普通高等教育"十一五"国家级规划教材

实变函数与泛函分析概要

（第四版）第二册

王声望 郑维行 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

实变函数与泛函分析概要

（第四版）第二册

王声望 郑维行 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

实变函数与泛函分析概要. 第2册 / 王声望, 郑维行编. —4版. —北京：高等教育出版社，2010.7

ISBN 978-7-04-029219-0

Ⅰ.①实… Ⅱ.①王… ②郑… Ⅲ.①实变函数－高等学校－教材②泛函分析－高等学校－教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 078438 号

策划编辑 李 蕊 责任编辑 张耀明 封面设计 王凌波
版式设计 王艳红 责任校对 王效珍 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1990年5月第1版
开　　本	850×1168 1/32		2010年7月第4版
印　　张	8.875	印　　次	2010年7月第1次印刷
字　　数	220 000	定　　价	17.10元

物料号 29219-00

内容提要

本书第四版除了尽量保持内容精选、适用性较广外，尽力做到可读性强，便于备课、讲授及学习。修订时吸收了教学中的建议，增添了少量重要内容与习题，一些习题还给出提示。

全书分两册。第一册包含集与点集、勒贝格测度、可测函数、勒贝格积分与函数空间 L^p 五章，第二册介绍距离空间、巴拿赫空间与希尔伯特空间、巴拿赫空间上的有界线性算子，以及希尔伯特空间上的有界线性算子四章。考虑到现行学时的安排，第二册篇幅作了较大调整。

本书每章附有小结，指出要点所在。习题较为丰富，供教学时选用。

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校数学类专业的教学用书，也可作为有关研究生与自学者的参考书。学习本书的预备知识为数学分析、线性代数、复变函数的主要内容。

第四版前言

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材,在第三版的基础上修订编写而成。自2005年第三版以来,收到很多读者提出的宝贵意见,本校师维学、代雄平、栗付才、钟承奎几位教授及南京大学2006届数学系的同学在教学和使用过程中,都对本书提出了不少有益的意见和建议。本次修订在充分吸收这些意见和建议的基础上,考虑到现行学时的安排,在篇幅上进行了较大的调整,增加了关于依测度基本列概念与积分列的勒贝格-维它利定理,删去广义函数、解析算子演算、酉算子、正常算子的谱分解定理等内容,习题量进行了扩充以供选用,一些要点给予特别提示以利教学,对理论的论述、安排与例证均进行了推敲使其可读性更强,便于备课、讲授与学习。同时,还注意吸取国内外一些新教材的长处。

本书第一版时的初稿曾得到程其襄、严绍宗、王斯雷、张莫宙、徐荣权、俞致寿教授等的细心审查与认真讨论,曾远荣、江泽坚、夏道行教授专门审阅了手稿,函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祜、华茂芬等同志也协助阅读了手稿,并参加了部分修改工作。在此谨向所有对本书提出意见和建议的专家、广大教师与读者表示衷心感谢,书中一丝一毫的改进均是与他们分不开的。虽然我们作了一定的努力,但书中的谬误想必难免,盼望专家与读者们不吝指正。

编　者

2010年10月

第三版前言

本书自第二版出版以来，经过不少学校教师使用，普遍感到基本上能适合教学要求，但也提出一些宝贵建议。我们在这次修订时认真地参考这些建议作了修改。例如，在内容上删去了非线性泛函部分，增加了 Banach 空间解析算子演算，对 Hilbert 空间自伴紧算子知识作了较详细阐述。此外，对一些不恰当之处也进行了修正，将不少术语改为通行的用词，如将直交改为正交，共轭空间改为对偶空间，自共轭算子改为自伴算子等等。由于水平所限，时间较紧，错误、遗漏之处在所难免，敬希广大读者不吝赐教。在此我们要感谢高等教育出版社王瑜、李蕊和崔梅萍等编辑的热心支持与很多教师、读者的宝贵建议，还要感谢 ATA 编辑部朱燕在打印中的辛勤劳动。

编　者

2004 年 10 月于南京

目　录

第　二　册

第　二　册

第六章　距离空间

§1　距离空间的基本概念

在前面几章中，我们陆续讨论了 n 维欧几里得(Euclid)空间 $\mathbf{R}^n$，L^2 空间，L^p 空间等. 以 $\mathbf{R}^n$ 为例，我们在其中定义了**距离** ρ(见第一章 §4)，它满足下面三个条件：

(i) **非负性**：对任何 $x,y\in\mathbf{R}^n$，$\rho(x,y)\geqslant 0$，而且 $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$；

(ii) **对称性**：对任何 $x,y\in\mathbf{R}^n$，有 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(iii) **三角不等式**：对任何 $x,y,z\in\mathbf{R}^n$，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

如果我们仔细分析一下 $\mathbf{R}^n$ 中的许多重要内容(如收敛)与结论(如极限的唯一性)，就可以发现，实质上它们仅与距离 ρ 的条件(i)～(iii)有关. 再以第五章中介绍过的空间 $L^p(F)$ (F 为可测集，$1\leqslant p<\infty$)为例，首先在其中定义了范数，然后利用范数定义了距离：

$$\rho(x,y)=\left(\int_F |x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\quad (x,y\in L^p(F)).$$

读者不难发现，$L^p(F)$中的收敛以及与之有关的很多结论，实质上也与其中的距离满足条件(i)～(iii)有关. 因此，为了在一般的非空集合中引进收敛，一个可行的办法就是先引进距离. 为了引进距离，则应以条件(i)～(iii)为基础. 因它们反映了事物的本质.

1.1 距离空间的定义及例

定义 1.1 设 X 为一非空集合,如果对于 X 中任给的两个元素 x,y,均有一个确定的实数,记为 $\rho(x,y)$,与它们对应且满足下面三个条件:

(i) **非负性**: $\rho(x,y)\geqslant 0$, $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(ii) **对称性**: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式**: $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$,这里 z 也是 X 中任意一个元素.

则称 ρ 是 X 上的一个**距离**,而称 X 是以 ρ 为距离的**距离空间**,记为 (X,ρ). 条件(i)~(iii)称为**距离公理**. 距离空间中的元素又称为**点**. 在不会引起混淆的情况下,我们将 (X,ρ) 简记为 X.

现在设 X 为一距离空间,以 ρ 为距离. 又设 A 为 X 的一非空子集,则 A 按照距离 ρ 也是一个距离空间,称它为 X 的**子空间**. 如果 $A\neq X$,则称它为 X 的**真子空间**.

大家将会看到,一般的距离空间有很多与 $\mathbf{R}^n$ 相似的性质,但也有很多实质的不同,这些不同更应引起我们的重视.

其次,在任何一个非空集合 X 上,我们都可以定义距离. 例如,对任一 $x\in X$,我们规定 $\rho(x,x)=0$,而对任给的 $y\in X$,只要 $y\neq x$,便规定 $\rho(x,y)=1$. 显然 ρ 满足距离的全部条件,因此 X 按照距离 ρ 是一个距离空间,我们称它为**离散的**距离空间.

例 1 (第一章 §4) **n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$**

记 $\mathbf{R}^n$ 为所有 n 维实向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 构成的集合. 我们已经指出,在 $\mathbf{R}^n$ 中如果定义向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 与向量 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 之间的距离如下:

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k-\eta_k\right|^2\right)^{1/2},\tag{1}$$

则 ρ 满足定义 1.1 中的全部条件. 在第一章中,我们没有逐一验证这些条件. 为清楚起见,今以三角不等式为例加以验证. 为此先证

明柯西(A. Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \tag{2}$$

其中 $a_k, b_k (k=1,2,\cdots,n)$ 均为实数. 任取实数 λ,则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

右端是 λ 的二次三项式. 上述不等式则表明它对 λ 的一切实数值都是非负的,故其判别式不大于零,即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

柯西不等式(2)成立. 由这个不等式得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中任取点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$,并在上述不等式中令 $a_k=\xi_k-\zeta_k$, $b_k=\zeta_k-\eta_k (k=1,2,\cdots,n)$便得到三角不等式:

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

因此 $\mathbf{R}^n$ 按距离(1)是一个距离空间.

在集合 $\mathbf{R}^n$ 中,我们还可以引入如下的距离:

$$\rho_1(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k - \eta_k|. \tag{1'}$$

那么 ρ_1 也满足距离的全部条件,故 $\mathbf{R}^n$ 按照距离 ρ_1 也是一个距离空间(见本章习题).

例 1 告诉我们,在一个集合中定义距离的方式不是唯一的. 一

般说,如果在一个非空集合 X 中定义了距离 ρ 与 ρ_1,当它们不同时,我们则应如实地将 (X,ρ)、(X,ρ_1) 作为两个不同的距离空间来对待.

类似于例 1 中的 $\mathbf{R}^n$,我们还可以考虑复数的情形. 假设 $\mathbf{C}^n$ 是由所有 n 维复向量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

构成的集合. 对 $\mathbf{C}^n$ 中的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,我们仍旧用(1)定义它们之间的距离,即

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k-\eta_k\right|^2\right)^{1/2}.$$

与实数情形类似,可以证明复数情形的柯西不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k b_k\right|\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^2,$$

其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为复数.

由柯西不等式可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^2\right)^{1/2}.$$

于是又可得到三角不等式

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

这里 x,y,z 均属于 $\mathbf{C}^n$. 因此按照(1)定义的距离 ρ,$\mathbf{C}^n$ 是一个距离空间.

今后如不特别声明,均取(1)作为 $\mathbf{R}^n$,$\mathbf{C}^n$ 中的距离.

例 2　空间 $C[a,b]$

考察定义在 $[a,b]$ 上所有实(或复)连续函数构成的集合 $C[a,b]$. $C[a,b]$ 中任意两个元素 x,y 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|x(t)-y(t)\right|,\tag{3}$$

则 $C[a,b]$ 按照(3)中的距离 ρ 是一个距离空间. 距离公理中的条件(i)与(ii)是明显的. 我们仅验证三角不等式. 设 $x,y,z\in C[a,b]$,则

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\ &=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

三角不等式成立. 故 $C[a,b]$ 按照(3)中的距离 ρ 是一个距离空间.

例 3 $L^p(F)$ ($1\leqslant p<\infty$, $F\subset\mathbf{R}$,且为可测集)

在第五章中,我们已比较详细地讨论了空间 $L^p(F)$,这里不打算重复. 大家知道,两个几乎处处相等的 p 幂可积函数在 $L^p(F)$ 中视为同一元素. 现在仅仅指出,如果对 $L^p(F)$ 中任意两个元素 x, y,令

$$\rho(x,y)=\left(\int_F|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},\tag{4}$$

则 ρ 满足距离公理的全部条件(见第五章),因此 $L^p(F)$ 按照(4)中的距离 ρ 是一个距离空间.

例 4 **空间 $L^\infty(F)$**

在第五章中也已介绍了空间 $L^\infty(F)$. 现在我们对它进行比较详细的讨论,主要目的是证明按照由下面的(5)式定义的距离 ρ, $L^\infty(F)$ 是一个距离空间.

称定义在可测集 F 上的可测函数 $x(\cdot)$ 是**本性有界**的,如果存在 F 的某个零测度子集 F_0,使得 $x(\cdot)$ 在集合 $F\setminus F_0$ 上有界. F 上所有本性有界可测函数构成的集合用 $L^\infty(F)$ 表示,几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看作同一元素. 对 $L^\infty(F)$ 中任意两

个元素 x,y,令

$$\rho(x,y)=\inf_{\substack{mF_0=0\\F_0\subset F}}\{\sup_{t\in F\setminus F_0}|x(t)-y(t)|\}$$

$$=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in F}|x(t)-y(t)|. \tag{5}$$

需要验证 ρ 满足距离的三个条件. 我们也只验证三角不等式.

设 $x,y,z\in L^{\infty}(F)$. 任给 $\varepsilon>0$,存在 $F_1,F_2\subset F, mF_1=mF_2=0$,使得

$$\sup_{t\in F\setminus F_1}|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x,z)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in F\setminus F_2}|z(t)-y(t)|\leqslant\rho(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $m(F_1\cup F_2)=0$,于是

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leqslant\sup_{t\in F\setminus(F_1\cup F_2)}|x(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in F\setminus(F_1\cup F_2)}|x(t)-z(t)|+\\&\quad\sup_{t\in F\setminus(F_1\cup F_2)}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in F\setminus F_1}|x(t)-z(t)|+\\&\quad\sup_{t\in F\setminus F_2}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)+\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$,便得到

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

即三角不等式成立. 因此按照(5)中定义的距离 ρ,$L^{\infty}(F)$确为一个距离空间.

例 5　空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$

令 l^p 是由满足下列不等式的实(或复)数列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,$

$\xi_n,\cdots\}$构成的集合：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty.$$

我们的目的是证明 l^p 按照下面的(9)式定义的距离为距离空间. 为清楚起见,先设 $1<p<\infty$. 在第五章§1的不等式 $u^\alpha v^\beta\leqslant\alpha u+\beta v(u\geqslant 0,v\geqslant 0)$ 中令 $\alpha=\dfrac{1}{p},\beta=\dfrac{1}{q}$,这里 p,q 互为相伴数,于是

$$u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{u}{p}+\frac{v}{q}.\tag{6}$$

任取 l^p 中的元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 l^q 中的元素 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 对于给定的 $n=1,2,3,\cdots$,取

$$u=\frac{|\xi_n|^p}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p};\quad v=\frac{|\eta_n|^q}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q}.$$

将以上的 u,v 代入(6)中,并对 n 求和再经过简单计算,便有

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

再将上式左端分母中的 k 换成 n,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{1/q}.\tag{7}$$

我们也称(7)为**赫尔德(O. Hölder)不等式**.

今任取 l^p 中的两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 由不等式 $|a+b|^p\leqslant[|a|+|b|]^p\leqslant[2\max\{|a|,|b|\}]^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$(这里 a,b 均为实(或复)数)可知,$\{\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots\}$ 也属于 l^p. 于是 $\{|\xi_1+\eta_1|^{p/q},|\xi_2+\eta_2|^{p/q},\cdots,|\xi_n+\eta_n|^{p/q},\cdots\}$ 属于 l^q. 由赫尔德不等式,有