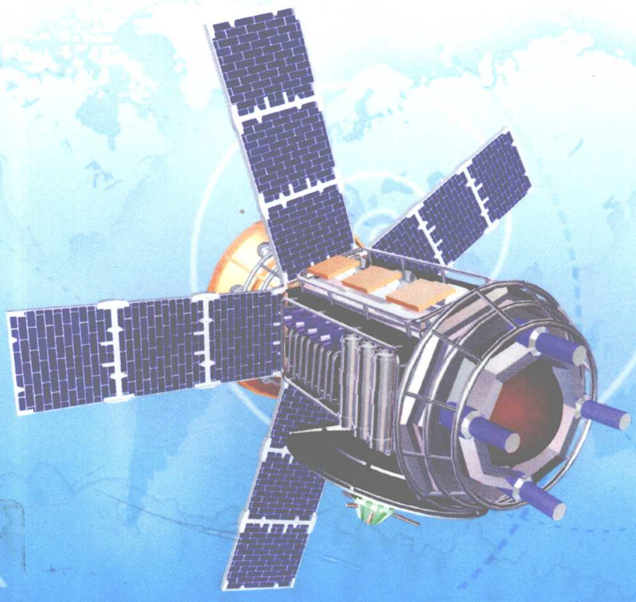
世界科普经典集萃

数学漫谈

主编：梁金豹



中国戏剧出版社

世界科普经典集萃·科普篇

数学漫谈

主编:梁金豹

中国戏剧出版社

图书在版编目(CIP)数据

世界科普经典集萃/梁金豹主编. —北京:中国戏剧出版社,2004.3

ISBN 7-104-01935-9

Ⅰ.世… Ⅱ.梁… Ⅲ.①科学幻想小说—作品集—世界—近代②科学幻想小说—作品集—世界—现代
Ⅳ.I14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 025979 号

世界科普经典集萃 梁金豹 主编

中 国 戏 剧 出 版 社 出 版

(北京市海淀区北三环西路大钟寺南村甲 81 号)

(邮政编码:100086)

新华书店总店北京发行所 经销

河北省三河市印务公司 印刷

4500 千字 850×1168 毫米 1/32 开本 337.5 印张

2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷

印数:1-1000 册

ISBN 7-104-01935-9/I·777

全套定价:675.00 元(三十六册)

目　录

MULU

第一章　希波克拉底的求新月形面积定理

论证数学的诞生

我们对人类远古时代数学发展的认识，在很大程度上依靠推测，是根据零星的考古资料、建筑遗迹和学者的猜测拼凑而成的。显然，随着公元前 15000 至 10000 年间农业的发明，人类不得不应付两个最基本的数学概念（至少是以初步形式）：量和空间。量的概念，或“数”的概念是在人们数羊或分配粮食时产生的，经过历代学者几百年的推敲和发展，量的概念逐渐形成了算术，后来又发展成代数。同样，最初的农夫也需要认识空间关系，特别是就田地和牧场的面积而言，随着历史的发展，这种对空间的认识就逐渐形成了几何学。自从人类文明之初，数学的两大分支——算术和几何，就以一种原始的形式共存。

然而，这种共存并非永远和谐。数学史上一个持续的特征就是在算术与几何之间始终存在着紧张关系。有时，一方超过了另一方，有时，另一方又比这一方在逻辑上更占优势。而一个新发现，一种新观点，都可能会扭转局面。也许，有人会感到奇怪，数学竟然像美术、音乐或文学一样，在其漫长而辉煌的历史进程中，同样存在着激烈的竞争。

我们在古埃及文明中，发现了数学发展的明显迹象。古埃及人研究的重点是数学的应用方面，以数学作为工具，促进贸易、农业和日益复杂的日常生活其他方面的发展。根据考古记载，在公元前 2000 年以前，埃及人已建立了原始数系，并具备了某些有关三角

形和棱锥体等的几何概念。例如，据传说，古埃及建筑师用一种非常巧妙的方法确定直角。他们把 12 段同样长的绳子相互连成环状(如图 1.1 所示)，把从 B 到 C 之间的五段绳子拉成直线，然后在 A 点将绳子拉紧，于是就形成了直角 BAC。他们将这种构形放在地上，让工人们按照这个构形在金字塔、庙宇或其他建筑的拐角处建成标准的直角。

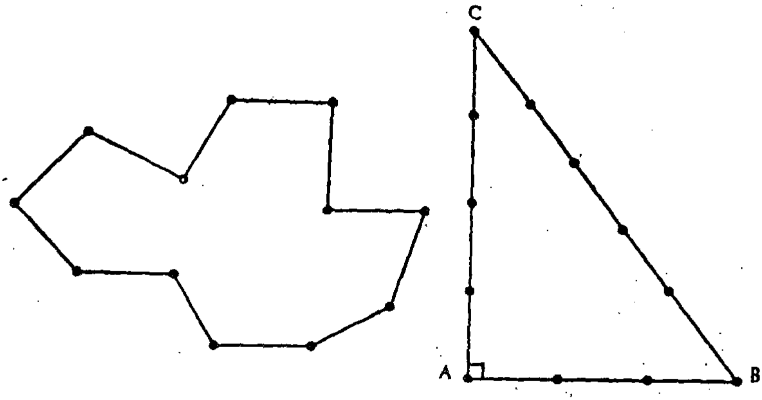


图 1.1

这种构图表明，古埃及人已对直角三角形的毕达哥拉斯勾股弦关系有所认识。他们似乎懂得，边长为 3、4 和 5 的三角形肯定会含有直角。当然，$3^2+4^2=9+16=25=5^2$，我们从中可以看到在所有数学关系中最重要的关系之一——勾股关系的早期曙光（见图 1.2）。

从技术角度说，古埃及人的这种认识还不是勾股定理本身。勾股定理申明，“如果△BAC 是直角三角形，则 $a^2=b^2+c^2$”。而古埃及人的认识则是勾股定理的逆定理，“如果 $a^2=b^2+c^2$，则△BAC 是直角三角形”。也就是说，关于命题“如果 P，则 Q”，对其相关命题“如果 Q，则 P”，我们称之为逆命题。我们将会看到，一个完全正确的命题，其逆命题可能是错误的，但著名的勾股

定理则不然，不论正命题，还是逆命题，都是正确的。实际上，这些就是我们将在下一章讨论的“伟大定理”。

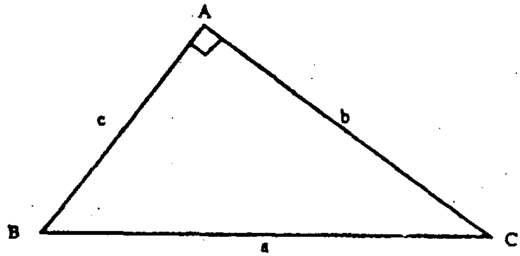


图 1.2

虽然古埃及人对 3-4-5 直角三角形的几何性质有所认识，但他们是否具有更广义的理解，例如，对于同样含有直角的 5-12-13三角形或 65-72-97 三角形（因为在这两个三角形中，都是 $a^2=b^2+c^2$），则还是个疑问。更重要的是，没有迹象表明，古埃及人是如何证明这些关系的。也许，他们掌握某些逻辑论证，以支持他们对 3-4-5 三角形的观察；也许，他们仅仅是靠反复试验。但无论如何，在埃及的文字记载中都没有发现通过严密的逻辑推理，证明一般数学规律的迹象。

下面的古埃及数学例子也许可以给人以启发：这是他们发现截棱四棱锥体积的方法——即一个用平行于底面的平面截去顶部的四棱锥体（见图 1.3）。这种几何体如今叫做正四棱台。发现这种棱台体积的方法在公元前 1850 年的所谓“莫斯科纸莎草书”中有所记载：

“如果你被告知：一个截棱棱锥体，垂直高为 6，下底边长为 4，上底边长为 2。则你取 4 的平方，得结果为 16。你将 4 加倍，得结果 8。你取 2 的平方，得结果 4。你将 16、8 和 4 相加，得 28。

你取6的三分之一，得结果2。你取28的2倍得56。看，是56。你会发现答案是正确的。”

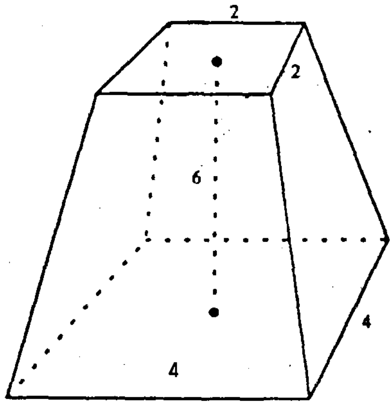


图 1.3

这段描述十分精彩，确实得出了棱台体积的正确答案。但是，请注意，它的计算方法却不是普遍适用的。这种方法没有导出一个一般公式，以适用于其他尺寸的棱台。古埃及人为计算不同尺寸棱台的体积，或许不得不比照这个例子重新演算一番，而这个计算过程又让人感到有点儿混乱不清。我们现代的计算公式就简单明了得多：

$$V=\frac{1}{3}h\ (a^2+ab+b^2)$$

公式中，a为正方形下底边长，b为正方形上底边长，h是棱台的高。更令人遗憾的是，没有任何资料证明古埃及人的方法为什么会得出正确的答案，他们仅仅留下了简单的一句话“你会发现答案是正确的”。

从一个特殊例子引出包罗万象的结论，很可能是危险的，而历史学家注意到，在法老统治下的埃及这种独裁社会，必然会产生这

种武断的数学方法。在古埃及社会，民众无条件地服从他们的君主。由此推断，当时，如果提出一种官方的数学方法，并断言"你会发现答案是正确的"，则埃及臣民是不会要求对这种方法为什么正确作出更详尽的解释的。在法老统治的土地上，民众只能惟命是听，让你怎么做就怎么做，不论是建筑巨大的庙宇，还是解答数学题，一概如此。那些敢于怀疑现体制者必然不得善终。

另一处伟大的古代文明（或者更准确地说，另几处文明）在美索不达米亚蓬勃发展，并产生了比古埃及先进得多的数学。例如，巴比伦人已能解出带有明显代数特征的复杂数学题。现存称为"普林顿"的楔形文字泥版书322部（写作年代大约在公元前1900至1600年之间）表明，巴比伦人已明确理解了毕达哥拉斯勾股定理，其理解深度远远超过了古埃及人。他们懂得5－12－13三角形或65－72－97三角形（或更多）都是直角三角形。除此以外，他们还为他们的数系创造了一种复杂的进位系统。当然，我们都习惯于十进位数系。显然，十进位制是从人类有十个手指引申出来的。所以，似乎有点儿奇怪的是，巴比伦人选择了60进位制。当然，没有人会认为这些古巴比伦人长有60个手指，但他们选定的60进位制却仍然用于我们今天的时间（一分钟60秒）和角度测量（在一个圆中，$6\times60^\circ=360^\circ$）。

然而，美索不达米亚人的所有成就也同样只是"知其然"，而回避了更为重要的"其所以然"的问题。看来，论证数学（一种重点放在证明判定关系上的理论演绎体系）的出现还在别一时间和别一地点。

论证数学诞生的时间是公元前1000年，诞生地点是小亚细亚半岛的爱琴海岸和希腊。那里出现了最伟大的历史文明，其非凡的成就对西方文化进程产生了永久性的影响。随着希腊国内和跨越地中海贸易的勃兴，希腊人逐渐成为一个流徙不定，热衷冒险的民族，他们比较精明和富裕，在思想和行动上都比以往看到的西方世界更具独立性。这些充满好奇心，且思想自由的商人对权威是不会

言听计从的。实际上，随着希腊民主的发展，公民自己就已成为权威（但必须强调指出，公民的定义在古希腊是非常狭隘的）。在这些人看来，对任何问题都可以自由争论，都应该加以分析，对任何观点都不能被动地、无条件地服从和接受。

到公元前400年时，这一卓越文明已经能以其丰富的（或许可以说是无与伦比的）智力遗产而自豪。史诗诗人荷马，历史学家希罗多德和修昔底德，剧作家埃斯库罗斯、索福克勒斯和欧里庇得斯，政治家伯里克利和哲学家索克拉蒂斯——所有这些人都在公元前四世纪初叶留下了自己的足迹。在现代社会，名望会很快衰落。因而，现代人可能惊讶，这些古希腊人的名声何以在经历了2000多年之后依然保持其辉煌。直至今日，我们仍然钦佩他们以深邃的理性烛照自然与人类状况的勇气。其理性虽然不乏迷信与无知，但古希腊思想家确实取得了极大的成功。即使他们的结论并非永远正确，但这些希腊人仍旧感到，他们的道路将引导自身从野蛮的过去走向梦想不到的未来。人们在描述这一特别的历史阶段时，常常使用“觉醒”一词，这是十分贴切的。人类的确已从千百万年的沉睡中醒来，以大自然最强大的武器——人类思维，勇敢地面对着这一陌生而神秘的世界。

数学当然也是如此。公元前约600年，在小亚细亚西海岸的小镇米利都，生活着一位伟人，即古代“七贤”之一——泰勒斯（公元前约640—546年）。米利都的泰勒斯是第一个在“知其然”的同时提出“其所以然”的学者，并被公认为论证数学之父。因此，泰勒斯是最早的著名数学家。

关于他的生平，我们掌握的确切资料很少。他实际上是作为一个半神话式人物从历史的薄雾中显现的，归于他名下的那些发现是否属实，人们仅仅是猜测而已。传记作家普卢塔克（公元46—120年）回顾了700年前的史迹，他写道：“……当时，泰勒斯独自将纯粹基于实践的哲学上升到理性的高度。”泰勒斯作为著名的数学家和天文学家，以某种方式预言了公元前585年发生的日蚀，他像

所有古板的科学家一样，常常心不在焉或长时间的出神——据传说，有一次，他一边散步，一边仰望星空，竟然掉进了一口深井中。

泰勒斯虽然被公认为论证数学之“父”，但实际上，他却从未结过婚。当同代人梭伦向他追问原因时，他竟开了一个刻薄的玩笑。泰勒斯让人带给梭伦一个消息说你的儿子死了。据普卢塔克记载，梭伦当时：

“……捶胸顿足，痛不欲生，像人们遭遇不幸时惯常所做的那样。但泰勒斯拉着他的手，笑了笑说：‘梭伦，就是这些事情让我不想结婚，也不想生儿育女，这实在太难了；不过，你不必太过伤心，因为这都是假的。’”

显然，泰勒斯不是那种心地善良之辈。从农夫的故事中，我们也可以得到同样的印象。一个农夫常常要将沉重的盐袋驮在驴背上，赶着驴去集市卖盐。聪明的驴子很快就学会了在涉过一条小河时打滚，把许多盐溶化在水里，大大减轻盐袋的重量。农夫非常生气，就去请教泰勒斯。泰勒斯建议农夫在下次赶集时，给驴驮一袋海绵。

当然，泰勒斯对人或动物的不友善，并不妨碍他在数学领域赢得很高的声望。正是泰勒斯曾极力主张，对几何陈述，不能仅凭直觉上的貌似合理就予以接受，相反，必须要经过严密的逻辑证明。这是他留给数学界的一笔相当可观的遗产。

确切地说，泰勒斯的定理究竟是什么呢？传统上认为，泰勒斯第一个证明了下列几何性质：

□ 对顶角相等。

□ 三角形的内角和等于两个直角之和。

□ 等腰三角形的两个底角相等。

□ 半圆上的圆周角是直角。

虽然我们没有任何有关泰勒斯对上述命题证明的历史记载，但我们可以推断它们的本来面目，例如上述的最后一个命题。下列证

明方法选自欧几里得的《原本》第三篇第31命题，但它简单明了，完全可以看作是泰勒斯自己最初的证明。

定理　半圆上的圆周角是直角。

证明　以O为圆心，以BC为直径作半圆，选半圆上任意一点

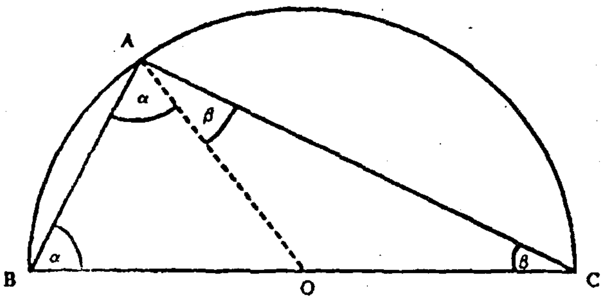


图　1.4

A作圆周角BAC（图1.4）。我们必须证明∠BAC是直角。连接OA，形成△AOB。由于OB和OA都是半圆的半径，长度相等，所以△AOB是等腰三角形。因此，根据泰勒斯先前所证明的定理，∠ABO与∠BAO相等（或用现代术语，迭合）；我们称这两个角为α。同样，在△AOC中，OA与OC相等，因此，∠OAC = ∠OCA；我们称这两个角为β。而在大三角形BAC中，我们看到，

$$\begin{aligned}2\text{个直角} &= \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC\\ &= \alpha + \beta + (\alpha + \beta)\\ &= 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

因此，一个直角 $= \frac{1}{2}$［2个直角］ $= \frac{1}{2}$［$2(\alpha + \beta$］$= \alpha + \beta =$ ∠BAC。

这正是我们要证明的。　证讫。

泰勒斯之后，希腊又一位伟大数学家是毕达哥拉斯。毕达哥拉斯公元前约572年出生于萨摩斯，并在爱琴群岛东部生活和工作，

甚至，据说，他还曾师从泰勒斯。但当暴君波利克拉特斯僭取这个地区的政权之后，毕达哥拉斯逃到了现今意大利南部的希腊城镇克洛托内。他在那里创办了一个学术团体，今称为毕达哥拉斯兄弟会。毕达哥拉斯哲学认为，“整数”是宇宙的要素，万物的元质。不论是音乐、天文学，还是哲学，“数”的中心地位是随处可见的。关于物理可以“数学化”地理解的现代观点在很大程度上也源自于毕达哥拉斯学派的观点。

在严格意义的数学领域，毕达哥拉斯学派为我们提供了两个伟大发现。一个当然是无与伦比的毕达哥拉斯定理。像所有远古时代的其他定理一样，我们没有关于毕达哥拉斯原论证的历史资料，但古人却一致将这一定理的发现归于毕达哥拉斯的名下。据说，毕达哥拉斯曾向上帝献祭一头牛，以庆祝他的论证带给各方的喜悦（大概这头牛除外）。

但毕达哥拉斯学派的另一个重要贡献却没有得到人们的热情支持，因为它不仅公然蔑视直觉，而且还冲击了整数的优势地位。用现代说法，他们发现了无理量，但他们的论证方法却有点儿几何学的味道：

两条线段，AB 和 CD，如果有一条可均匀分割 AB 和 CD 的小线段 EF，我们就说线段 AB 和 CD 是可公度的。也就是，对于整数 p 和 q 来说，AB 是由 p 段相等于 EF 的线段组成；而 CD 是由 q 段同样的线段组成（见图 1.5）。因而，$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{p\ (\overline{EF})}{q\ (\overline{EF})}=\frac{p}{q}$（我们在这里使用了符号$\overline{AB}$，表示线段 AB 的长度）。由于$\frac{p}{q}$是两个正整数的比，我们说，可公度线段的长度比是“有理”数。

凭着直觉，毕达哥拉斯学派认为，任何两个量都是可公度的。给定两个线段，必有另一条线段 EF，可以均匀地分割这两个线段，即使取非常小的 EF，也是如此。怀疑 EF 的存在，似乎是十分荒谬的。线段的可公度性对毕达哥拉斯学派至关重要，这不仅因为他们

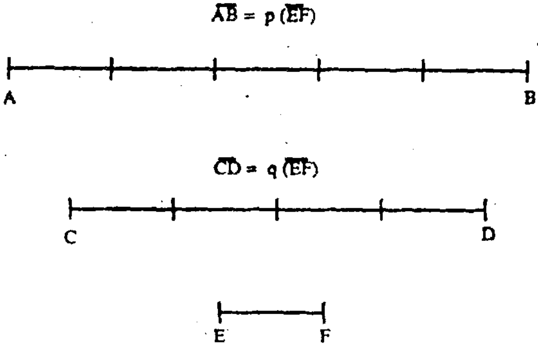


图 1.5

利用这一观点证明相似三角形，而且还因为这一观点似乎可以支持他们关于整数中心作用的哲学态度。

但是，据说，毕达哥拉斯的弟子希帕萨斯发现正方形的边长与其对角线（见图 1.6 中的 GH 与 GI）却不可公度。因为不论划分多小，都没有一个 EF 量可以均匀地分割正方形的边长和对角线。

这一发现产生了许多深远的结果。显然，这个发现粉碎了毕达哥拉斯那些建立在所有线段都可公度的假设基础之上的证明。几乎 200 年之后，数学家欧多克索斯才设法在不基于可公度概念的基础上，修补了相似三角形理论。其次，这一发现还动摇了整数至高无上的地位，因为如果并非一切量都可公度，那么，整数对于表示所有线段长度的比就显得不充分了。因此，这一发现在其后的希腊数学中，建立了几何对算术的绝对优势。例如，如图 1.6 所示，正方形的边长和对角线无疑属于几何问题。如果作为数字问题来计算，则会出现严重的问题。因为，如果我们设上图正方形的边长为 1，根据毕达哥拉斯勾股定理，则对角线长度为$\sqrt{2}$；由于边长与对角线不可公度，因

而我们看到，$\sqrt{2}$不能写成$\frac{p}{q}$形式的有理数。就数字而言，$\sqrt{2}$是“无理的”，其算术性质非常神秘。希腊人认为，最好回避完全的数字处理，而全神贯注于通过简明的几何体来表达量。这种几何对算术的优势将支配希腊数学一千年。

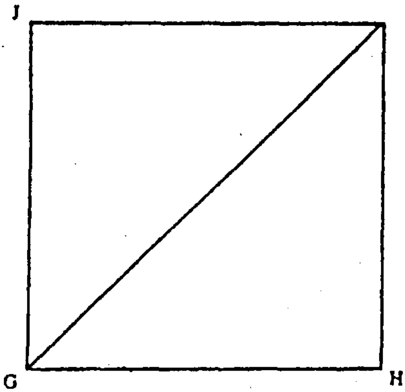


图 1.6

无理数的发现所带来的最终结果是，毕达哥拉斯的信徒们对希帕萨斯引起的所有混乱大为恼怒，据说他们把希帕萨斯带到地中海深处，然后掀下水中。如果故事属实，则自由思想的危险性，由此可见，即使是在比较严肃的数学领域，也不例外。

泰勒斯和毕达哥拉斯，虽然在传奇和传统中神乎其神，但他们都是远古时代模糊而朦胧的人物。我们下面将介绍的希俄斯的希波克拉底（约公元前 440 年）则是一位比较确实的人物。事实上，我们把有据可查的最早的数学论证归于他的名下。这将是我们所要介绍的第一个伟大定理的主题。

希波克拉底公元前 5 世纪生于希俄斯岛。当然，这是产生上述他的杰出前辈的同一个地方。（顺便提请读者注意，希俄斯岛距科斯岛不远，当时那里出生了另一位“希波克拉底”；科斯的希波克

拉底（不是我们所说的希波克拉底）乃希腊的医学之父和医生遵循的《希波克拉底誓言》的创始人。）

关于数学家希波克拉底，我们对他的生平知之甚少。亚里士多德曾写过，希波克拉底虽然是一位天才的几何学家，但他“……看起来在其他方面却显得迟钝又缺乏见识”。身为数学家，却难以应付日常生活，他即是早期的这样一类人。传说，希波克拉底是在被强盗骗去钱财后出名的，显然，他被人当作了容易受骗的傻瓜。为了挽回损失，他前往雅典，并在那里教学，他是少数几位为挣钱而开始教学生涯的人之一。

无论如何，我们都不会忘记希波克拉底对几何学作出的两个非凡的贡献。其一是他编写了第一部《原本》，第一次阐述了从几个已知公理或公设中精确而有逻辑性地推导出几何定理的过程。至少，人们相信是他写了这部著作，但遗憾的是，这部书没有能够流传至今。然而，这部书不论多么有价值，与100年后欧几里得的煌煌巨作《原本》相比，也不免黯然失色。欧几里得的《原本》从根本上宣判了希波克拉底著作的过时。即使如此，我们仍有理由认为，欧几里得借鉴了他前辈的思想，因此希波克拉底失传的大作无疑使我们受益良多。

然而，令人欣慰的是，希波克拉底的另一个伟大贡献——求新月形面积——却流传至今，虽然大家公认，其流传是无意的和间接的。我们未能得到希波克拉底的原作，而只传有欧德摩斯公元前约335年对希波克拉底著作的转述；即使就转述而言，事情也不乏含混之处，因为实际上，我们也没有真正找到欧德摩斯的原著。相反，我们只看到了辛普利西乌斯于公元530年写的概要，他在这本书中论述了欧德摩斯的著作，而欧德摩斯则概括了希波克拉底的著作。实际上，从希波克拉底到辛普利修斯，其间经历了近一千年之久，差不多等于我们与莱弗·埃里克松之间的时间跨度，这说明历史学家在考证古代数学时遇到了多么大的困难。尽管如此，我们没有理由怀疑我们所探讨的著作基本上是可靠的。

有关求面积问题的一些评论

在探讨希波克拉底的新月形面积之前，我们先要介绍一下“求面积”的概念。显然，古希腊人被几何的对称性，视觉美和微妙的逻辑结构吸引住了。尤其令人感兴趣的是以简单和初步的东西作为复杂和纷繁问题基础的方式。这一点在下章我们探讨欧几里得定理时，就会显得十分明了。欧几里得从一些基本的公理和公设开始，一步步地推导出一些非常复杂的几何命题。

这种以简单构筑复杂的魅力还表现在希腊人的几何作图上。他们作图的规则是，所有作图都只能使用圆规和（没有刻度的）直尺。几何学家利用这两种非常简单的工具，便能够作出完美、一致的一维图形（直线）和完美、一致的二维图形（圆）——这必定出自于希腊人对秩序、简明性和美的感受。并且，这种作图方法也是当时的技术水平所力所能及的，例如，当时还不可能画出抛物线。也许，准确地说，是直线和圆的审美魅力加强了直尺和圆规作为几何作图工具的中心地位，同时，直尺和圆规的物质可用性又转过来增进了直线和圆在希腊几何中的作用。

古代数学家利用直尺和圆规绘制了许多几何图形，但同时也受制于这两种工具。正如我们所看到的，圆规和直尺这两种似乎并不复杂的工具，掌握在聪敏的几何学家手中，便可以绘制出丰富多彩和各式各样的几何图形，从平分线段和角，绘制平行线和垂直线，到创造优美的正多边形，不一而足。但是，公元前 5 世纪，更加严重的挑战却是平面图形的求面积或求方。确切地说：

□　一个平面图形的求面积（或化其为方）就是只用圆规和直尺作出面积等于原平面图形的正方形。如果一个平面图形的求面积能够实现，我们就说这个图形是可用等价平方表示的（或可为平方的）。

求面积问题能够引起希腊人的兴趣并不奇怪。从纯粹实践