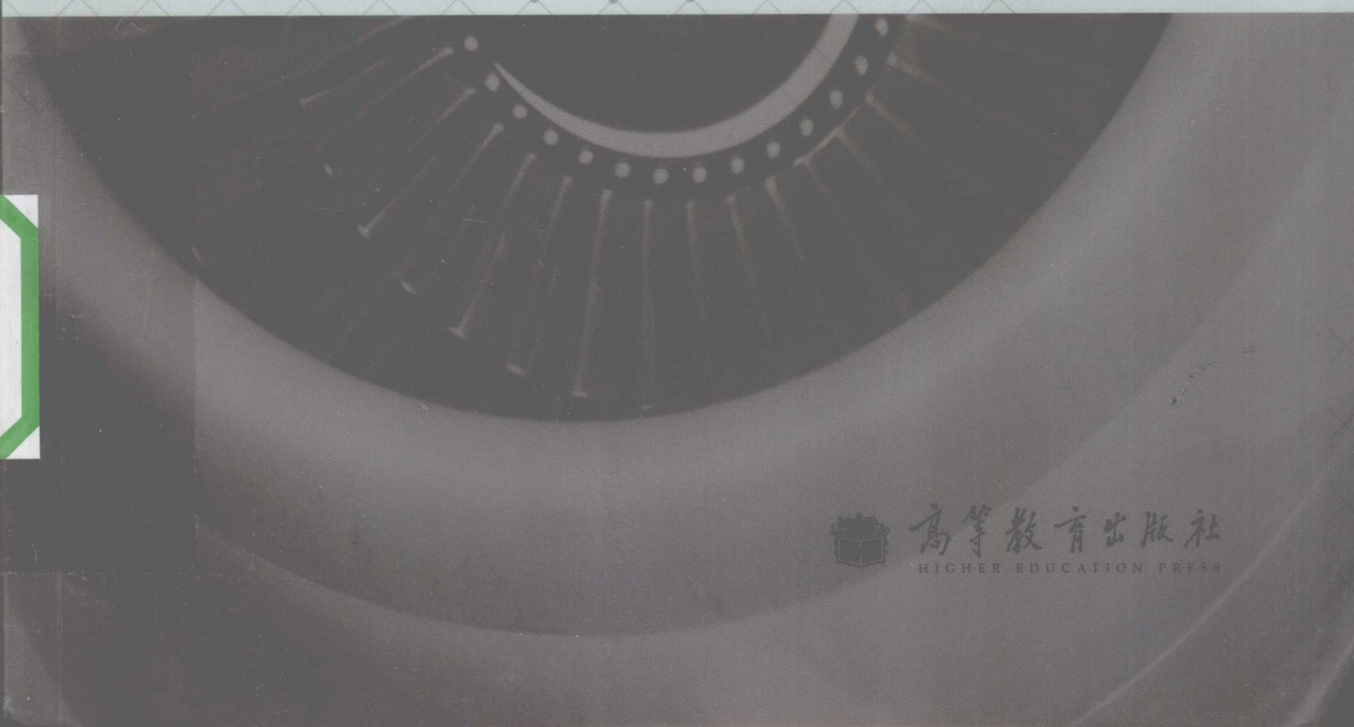
全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学（下）

主编　刘鹏林



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育"十一五"规划教材

高 等 数 学

Gaodeng　Shuxue

（下）

主编　刘鹏林

副主编　林元重　黄清兰

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材，分上、下两册，上册 90 学时，下册 54 学时。上册（第 1－7 章）包括极限、一元函数微分学、一元函数积分学、二元函数微分学、二元函数积分学、无穷级数、常微分方程；下册（第 8－14 章）包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量的分布及其数字特征、统计推断、数学实验举例。

本书适用于普通高等院校专科学生的高等数学课程，也可作为专升本自学或辅导用书，同时也可作为高职学生学习的参考教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下／刘鹏林主编．—北京：高等教育出版社，2010．7
ISBN 978－7－04－029228－2

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 109827 号

策划编辑　邓雁城　　**责任编辑**　王玲玲　　**封面设计**　于文燕　　**责任绘图**　尹文军
版式设计　余　杨　　**责任校对**　王效珍　　**责任印制**　尤　静

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120

购书热线　010－58581118
咨询电话　400－810－0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经　　销　蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷　北京四季青印刷厂

网上订购　http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育　http://www.widedu.com

开　　本　787×1092　1/16
印　　张　11
字　　数　260 000

版　　次　2010 年 7 月第 1 版
印　　次　2010 年 7 月第 1 次印刷
定　　价　16.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有　侵权必究

物料号　29228－00

前　　言

根据原国家教委颁布的高等工程专科高等数学课程教学要求，结合近年来高职高专教育发展的需要，我们编写了这套适于高职高专数学教学的“高等数学”教材。

本教材分上下两册，上册90学时，下册54学时。上册（第1—7章）包括极限、一元函数微分学、一元函数积分学、二元函数微分学、二元函数积分学、无穷级数、常微分方程；下册（第8—14章）包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量的分布及其数字特征、统计推断、数学实验举例。

本教材具有如下特点：

教材内容上本着“必需、够用”的原则，精简了某些知识量，降低了知识点的难度，增加了适用于工程、经济、社科等方面的数学知识，突出了实用性。

为了保证知识结构的完整性和科学性，对必须取用的部分抽象、繁杂的内容进行了简化，并加注*号，供学生选学。教学中，各专业也可以根据需要适当取舍。

教材编排上坚持“即学即用”的原则，节后安排了练习，章后附有补充练习，供程度不同的学生选择。练习题的选取强调了对数学方法的掌握和计算能力的训练。所有练习、补充练习都附有参考答案或提示，供读者参考。

结合学生的数学基础，注重了与中学数学知识的衔接，合理增删知识点，逐步扩大知识面。

教材末尾增加了数学实验举例（Matlab数学应用软件的介绍），以强化高等数学的应用力度，为高职高专学生进一步掌握并灵活应用高等数学提供了有力的支持。

参加本书编写的有林元重副教授（编写第1、2、3、11章）、黄清兰副教授（编写第6、8、9、10章）、刘鹏林教授（编写第4、5、7、12、13、14章）。

本书的编写参考了我们2004年编写的同名教材《高等数学》（北京工业大学出版社出版）和其他兄弟院校的教材，听取了教研室同行的意见，凝注了编者近几年来对大学生数学基础的调研成果和对高等数学的教学经验总结，高等教育出版社为本书的编写、出版也给予了大力帮助，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正。

编　者

2010年5月

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第8章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具,它在数学的许多分支和某些自然科学技术中均有广泛的应用,本章主要介绍行列式的有关概念、性质及其计算方法.

8.1 行列式的定义

8.1.1 二阶和三阶行列式

在初等数学中,对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

由消元法可求得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们引进如下四个数之间的特定算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称此算式为**二阶行列式**.

例如,$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 5 = -3$.

因此,当(1)式的系数组成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时,有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似地,我们引进特定算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

称此算式为**三阶行列式**,其值可用下图

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & & (-) & (-) & (-) \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 & & (+) & (+) & (+)
\end{array}
$$

记忆,即各实线联结的三个元素的乘积取"＋"号,各虚线联结的三个元素的乘积取"－"号,然后取它们的代数和,即为三阶行列式的值,称此计算三阶行列式的方法为对角线法.

由三阶行列式的定义,不难得出三元一次方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
\end{cases}
$$

当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,有解为

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \tag{2}
$$

其中

$$
D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.
$$

例 1　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

解　按对角线法有

原式$=2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1-1\times1\times3-2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2)=-23$.

例 2　解三元一次方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\
x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\
-x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1.
\end{cases}
$$

解　因为它的系数所组成的行列式

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2\times3\times(-2)+1\times1\times2+(-1)\times1\times(-1)-1\times3\times(-1)-(-1)\times1\times(-2)-2\times1\times2 \\
&= -12 \neq 0,
\end{aligned}
$$

所以,根据式(2)原方程组有解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=0,x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&1\\1&2&-2\end{vmatrix}=-12,D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&1\\-1&1&-2\end{vmatrix}=0,D_3=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&3&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=12.$$

为了要把上述结果推广到 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

的求解情形,下面我们引入 n 阶行列式的定义并讨论它的性质.

8.1.2 n 阶行列式的定义

定义 8.1 由 n^2(n 是正整数)个数排成的 n 行 n 列的算式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**.其值定义为

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(\text{按第 } i \text{ 行展开},i=1,2,3,\cdots,n)$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(\text{按第 } j \text{ 列展开},j=1,2,3,\cdots,n).$$

这里,a_{ij} 称为行列式 D_n 的元素,$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**余子式**,它是由 D_n 划去 a_{ij} 所在的行和列后剩下的元素按照原来的位置排成的一个 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

有时 D_n 简记为 D.

例如,在 $D_4=\begin{vmatrix}2&1&5&0\\3&4&7&1\\0&8&2&3\\4&3&1&1\end{vmatrix}$ 中,元素 $a_{32}=8$,其余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2&5&0\\3&7&1\\4&1&1\end{vmatrix},A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}2&5&0\\3&7&1\\4&1&1\end{vmatrix}.$$

由定义 8.1 容易得到一些特殊的行列式的值：

(1) $$D_4=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&0\\0&a_{22}&0&0\\0&0&a_{33}&0\\0&0&0&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&0\\0&a_{33}&0\\0&0&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0\\0&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

(2) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3　计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}-3&0&0&4\\1&2&1&0\\0&-1&0&1\\2&1&3&2\end{vmatrix}.$$

解　该行列式第一行“0”最多，由定义 8.1 可按第一行展开，即

$$\begin{aligned}D_4&=-3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&3&2\end{vmatrix}+4(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\2&1&3\end{vmatrix}\\&=(-3)\left[2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix}+1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}\right]-4(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}\\&=-3[2(0-3)-(-2-1)]+4(3-2)=13.\end{aligned}$$

例 4　计算五阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}0&1&3&0&0\\1&0&1&5&2\\4&3&2&0&0\\5&0&1&0&2\\0&-1&4&0&0\end{vmatrix}.$$

解　该行列式第四列有四个元素为零，由定义 8.1 可按第四列展开，即

$$D_5 = 5\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix},$$

上面行列式又按第四列展开得

$$D_5 = 5\cdot 2\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix},$$

再把上面行列式按第一列展开得

$$D_5 = -5\cdot 2\cdot 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 40(4+3) = 280.$$

思考

1. 如何计算二阶和三阶行列式?
2. 什么是余子式?什么是代数余子式?
3. n 阶行列式的值如何定义?

练习 8.1

1. 写出下列行列式中元素 a_{23} 和 a_{32} 的余子式和代数余子式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & 1 \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 4 & 2 \\ 11 & 20 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 9 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

3. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$,求 $f(x)=0$ 的根.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

4. 解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 = 3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

8.2 行列式的性质与计算

8.2.1 行列式的性质

我们知道,二阶行列式的展开式共有 2=2! 项,三阶行列式的展开式共有 6=3! 项,以此类推,n 阶行列式的展开式共有 n ! 项. 因此,在 n 比较大的情况下,要根据定义直接求一个 n 阶行列式的值将是非常困难的,为了简化行列式的计算,下面介绍行列式的性质.

设
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
把 D 的行与列互换,并记为 D^{T} ,即
$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
我们把行列式 D^{T} 叫做行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$. (可用数学归纳法证之,此处从略)

由性质 1 可知,行列式关于行成立的结论,关于列也成立,反之亦然. 因此,下面只对行的情况讨论其性质.

性质 2 若一个行列式中某一行(列)有公因子 k,则公因子 k 可以提到行列式符号的外面. 即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由定义 8.1 有
$$\begin{aligned} \text{左边} &= (ka_{i1})A_{i1} + (ka_{i2})A_{i2} + \cdots + (ka_{in})A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

由性质 2 易得

推论 1 若行列式的某一行(列)所有元素都等于零,则此行列式的值等于零.

性质 3 一个行列式的两行(列)互换,行列式的值只改变符号.(可用数学归纳法证之,此处从略)

由性质 3 易得

推论 2 一个行列式中若有两行(列)对应元素相等,则这个行列式的值等于零.

由性质 2 和推论 2 易得

推论 3 一个行列式中若某两行(列)元素对应成比例,则这个行列式的值为零.

性质 4 行列式的任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

即当 $i \neq k$ 时,有 $a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0(k, i = 1, 2, \cdots, n)$.

证 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

现把 D_n 中的第 i 行元素换成第 k 行元素,其他各行不变,即得

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

显然 D_0 与 D_n 只有第 i 行元素不同,其余各行元素都完全相同,所以 D_0 的第 i 行元素的代数余子式就是 D_n 的第 i 行元素的代数余子式 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$,现将 D_0 按第 i 行展开,得

$$D_0 = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}.$$

另一方面,因 D_0 的第 i 行与第 k 行元素相同,由性质 3 及推论 1 有 $D_0 = 0$,从而得

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0.$$

性质 5 如果行列式中某一行(列)的元素均为两个数之和,则该行列式可依该行(列)元素分为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　左边 $=(a_{i1}+b_{i1})A_{i1}+(a_{i2}+b_{i2})A_{i2}+\cdots+(a_{in}+b_{in})A_{in}$

$$=(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})+(b_{i1}A_{i1}+b_{i2}A_{i2}+\cdots+b_{in}A_{in})$$

= 右边.

性质 6　在一个行列式中，若把某一行(列)的元素乘以常数 k，再加到另一行(列)的对应元素上，则行列式的值不变.

证　设

$$D_n = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix},$$

把 D_n 的第 i 行乘以常数 k 加到第 j 行上，再利用性质 5 得

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

下面，我们用 (r_i, r_j) 表示第 i 行与第 j 行交换；用 (kr_j) 表示第 j 行乘以非零常数 k；用 (r_j+kr_i) 表示第 i 行乘以常数 k 加到第 j 行.

8.2.2　行列式的计算

例 1　计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & -7 \end{vmatrix}.$$

解

$$D_4 \xlongequal{(r_1,r_3)} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} \xlongequal{(r_3+(-2)r_1)} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 11 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(r_4+r_1)} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 11 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} \xlongequal{(r_3-11r_2)} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 51 & -42 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\left(r_4-\frac{7}{51}r_3\right)} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 51 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{51} \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot 51\cdot\left(-\frac{12}{51}\right) = 12.$$

例 2 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解 从第四行开始，后行减前行得

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[(r_3-r_2)]{(r_4-r_3)} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(r_4-r_3)} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是每一行都有一个元素 a，其余 $n-1$ 个元素都是 b，根据性质 6，把第二列加到第一列，行列式的值不变，再把第三列加到第一列，行列式的值也不变，一直下去，到第 n 列也加到第一列，即得

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

把上式第一行乘以-1加到其余各行,就有

$$D_n=[a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 4 计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d_1 \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 因为

$$D_5^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d_1 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d_1 & 0 \end{vmatrix},$$

且由性质 1 知,$D_5^{\mathrm{T}}=D_5$.

另外,若从 D_5 的每一行提取公因子-1,则有 $D_5=(-1)^5D_5^{\mathrm{T}}=-D_5^{\mathrm{T}}$,所以 $D_5=-D_5^{\mathrm{T}}=-D_5$,即 $D_5=0$.

思考

1. 行列式有哪些性质?
2. 怎样利用行列式的性质计算行列式的值?

练习 8.2

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -2 & \frac{4}{3} \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

2. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$；　　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$（此式称为三阶范德蒙德行列式）.

8.3 克莱姆法则

含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1}$$

将线性方程组(1)的系数组成的行列式记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替 D 中的第 j 列得到的行列式记为 D_j，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(j=1,2,\cdots,n),$$

称 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为 D 的**置换行列式**.

定理 8.1(克莱姆法则)　若线性方程组(1)的系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组存在唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

即

$$x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n).$$

证　用 D 中第 j 列的各元素的代数余子式

$$A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$$

依次乘方程组(1)的第一、第二、……第 n 个方程，再将等式两端分别相加，整理得

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1+\cdots \\ &+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})x_j+\cdots \\ &+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n \\ &=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}. \end{aligned}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com