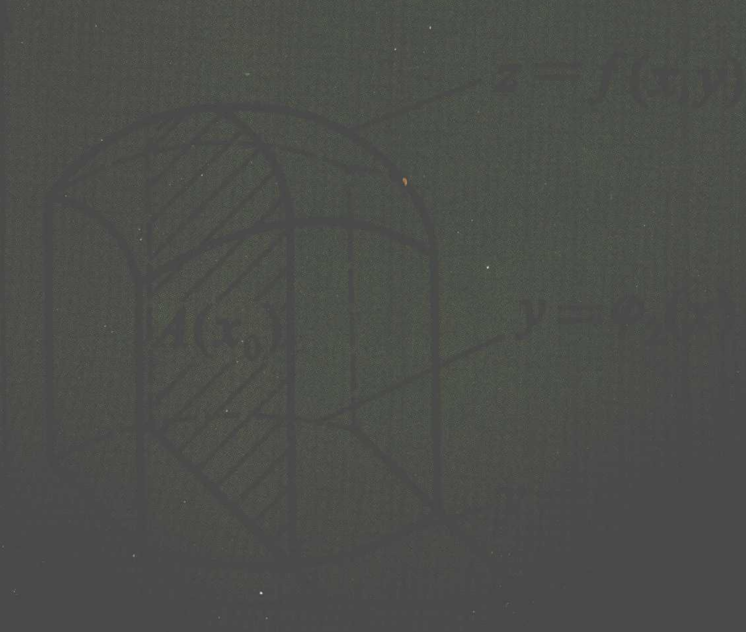
WUTP
高等学校教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

陈盛双 梅汇海 主编



武汉理工大学出版社
WUTP wuhan University of Technology Press

高等学校教材

高等数学

主　编　陈盛双　梅汇海
副主编　何　朗　谷亭亭
　　　　冯光庭　周宏艺

武汉理工大学出版社
·武汉·

内 容 简 介

本书是根据《高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收国内外教学改革成果编写而成的.

全书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何初步、多元函数微分学、二重积分与无穷级数等内容，每节均配有习题，每章配有总复习题，书末附有习题参考答案，便于教学安排.

本书结构严谨、逻辑清晰，注重应用，例题丰富，实用性强，便于自学，可作为高等学校工科、经济管理类专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/陈盛双，梅汇海主编．—武汉：武汉理工大学出版社，2010.8
ISBN 978-7-5629-3256-7

Ⅰ.① 高…
Ⅱ.① 陈… ②梅…
Ⅲ.① 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.① 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 167498 号

出　版：武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路 122 号　邮编：430070)
发　行：武汉理工大学出版社发行部
印　刷：武汉理工大印刷厂
开　本：787×960　1/16
印　张：22.25
字　数：436 千字
版　次：2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　数：3000 册
定　价：33.00 元
(本书如有印装质量问题，请向承印厂调换)

前　言

本书是以教育部制订的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收多年来教学实践和教学改革成果而编写的，在编写过程中，力求贯彻“够用、管用、会用”的“三用”原则，并充分考虑了高等数学课程教学时数减少的趋势，本书具有以下特色：

1. 突出高等数学的基本思想和基本方法. 编写本书的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握高等数学的思想方法，帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果，在教学理念上不过分强调严密的论证、研究过程，而更多的是让学生体会高等数学的本质和思想.

2. 加强基本能力培养. 本书的例题、习题较多，叙述比较详细、文字力求通俗易懂，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，及时指出在解题中一些在概念上与运算上易犯的错误，最后达到提高解题能力的目的.

3. 贴近实际应用. 本书对概念的引出，力求从身边的实际问题出发，自然地引出，使读者易于接受. 例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学，工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习高等数学的兴趣和利用高等数学解决实际问题的能力. 因此，全书一直渗透着数学建模的思想.

4. 本书既考虑到一般理工科专业对高等数学的需要，也兼顾经济类专业的特点. 书中注有“*”号的内容可供不同学时要求的专业选用.

本书由陈盛双、梅汇海主编，参加编写的有陈盛双、梅汇海、何朗、谷亭亭、冯光庭、周宏艺，全书由陈盛双负责统稿定稿.

本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材，武汉理工大学出版社的领导和编辑对本书的编辑出版给予了热情支持和帮助，尤其是陈军东、王兆国等同志在本书的编辑和出版过程中付出了大量汗水，为了保证本书的质量，他们做了很多卓有成效的工作；武汉理工大学数学系彭斯俊老师也提出了许多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限加之时间比较仓促，教材中难免存在不妥之处，敬请专家、同行及读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

编　者
2010. 7

目 录

1 函数与极限

函数是数学的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象. 极限概念在微积分中是一个非常重要的概念，微积分中其他的一些概念如导数、积分等都是建立在它的基础之上的，极限方法也是微积分的基本分析方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1 函 数

1.1.1 集合与区间

1. 集合

一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为集合(或简称集). 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

下面是几个集合的例子：

例 1 公元 2010 年元月 1 日在中国出生的人.

例 2 直线 $x+y=1$ 上所有的点.

例 3 方程 $x^2+1=0$ 的实根.

由有限个元素组成的集合称为有限集，如例 1；由无穷多个元素组成的集合称为无限集，如例 2；不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，如例 3.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\,\overline{\in}\,A$ 或 $a\notin A$.

集合的表示法有两种. 一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

另一种是描述法，若集合 M 是具有某种特征 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如，上述例 2 的集合可表示成

$$\{(x,y) \mid x + y = 1, x, y \text{ 是实数}\}.$$

元素为数的集合称为**数集**. 通常用 **N** 表示自然数集，用 **Z** 表示整数集，**Q** 表示有理数集，**R** 表示实数集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，就说 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B \supset A$（读作 B 包含 A）. 例如 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$. 例如，设

$$A = \{1,2\}, B = \{2,1\}, C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

则 $A = B = C$.

2. 区间

区间是用得较多的一类数集.

设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$. 数集 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ 称为**开区间**，数集 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，数集 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 和 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 称为**半开区间**，a, b 称为区间的端点，$b - a$ 称为区间的长度. 这些区间都称为**有限区间**. 它们均可用数轴上长度有限的线段来表示. 例如，图 1-1(a) 与 (b) 分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b).

此外还有所谓**无限区间**. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷）及 $-\infty$（读作负无穷），可类似地表示无限区间，例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)，(d) 所示.

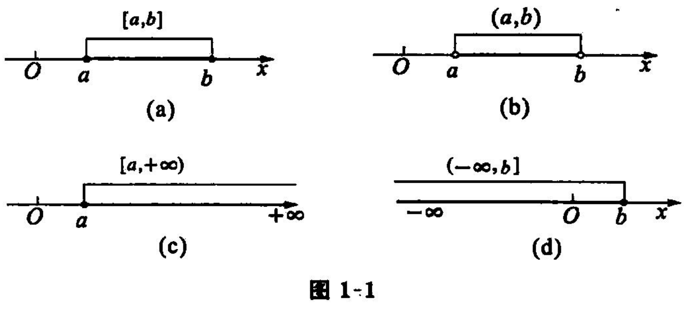


图 1-1

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a,δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

或

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径. 它在数轴上表示以 a 为中心，长度为 2δ 的对称开区间(图 1-2).

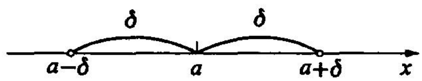


图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

1.1.2 函数的基本概念及其特性

1. 函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 例如，圆的面积 A 与它的半径 r 之间的关系由公式 $A=\pi r^2$ 给定，当半径 r 在区间 $[0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由公式就可以确定圆面积 A 的相应数值. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，数集 D 叫做这个函数的**定义域**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数的**值域**，记作 W，即

$$W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}.$$

从函数的定义可以看到，函数概念有两个要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就不同.

对于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 但如果只是抽象地研究用算式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间

$(-1,1)$.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).其中,用图形表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}.$$

称为函数 $y=f(x)$的图形(图 1-3).

下面举几个函数的例子.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-4 所示.

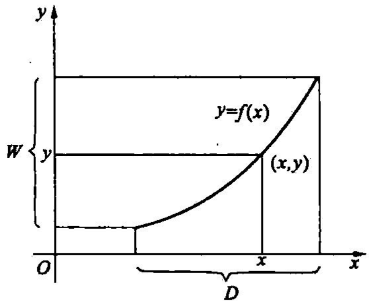


图 1-3

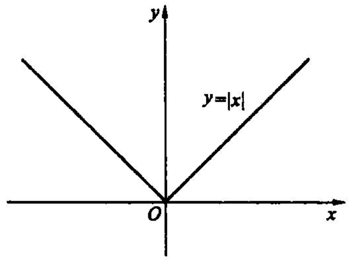


图 1-4

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{当 } x>0, \\ 0, & \text{当 } x=0, \\ -1, & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1-5 所示.

例 6 取整函数

$$y=[x].$$

这里,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.例如,

$$[-3.5]=-4,[-1]=-1,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3.$$

容易看出,函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\mathbf{Z}$,它的图形如图 1-6 所示,这个图形也称为阶梯曲线.

例 7 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{0,1\}$,但它没有直观的图形表示.

从上面的例子中可以看到,有时一个函数要用几个式子表示.这种在自变量

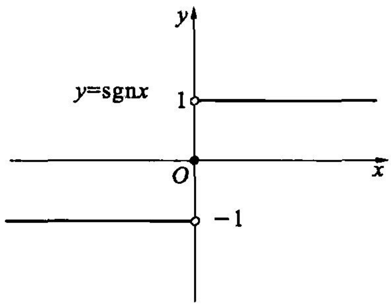


图 1-5

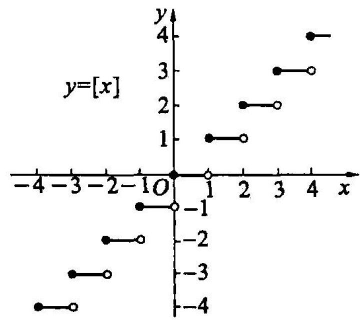


图 1-6

的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**. 分段函数在实际问题中是经常出现的.

例 8 火车站行李收费规定如下：当行李不超过 50 千克时，按每千克 0.15 元收费，当超出 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 若质量多 x 千克的行李收费为 y 元，则

$$y=\begin{cases}0.15x, & 0<x\leqslant 50,\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50.\end{cases}$$

这是一个定义在$(0,+\infty)$上的分段函数，它给出了行李收费与行李质量之间的函数关系. 这种通过建立变量之间的函数关系来描述实际问题的方法，具有普遍的数学意义.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$在 X 上**无界**.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对任一实数 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界，但在区间$[1,+\infty)$内是有界的.

(2) 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的；相反，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，但 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的(图 1-7).

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的(图 1-8).

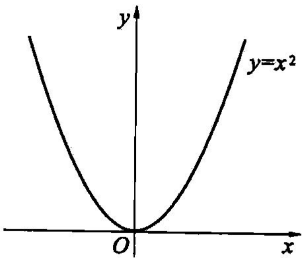


图 1-7

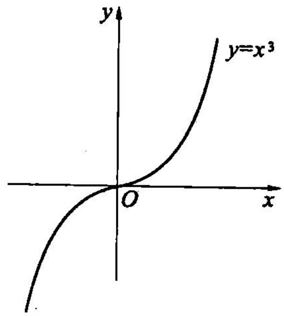


图 1-8

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**；如果对于任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x) =- f(x),$$

则称 $f(x)$为**奇函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数. 函数 $y=\cos x$ 是偶函数. 函数 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的(图 1-9)；奇函数的图形关于原点是对称的(图 1-10).

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在常数 $T>0$，使得对于任一 $x\in D$，有$(x+T)\in D$，且

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$为**周期函数**，T 称为 $f(x)$的**周期**. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

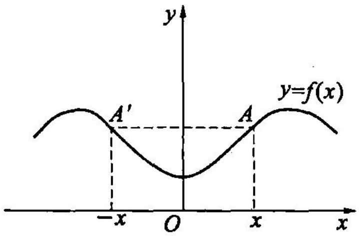


图 1-9

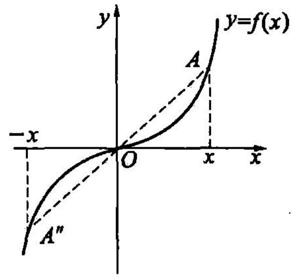


图 1-10

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；

(3) $y=\ln(x+1)$；　　(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$.

2. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}.\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

3. 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$；　　(2) $y=1+\cos\pi x$；

(3) $y=\tan(4x)$；　　(4) $y=\sin^2 x$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$；

(3) $y=x+\sin x$；　　(4) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$.