高中数学教与练

三 环 出 版 社

高中数学教与练

伍健中　编

琼新登03号

内 容 简 介

《高中数学讲与练》是一本青年自学用书。本书按照高中数学知识体系共分十三章。力求帮助读者全面系统地掌握高中数学的基础知识和技能技巧，例题与习题形式多样、内容广泛、注重综合。习题附有答案、提示或略详，有助于独立思考与验证，无论对应届高中毕业生、往届毕业生或高中数学教师都有一定参考价值。

伍健中 1988年2月17日

高 中 数 学 教 与 练

伍健中 编

三环出版社出版 北京午栏山一中印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

787×1092毫米 32开 21.5印张 483千字

1991年7月第一版 1991年7月第一次印刷

印数：1—11120

ISBN7—80564—622—8/G·441

定价：8.60元

编写说明

高中数学是高中学生要切实理解并掌握的一个十分重要的基础课程。要求学生不仅要具有扎实的中学数学基础知识，而且要具有一定的分析问题和解决问题的能力。还要培养学生的辩证思维能力。因此本书力求全面、系统地概括高中数学的基础知识、基本题型，紧扣教材、紧扣大纲；例题、习题的选择力求具有典型性、针对性、灵活性、综合性、系统性和规律性；其体系的安排，着重揭示知识的内在联系、阐述解题的方法与技巧，注重培养能力、开发智力，既利于学生学，又便于教师教。每章后附有习题的答案或提示。

沙国栋同志曾为本书的第一稿作过审校，在此表示感谢。

伍健中

1991年2月

目　录

第一章　集合与函数……………………………………（1）
1—1　集合初步……………………………………（1）
1—2　集合的综合问题……………………………（4）
1—3　映射的概念及函数的概念…………………（8）
1—4　函数的定义域………………………………（11）
1—5　函数的解析表达式…………………………（15）
1—6　函数的奇偶性………………………………（19）
1—7　函数的单调性………………………………（23）
1—8　函数的周期性………………………………（26）
1—9　一次函数与二次函数………………………（29）
1—10　幂函数……………………………………（34）
1—11　指数函数与对数函数……………………（36）
1—12　函数的图象………………………………（39）
1—13　指数与对数………………………………（43）
1—14　函数的最值………………………………（50）
1—15　函数知识的综合应用……………………（56）
第一章练习答案或提示…………………………（59）
第二章　任意角的三角函数…………………………（67）
2—1　角的概念的推广与度量……………………（67）
2—2　三角函数的概念……………………………（71）
2—3　诱导公式……………………………………（77）
2—4　三角函数的图象及其性质…………………（80）

2—5　三角函数图象的作法 ………………………… (87)
第二章练习答案或提示 ……………………………… (95)
第三章　两角和与差的三角函数 ………………… (98)
3—1　两角和与差的公式系统 ……………………… (98)
3—2　求值 ……………………………………………… (101)
3—3　化简 ……………………………………………… (113)
3—4　三角恒等式的证明 …………………………… (118)
3—5　三角条件等式的证明 ………………………… (124)
3—6　三角不等式的解法 …………………………… (137)
3—7　三角不等式的证明 …………………………… (141)
第三章练习答案或提示 ……………………………… (150)
第四章　反三角函数、三角方程及解三角形 ……… (153)
4—1　反三角函数的基本概念 ……………………… (153)
4—2　反三角函数的运算 …………………………… (159)
4—3　反三角函数的恒等变形 ……………………… (166)
4—4　反三角函数的图象及其应用 ………………… (170)
4—5　解反三角方程及反三角数列求和 …………… (175)
4—6　三角方程 ………………………………………… (178)
4—7　解三角形(一) 求三角形的边与角 ………… (182)
4—8　解三角形(二) 判断三角形的形状 ………… (185)
4—9　解三角形(三) 证明三角形的边角关系
等式 ……………………………………………… (189)
4—10 三角函数的最值问题 ………………………… (192)
4—11 三角代换 ………………………………………… (196)
第四章练习答案或提示 ……………………………… (198)
第五章　不等式 ……………………………………… (202)

5—1　不等式的性质 ……………………………… (202)
5—2　不等式的解法 ……………………………… (205)
5—3　不等式的证明 ……………………………… (213)
5—4　作差比较法证明不等式 ………………… (215)
5—5　正数作商比较法 …………………………… (218)
5—6　综合法证不等式 …………………………… (221)
5—7　分析法证不等式 …………………………… (225)
5—8　放缩法证不等式 …………………………… (228)
5—9　判别式法证不等式 ………………………… (231)
5—10 反证法证不等式 …………………………… (234)
5—11 数学归纳法证不等式 ……………………… (237)
5—12 配方法、三角代换法、构造法证不等式
…………………………………………………… (244)
5—13 不等式证明的综合训练 ………………… (247)
5—14 不等式的应用 ……………………………… (254)
第五章　练习答案或提示 ……………………………… (260)
第六章　数列、极限与数学归纳法 ………………… (263)
6—1　数列的概念 ………………………………… (263)
6—2　等差数列 …………………………………… (266)
6—3　等比数列 …………………………………… (273)
6—4　等差数列与等比数列 …………………… (276)
6—5　数列的综合训练 …………………………… (279)
6—6　数列的应用题 ……………………………… (283)
6—7　特殊数列求和 ……………………………… (288)
6—8　数列的极限 ………………………………… (292)
6—9　一阶递归数列 ……………………………… (297)

6—10 二阶递归数列 …………………………………… (305)
6—11 由方程组给出的递归数列 ………………… (309)
6—12 分式递归数列 …………………………………… (318)
6—13 数学归纳法 ……………………………………… (323)
第六章练习答案或提示 ……………………………… (328)
第七章 复数 ……………………………………………… (334)
7—1 复数的有关概念 ………………………………… (334)
7—2 复数的代数形式的运算 ……………………… (339)
7—3 复数的三角式及其运算 ……………………… (342)
7—4 复数的模与共轭复数的有关性质 ………… (348)
7—5 关于复数的模与幅角的最值 ……………… (352)
7—6 关于复数方程 ………………………………… (358)
7—7 复数的几何意义 ……………………………… (362)
7—8 用复数表示的曲线方程及平面区域 ……… (365)
7—9 利用复数的几何意义求动点的轨迹方程
………………………………………………………… (371)
7—10 复数的综合训练（一） …………………… (378)
7—11 复数的综合训练（二） …………………… (383)
第七章习题答案或提示 …………………………… (390)
第八章 排列、组合与二项式定理 ……………… (396)
8—1 排列组合的基本概念 ………………………… (396)
8—2 排列组合应用题（一） ……………………… (399)
8—3 排列组合应用题（二） ……………………… (403)
8—4 排列组合应用题（三） ……………………… (406)
8—5 二项式定理 …………………………………… (410)
8—6 求二项展开式中的条件项及有关元素

……………………………………………………（413）
8—7　二项式定理的灵活运用 ……………………（416）
8—8　二项式系数的性质 ………………………（418）
8—9　二项式定理的应用 ………………………（420）
8—10 二项式定理的综合训练 …………………（423）
第八章练习答案或提示 …………………………（427）
第九章　直线与平面 ………………………………（431）
9—1　有关平面的基本概念与性质 ……………（431）
9—2　空间两直线 ………………………………（435）
9—3　空间两直线平行或垂直的判断 …………（438）
9—4　异面直线所成的角及异面直线间的距离
……………………………………………………（441）
9—5　直线与平面的位置关系 …………………（449）
9—6　平面与平面的位置关系 …………………（454）
9—7　空间距离 …………………………………（463）
9—8　直线与平面的综合训练 …………………（467）
第九章练习答案或提示 …………………………（474）
第十章　多面体与旋转体 …………………………（478）
10—1　多面体 ……………………………………（478）
10—2　圆柱、圆锥与圆台 ………………………（486）
10—3　球缺、球台、球冠、球带及球 …………（493）
10—4　有关球面距离的计算 ……………………（501）
10—5　将平面图形折成空间图形 ………………（504）
10—6　有关最值问题 ……………………………（508）
10—7　简单图形的截面问题 ……………………（515）
第十章练习答案或提示 …………………………（519）

第十一章　直线方程 ………………………………………… (521)
11—1　有向线段及线段的定比分点 ………… (521)
11—2　距离公式与定比分点公式的应用 …… (524)
11—3　直线方程的各种形式 ………………… (528)
11—4　点与直线的位置关系及两直线的位置关系 ………………………………………… (531)
11—5　点关于直线的对称点及应用 ………… (535)
11—6　直线系方程 ………………………………… (539)
11—7　直线方程的综合训练 ………………… (541)
第十一章练习答案或提示 ………………………… (547)
第十二章　圆锥曲线与平移变换 …………………… (550)
12—1　曲线与方程、充要条件 ……………… (550)
12—2　圆的方程 ………………………………… (555)
12—3　圆与直线及圆与圆的位置关系 ……… (558)
12—4　椭圆 ………………………………………… (565)
12—5　双曲线 …………………………………… (575)
12—6　抛物线 …………………………………… (583)
12—7　圆锥曲线的切线 ……………………… (592)
12—8　圆锥曲线与直线相交的有关问题 …… (601)
12—9　坐标轴平移 ……………………………… (611)
12—10　曲线系与圆锥曲线方程的讨论 ……… (615)
第十二章练习答案或提示 ………………………… (618)
第十三章　参数方程、极坐标 ……………………… (626)
13—1　参数方程与普通方程 ………………… (626)
13—2　直线的参数方程 ……………………… (630)
13—3　圆锥曲线的参数方程 ………………… (635)

13—4　利用参数方程求轨迹 …………………… (641)
13—5　极坐标系 ………………………………… (646)
13—6　直线、圆、圆的渐开线、等速螺线的
　　　极坐标方程 ……………………………… (650)
13—7　圆锥曲线的极坐标方程 ………………… (655)
13—8　极坐标的应用 …………………………… (660)
13—9　关于轨迹问题 …………………………… (664)
13—10　有关最值问题 …………………………… (670)
13—11　有关定值问题 …………………………… (680)
第十三章练习答案或提示 ………………………… (685)

第一章　集合与函数

1—1　集合初步

〔基础知识〕

一、集合是一个不加定义的原始概念，集合中的元素具有三个特征：（1）元素的确定性；（2）元素的互异性；（3）元素的无序性；二、集合的表示方法：描述法，列举法；三、集合与集合的关系：全集，子集$A\subseteq B$，真子集$A\subset B$，空集ϕ；四、集合的运算：集合的交集$A\cap B$，并集$A\cup B$，补集$\overline{A}\cup A=I$、$\overline{A}\cap A=\phi$、$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$、$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；五、集合中元素的个数公式：

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$；$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$。

〔例题选讲〕

例1：设$I=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{a,b,c,e,f,g,h\}$，$\overline{A}\cap B=\{c,g\}$，$A\cap\overline{B}\{b,h\}$，求集合$A,B$。

解：$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$　$\therefore A\cap B=\{d\}$　又$\overline{A}\cap B=\{c,g\}$　$\therefore B=\{c,d,g\}$　由$A\cap\overline{B}=\{b,h\}$　$\therefore A=\{b,d,h\}$。

例2：用描述法表示集合$A=\{1+\lg2,2\lg40,\lg512000\}$

解：$\because 1+\lg2=\lg20$，$2\lg40=\lg2^4\times10^2$、$\lg512000=\lg2^9\times10^3$，

$$\therefore A=\{x|\ x=\lg2^{k^2}\times10^k,\ k\in N\quad k\leqslant3\}。$$

例 3：已知$A=\{x|\ x^3+2x^2-x-2\geqslant 0\}$，$B=\{x|\ x^2+ax+b<0\}$，$A\cup B=\{x|\ x+2\geqslant 0\}$，$A\cap B=\phi$，求$a,b$之值。

解：由$x^3+2x^2-x-2\geqslant 0$ 得$(x+1)(x-1)(x+2)\geqslant 0$，

$\therefore$ $A=\{x|\ -2\leqslant x\leqslant -1,或x\geqslant 1\}$。又由$A\cap B=\phi$，$A\cup B=\{x|\ x\geqslant -2\}$，

$\therefore$ $B=\{x|\ -1<x<1\}$；故 $x^2-1<0$。 $\therefore a=0$，$b=-1$。

例 4：已知$A=\{a+b\sqrt{2}|\ \ |a^2-2b^2|=1\ a\in Z,\ b\in Z\}$ $x\in A$，$y\in A$，

求证：（1）$xy\in A$，（2）$\frac{1}{x}\in A$。

证：设$x=\alpha+\beta\sqrt{2}$，$y=\gamma+\delta\sqrt{2}$，且$|\alpha^2-2\beta^2|=1$，$|\gamma^2-2\delta^2|=1$，其中α、β、γ、$\delta\in Z$，则$xy=(\alpha+\beta\sqrt{2})(\gamma+\delta\sqrt{2})=(\alpha\gamma+2\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{2}$，且$|(\delta\gamma+2\beta\delta)^2-2(\alpha\delta+\beta\gamma)^2|=1(\alpha^2-2\beta^2)(\gamma^2-2\delta^2)|=|\alpha^2-2\beta^2||\gamma^2-2\delta^2|$

$=1$，$\therefore xy\in A$，又$\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{2}}=\frac{\alpha-\beta\sqrt{2}}{\alpha^2-2\beta^2}=$

$=\pm(\alpha-\beta\sqrt{2})\in A$，$\therefore$ $\frac{1}{x}\in A$。

例 5：若$A=\{1,2,t\}$ $B\{1,t^2\}$ 且$A\cup B=\{1,2,t\}$，试求符合条件的t值。

解：由$t^2=2$得$t=\sqrt{2}$或$t=-\sqrt{2}$，由$t^2=t$得$t=0$或$t=1$.故符合条件的t值应为：$t=0,t=\sqrt{2}$，$t=-\sqrt{2}$。

例6：已知$S=\{x|\ x=14m+36n,\ m、n\in Z\}$

$T=\{x|\ x=2k,\ k\in Z\}$ 求证：$S=T$。

证：若$b\in S$，则$b=2(7m+18n)=2k$ $\therefore b\in T$。

若$a\in T$，则$a=2k=(-5\times 14+36\times 2)k=14(-5k)$

$+36(2k)=14m+36n$,

$\therefore a\in S$, 故 $S=T$.

练习1—1

1. 选择题

(1) ϕ 与 $\{\phi\}$ 的关系是（ B ）.

(A) $\phi=\{\phi\}$，(B) $\phi\subset\{\phi\}$，(C) $\{\phi\}\subseteq\phi$，(D) $\phi\subseteq\{\phi\}$.

(2) 若 $A\subset B$，则下列集合中的空集是（ D ）.

(A) $\overline{A}\cap B$，(B) $\overline{A}\cap\overline{B}$，(C) $A\cap B$，(D) $A\cap\overline{B}$.

(3) $A\supseteq B$ 是 $(A\cap C)\supseteq(B\cap C)$ 的（ A ）.

(A)充分条件，(B)必要条件，(C)充要条件，(D)既非充分又非必要条件.

(4) 若 $M=\left\{x\left|\,\frac{x-1}{x-2}\geqslant 0\right.\right\}$，$N=\{x|\ (x^2-3x+2)\geqslant 0\}$，$P=\{x|\ 2^{x^2-3x+2}\geqslant 1\}$，则 M、N、P 的关系式应为

（ D ）.

(A) $M=N=P$，(B) $M\subset N\subset P$，(C) $M\subseteq N\subset P$，(D) $M\subset N=P$.

2. 填空题

(1) 已知 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，则 $A=\{$ 2 3 5 7 $\}$，$B=\{$ 4 6 8 2 $\}$.

(2) 设全集 $I=N$，$A=\{x|\ x\leqslant 6,\ x\in N\}$，$B=\{y|\ y^2-5y-6=0,\ y\in N\}$，则 $A\cup B=$ {x| x≤6} A，$A\cap B=$ B，$A\cap\overline{B}=$ {x| x<6, x∈N}.

(3) $A=\{x|\ |x+2|-|2x-3|>2\}$，$B=\{x|\ \log_{\frac{1}{2}}(5-x^2)<0\}$，$C=\left\{x\left|\ \ln\left(x\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\right)<0\right.\right\}$，则 $A\cap B\cap C=$ ______.

(4)已知方程$x^2+px-12=0$的解集为A，方程$x^2+qx+r=0$的解集为B，且$A\neq B$，$A\cup B=\{-3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，则$A=\{\quad\}$，$B=\{\quad\}$。

3．设$A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2-x+1,1\}$且$A\cup B=A$，求x的值。

4．设全集$I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{2,|a+1|\}$，$\overline{A}=\{5\}$，求a的值。

5．若$A=\{x|\ x^3-px^2+\pi x=0\}$，$B=\{x|\ x^3-(e+i)x^2+qx=0\}$，$A\cup B=\{0,1,\pi,e,i\}$，求$A$与$B$。

6．已知$A=\{x|\ x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x|\ x^2+bx+c\leqslant 0\}$，$A\cup B=R$，$A\cap B=\{x|\ 3<x\leqslant 4\}$，求$b$与$c$。

1—2　集合的综合问题

〔例题选讲〕

例1：已知集合A和B各含12个元素，$A\cap B$含有4个元素，试求同时满足下面两个条件的集合C的个数：①$C\subset A\cup B$，C中含3个元素，②$C\cap A\neq\phi$

解：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+12-4=20$，故满足条件的集合$C$的个数为$C_{20}^3-C_8^3=1084$，或$C_{12}^1C_8^2+C_{12}^2C_8^1+C_{12}^3=1084$。

例2：若集合A满足关系式$\{a,b\}\subseteq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$，求集合$C$的个数。

解：集合A中含有a、b两个元素，则从c、d、e三个元素中任取0个、1个、2个或3个元素均可构成集合A，故共有$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3=8$个。

例3：已知$f(x)=x^2+ax+b$，$a,b\in R$，$A=\{x|\ x=f(x)$

$x\in R\}$，$B=\{x|\ x=f[f(x)]\ x\in R\}$。

（1）求证：$A\subseteq B$；（2）若$A=\{-1,3\}$，试列出B中的元素；（3）当A中只有一个元素时，求证$A=B$。

证：（1）当$x\in A$则$x=f(x)$，$\therefore f[f(x)]=f[x]=x$，$\therefore x\in B$，故有$A\subseteq B$；

（2）由$f(-1)=-1$得$1-a+b=-1$，由$f(3)=3$得$9+3a+b=3$，故有$a=-1$、$b=-3$，$\therefore f(x)=x^2-x-3$。由 $x=f[f(x)]=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$，得$(x^2-x-3)^2-x^2=0$，$\therefore(x^2-x-3+x)(x^2-x-3-x)=0$，$\therefore$ $x=-1$、$x=3$、$x=\pm\sqrt{3}$，$\therefore B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$。

（3）由$f(x)=x$只有一个根，故$f(x)-x=0$只有一个根，故令$f(x)-x=(x-p)^2$，$\therefore f(x)=x+(x-p)^2$。

由$f[f(x)]=x$，得 $x+(x-p)^2+[x+(x-p)^2-p]^2=x$，

$\therefore(x-p)^2+[(x-p)+(x-p)^2]^2=0$，$\therefore(x-p)^2[1+(1+x-p)^2]=0$。

此方程只有当$x=p$时才能成立，故$A=B$。

例4：已知集合$A=\{z|\ ||z+3-4i|-\frac{3\sqrt{2}}{2}|+|z+3-4i|-\frac{3\sqrt{2}}{2}=0\}$，$B=\{(x,y)|\ y\geqslant x+b\}$，且$A\cap B=A$，求$b$的值。

解：由$|\alpha|+\alpha=0$得$|\alpha|=-\alpha$，$\therefore\alpha\leqslant0\quad(\alpha\in R)$，

故由条件可知 $A=\left\{z|\ |z+3-4i|\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$，

即 $A=\left\{(x,y)\mid (x+3)^2+(y-4)^2\leqslant\frac{9}{2}\right\}$。

当圆心$(-3,4)$到直线$y=x+b$的距离等于半径$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

时，圆与直线相切，为使$A\cap B=A$，故有$\frac{|-3-4+b|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{2}}$，$\therefore |b-7|=3$，$\therefore b=10$或$b=4$。当$b\geqslant10$时$A\cap B=\phi$，故得$b\leqslant4$。

例 5：已知$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant4\}$，$B\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant0\}$，$a\in R$且$B\subseteq A$，试求$a$的取值范围。

解：令$y=x^2-3ax+a+2$，$\Delta=4a^2-4a-8$，

当$-1<a<2$时，$\Delta<0$，$B=\phi\subseteq A$。

当$a\leqslant-1$或$a\geqslant2$时，$\Delta\geqslant0$，由$y\leqslant0$得$a-\sqrt{a^2-a-2}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{a^2-a-2}$。

而$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant4\}$，故要求$\begin{cases}a-\sqrt{a^2-a-2}\geqslant1\\ a+\sqrt{a^2-a-2}\leqslant4\end{cases}$

即$\begin{cases}a\leqslant3\\ a\leqslant\frac{18}{7}\end{cases}$ $\therefore\quad a\leqslant\frac{18}{7}$。

从而由$\begin{cases}a\leqslant-1\text{或}a\geqslant2\\ a\leqslant\frac{18}{7}\end{cases}$ 得 $2\leqslant a\leqslant\frac{18}{7}$ 时 $B\subseteq A$。

综上所述，可知当$-1<a\leqslant\frac{18}{7}$时必有$B\subseteq A$。