和文化精神。数学为我们提供了诸如建立模型、符号化、抽象化、公理化、最优化、逻辑推理和数据分折等独具特色的思想方法,并蕴含着严谨求实和一丝不苟的科学精神。学习数学,学好数学,不仅可以提高自身认识世界,改造世界和服务社会的能力,也可培养自己勤奋踏实,求真务实的品质。谨此,用这些文字与学习本书的同学们共勉。

本书分上、下两册出版。第一章由蔡光程编写,第二章由杨凤藻编写,第三、四章由李怀远编写,第五章由冯彬和董艳梅编写,第六章由董艳梅编写,第七章由干晓蓉编写,第八、十章由陈秀华编写,第九章由戴琳编写,第十一章由李庶民编写,第十二章由蔡光程和李庶民共同编写。初稿完成后由李继彬、蔡光程、戴琳、李庶民对全书进行了系统的统稿、定稿和加工工作。稿中的所有作图由李建飞、何维刚完成。姜麟和石剑平协助编者做了大量计算机编辑工作。

本书承蒙原国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会主任、高校教学名师奖获奖者、西安交通大学马知恩教授撰写序言,在此向马知恩教授表示诚挚的感谢。

本书的出版得到昆明理工大学教务处和校领导的大力支持,高等教育出版社为本书的出版做了大量工作,在此一并表示感谢。

限于编者的水平,本书不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

李继彬

2009年7月

目 录

第一章 空间解析几何	1
第一节 空间曲面的轨迹与方程	1
一、极坐标与参数方程	1
二、空间直角坐标系	4
三、空间两点之间的距离	4
四、曲面方程的一般概念	5
习题 1-1	12
第二节 空间曲线及其方程	13
一、空间曲线的一般方程	13
二、空间曲线的参数方程	14
三、空间曲线在坐标面上的投影	15
习题 1-2	17
第三节 向量及其运算	17
一、向量的概念	17
二、向量的线性运算	18
三、向量在坐标下的线性运算	21
四、向量的模与方向余弦的坐标表示	24
五、向量在轴上的投影和投影性质	25
六、向量的数量积	26
七、向量的向量积	28
八、向量的混合积	32
习题 1-3	33
第四节 平面及其方程	34
一、平面的点法式方程	34
二、平面的一般方程	35
三、平面的截距式方程	37
四、两平面的夹角	37
五、点到平面的距离	38
习题 1-4	39

第五章 空间直线及其方程	40
§5.1 空间直线的一般方程	40
§5.2 空间直线的点法式方程与参数方程	40
§5.3 空间直线的两式方程	42
§5.4 空间直线的夹角	43
§5.5 空间直线的距离	44
习题 5-1	47
总习题	48
第二章 函数、极限与连续性	51
第一节 函数	51
一、区间与邻域	51
二、函数及其表示方法	52
三、建立函数关系举例	56
四、函数的几种特性	57
五、初等函数	59
习题 2-1	65
第二节 极限的概念	67
一、数列的极限	67
二、函数的极限	72
三、无穷大	78
习题 2-2	79
第三节 极限运算	80
一、无穷小及其运算	80
二、极限的运算法则	83
习题 2-3	86
第四节 极限存在准则 两个重要极限	87
一、极限存在准则	87
二、两个重要极限	88
习题 2-4	91
第五节 无穷小的比较	92
习题 2-5	94
第六节 函数的连续性	94
一、连续函数的概念	94
二、连续函数的基本性质	96
三、闭区间上连续函数的性质	99

四、函数的间断点及其分类	100
习题 2-6	102
总习题二	103
第三章 导数与微分	106
第一节 导数的概念	106
一、瞬时速度 切线的斜率	106
二、导数的定义	107
三、可导与连续的关系	110
习题 3-1	111
第二节 函数的求导法则	112
一、几个基本初等函数的导数公式	113
二、导数的四则运算法则	114
三、反函数的导数	117
四、复合函数的导数	118
习题 3-2	122
第三节 高阶导数	124
习题 3-3	126
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	127
一、隐函数的导数	127
二、由参数方程所确定的函数的导数	129
* 三、相关变化率	132
习题 3-4	133
第五节 微分及其在近似计算中的运用	135
一、微分的概念	135
二、基本初等函数的微分公式与微分运算法则	137
三、微分在近似计算中的运用	139
习题 3-5	140
总习题三	141
第四章 导数的应用	144
第一节 中值定理	144
一、罗尔定理	144
二、拉格朗日中值定理	145
三、柯西中值定理	147
习题 4-1	149
第二节 洛必达法则	150

一、 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的求法: 洛比达法则	155
二、 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式极限的求法	157
习题 4-2	160
第三节 泰勒 (Taylor) 公式	155
一、问题的提出	155
二、泰勒中值定理	157
三、应用举例	159
习题 4-3	160
第四节 函数的单调性与凹凸性	160
一、单调性的判别法	160
二、单调区间的求法	161
三、曲线凹凸的定义	163
四、曲线凹凸性的判定	164
五、曲线的拐点及其求法	164
习题 4-4	166
第五节 函数的极值与最值	167
一、函数极值的定义	167
二、函数极值的求法	168
三、函数最值的求法	171
四、应用举例	171
习题 4-5	173
第六节 函数图形的描绘	174
一、渐近线	174
二、函数图形描绘的步骤	176
三、作图举例	176
习题 4-6	179
第七节 曲线的曲率	179
一、弧微分	179
二、曲率及其计算公式	180
三、曲率圆与曲率半径	183
习题 4-7	184
总习题四	184
第五章 一元函数积分学	186
第一节 定积分的概念与性质	186

一、定积分问题举例	186
二、定积分的定义	188
三、定积分的几何意义	190
四、定积分的性质	191
习题 5-1	194
第二节 微积分基本定理	194
一、积分上下限函数及其导数、原函数	195
二、牛顿-莱布尼茨公式	197
习题 5-2	199
第三节 不定积分的概念和性质	201
一、不定积分的概念	201
二、基本积分表	202
三、不定积分的性质	204
习题 5-3	206
第四节 积分方法	207
一、换元积分法	207
二、分部积分法	218
三、几类特殊函数的积分法	222
习题 5-4	226
第五节 反常积分	228
一、无穷区间上的反常积分	228
二、无界函数的反常积分	230
习题 5-5	232
总习题五	232
第六章 无穷级数	235
第一节 无穷级数的敛散性及其性质	235
一、无穷级数的概念	235
二、无穷级数的基本性质	238
三、柯西收敛原理	241
习题 6-1	241
第二节 常数项级数的审敛法	242
一、正项级数及其审敛法	242
二、任意项级数、绝对收敛、条件收敛	249
习题 6-2	253
第三节 函数项级数与幂级数	254

一、函数项级数	254
二、幂级数及其收敛性	255
三、幂级数的运算	259
习题 6-3	263
第四节 函数展开成幂级数	263
一、泰勒级数	263
二、函数展开成幂级数	265
习题 6-4	270
第五节 幂级数的应用	270
一、函数值的近似计算	270
二、在积分计算中的应用	272
三、求极限	273
四、证明欧拉公式	274
习题 6-5	274
* 第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛性级数的基本性质	275
一、一致收敛性的概念	275
二、一致收敛级数的基本性质	278
三、幂级数的一致收敛性	281
习题 6-6	282
第七节 傅里叶级数	283
一、三角级数 三角函数系的正交性	283
二、周期为 2π 的函数展开为傅里叶级数	284
三、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数	290
四、定义在 $[-l, l]$ 或 $[0, l]$ 上的函数的傅里叶级数	293
习题 6-7	296
总习题六	296
附录 积分表	299
上册习题答案	309

第一章 空间解析几何

平面解析几何通过建立平面中的点与它的坐标之间的对应关系,导出直线和曲线的方程,从而可以应用方程来描述平面曲线的特性.本章将介绍空间直角坐标系,即实数集 $\mathbf{R}$ 的三维笛卡儿积 $\mathbf{R}^3$,又称三维几何空间.引入空间向量的概念以及向量的运算,以向量作为工具,研究空间中直线和平面、曲面和曲线及其之间的关系.本章的知识将为微积分的学习作准备.

第一节 空间曲面的轨迹与方程

考虑到后续课程,如在积分学的应用中求平面图形的面积、平面曲线的弧长等,需要应用极坐标与参数方程的知识,而一些高中教材忽略了对极坐标系与参数方程的讲授,本节先介绍极坐标系与参数方程的基本知识.

一、极坐标与参数方程

1. 极坐标

极坐标系是平面上的点与有序实数组的一种对应关系.在平面上取一固定点 O 叫做极点,自点 O 引一条固定的轴 Ox 称做极轴,对于平面上的任一点 P ,以 O 点为原点,向 P 点作有向射线,记射线 OP 与极轴间的有向角为 θ ,点 P 到点 O 的距离为 ρ (图 1-1),显然 $\rho \geq 0$.

称 ρ 为点 P 的极半径或极径, θ 为点 P 的极角,点 O 为极坐标原点,极半径与极角组成点 P 的极坐标,记做 (ρ, θ) .

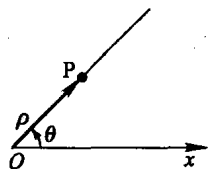


图 1-1

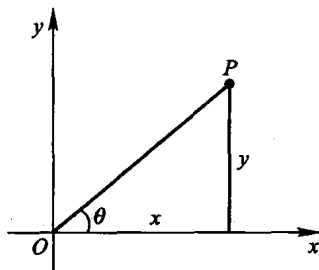


图 1-2

极坐标系与直角坐标系虽然不相同,但却有着密切联系,现在就来讨论这两种坐标系之间的关系,见图 1-2. 极坐标系的极点与直角坐标系的坐标原点同为

设 P 点的直角坐标为 (x, y) , 极半径 $\rho = |OP|$, 于是极坐标与直角坐标的公式为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad (1)$$

直角坐标转换成极坐标的公式为

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad (2)$$

即

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (3)$$

通过公式(1), (2), (3)可以自由地在直角坐标系与极坐标系之间进行转换. 在极坐标系下, 如果平面曲线上的动点 $P(\rho, \theta)$ 满足方程 $\varphi(\rho, \theta) = 0$, 反之满足方程 $\varphi(\rho, \theta) = 0$ 的点 (ρ, θ) 在曲线 C 上, 则称 $\varphi(\rho, \theta) = 0$ 为曲线的极坐标方程. 引入极坐标后, 一些在直角坐标系中有较复杂表达式的平面曲线, 在极坐标下有比较简单的表示形式. 例如心形线、螺旋线等. 下面举例说明.

例 1 已知某圆圆心在原点, 半径为 r , 分别写出其在直角坐标系与极坐标系下的曲线方程.

解 根据题意, 该圆在直角坐标系下的曲线方程为

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

由 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则所求圆的极坐标曲线方程为 $\rho = r$, 并且 $0 \leq \theta < 2\pi$.

例 2 已知某直线在直角坐标系下的方程为 $x = a$, 求其在极坐标系下的方程.

解 将 $x = \rho \cos \theta$ 代入方程 $x = a (a > 0)$, 得 $\rho = \frac{a}{\cos \theta}$, 并且 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

例 3 将 $\rho = 2a \cos \theta (a > 0)$ 化为直角坐标方程.

解 将原方程化为 $\rho^2 = 2a\rho \cos \theta$, 由 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho \cos \theta = x$, 得 $x^2 + y^2 = 2ax$, 即 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. 说明该曲线为圆心在点 $(a, 0)$, 半径为 a 的圆.

同样, 读者可以自己推导出方程 $\rho = 2a \sin \theta (a > 0)$ 表示圆心在点 $(0, a)$, 半径为 a 的圆.

例 4 给出阿基米德螺旋线 $\rho = a\theta (a > 0)$ 与心形线 $\rho = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$ 的图形.

解 阿基米德螺旋线 $\rho = a\theta (a > 0)$, θ 从 0 变到 2π , 得其图形为图 1-3(a).

心形线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$), θ 从 0 变到 π , π 变到 2π , 得其图形为图 1-3(b).

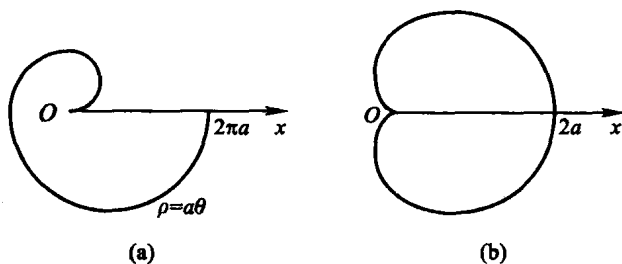


图 1-3

2. 参数方程

在几何中, 曲线又常常可视为一个质点的运动轨迹, 某些曲线运动的规律并不是直接反映在动点的两个坐标 x 与 y 之间的关系上, 而是通过动点的位置随着时间 t 而改变的规律来确定. 当动点按照某种规律运动时, 与它对应的 (x, y) 也将随着 t 的不同而改变, 记为 $(x(t), y(t))$.

换言之, 若取 t 在区间 $[a, b]$ 内的一切值, 由 $(x, y) = (x(t), y(t))$ 表示的点总在一条曲线上; 反过来, 在这条曲线上的任意点可由 t 的某一值 t_0 通过 $(x(t), y(t))$ 完全确定, 则 $(x(t), y(t))$ 叫做曲线的参数方程, 记作

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b). \quad (4)$$

在式(4)中消去参数 t (如果可能的话), 就得到了曲线的普通方程. 下面是几个常用的参数方程:

- (1) 圆 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$;
- (2) 椭圆 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$;
- (3) 双曲线 $x = a \sec \theta, y = b \tan \theta$;
- (4) 抛物线 $x = at^2, y = 2at$;
- (5) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.

星形线的图形如图 1-4 所示.

例 5 说明下面两个参数方程在直角坐标系下所表示的图形:

$$(1) \begin{cases} x = a + a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a + a \sin \theta. \end{cases}$$

解 (1) 参数方程可表示为

$$(x - a)^2 + y^2 = (a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 = a^2,$$

则其在直角坐标系下表示圆心为 $(a, 0)$, 半径为 a 的圆.

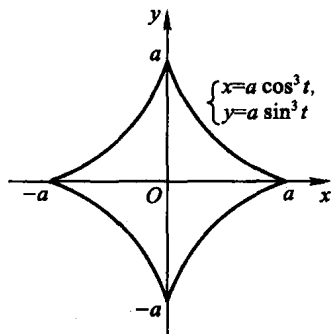


图 1-4

(2) 与(1)同理,此参数方程表示圆心为 $(0, a)$,半径为 a 的圆.

二、空间直角坐标系

过空间一点 O ,作三条互相垂直的数轴 Ox, Oy, Oz . 一般情况下,取相同的单位长度,且将三轴的交点 O 作为原点. 这三条轴分别叫做横轴,纵轴,竖轴或 x 轴, y 轴, z 轴,统称为坐标轴. 通常采用右手系,把 x 轴和 y 轴画在水平面上, z 轴竖立直上. 它们的方向可以由右手法则确定,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向.

三个坐标轴中任意两条可以确定一个平面,这样确定的三个平面统称为坐标面. x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面,类似地,由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面,分别叫做 yOz 面和 xOz 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限,含 x 轴, y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限. 在 xOy 面上方,从第一卦限开始,按逆时针方向依次确定的三个卦限分别叫做第二卦限,第三卦限和第四卦限. 第五至第八卦限,在 xOy 面下方,由第一卦限之下的第五卦限开始,按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用罗马数字 $I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII$,表示(见图 1-5).

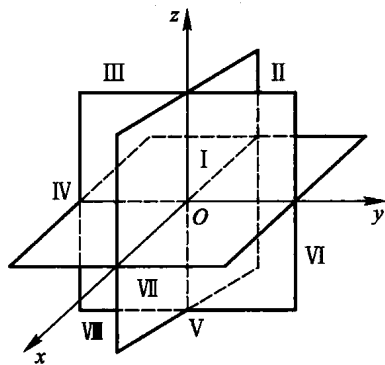


图 1-5

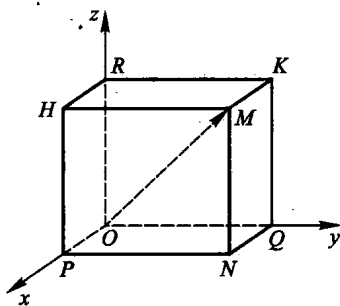


图 1-6

设 M 是空间中一点,过点 M 作三个平面分别与三个坐标轴垂直. 它们与三个坐标轴的交点依次记作 P, Q, R (见图 1-6),这三个交点在 x 轴, y 轴, z 轴上的坐标依次为 x, y, z ,则点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z) ;反过来,已知一个有序数组 (x, y, z) ,可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P ,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q ,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R ,然后过点 P, Q, R 分别作 x 轴, y 轴, z 轴的垂直平面,则这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 (x, y, z) 所确定的唯一的点. 这样就建立了空间点 M 和有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系. 这组数 (x, y, z) 叫做点 M 的坐标,分别称为点 M 的 x 坐标, y 坐标和 z 坐标,记作 $M(x, y, z)$.

三、空间两点之间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中的两点. 过点 M_1, M_2 各作三个分