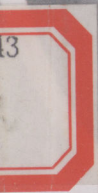



高等学校教材

# 解析几何

王敬赓

数学基础课程系列  
简明教材



 高等教育出版社

高等学校教材  
数学基础课程系列简明教材

-13

# 解析几何

Jiexi Jihe

王敬康

0/82-43

w23/



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 图书在版编目(CIP)数据

解析几何/王敬赓. —北京:高等教育出版社, 2010. 1

ISBN 978-7-04-028357-0

I. 解… II. 王… III. 解析几何-高等学校-教材  
IV. O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 208576 号

策划编辑 李 蕊 责任编辑 张彦云 封面设计 张申申  
责任绘图 吴文信 版式设计 王艳红 责任校对 杨凤玲  
责任印制 韩 刚

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行 有限公司	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
印 刷	廊坊市科通印业有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	850×1168 1/32	版 次	2010年1月第1版
印 张	9.125	印 次	2010年1月第1次印刷
字 数	230 000	定 价	12.90 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28357-00

## 内 容 提 要

本书主要讲述解析几何的基本内容和方法,包括向量代数、空间平面和直线、特殊曲面和二次曲面、一般二次曲线的讨论、平面上的正交变换和仿射变换。本书注意培养学生的空间想象能力和运用解析方法研究几何问题的能力,讲解通俗易懂、条理清楚,例题丰富、便于自学。每节后的习题注重基本概念的训练,难度适中,书后附有大部分习题答案。

本书可作为高等学校数学类专业解析几何课程的教材,也可供其他学习解析几何课程的读者参考。

# 总 序

2005年,高等教育出版社为适应高校数学类专业的教学需求,经过一段时间的酝酿,决定在“十一五”期间推出一套“数学基础课程系列简明教材”。这套系列教材包含数学分析、高等代数、解析几何、复变函数、实变函数、概率统计、微分几何等。为做好此事,在高等教育出版社的主持下成立了编委会,并邀请了一批有多年教学实践经验的资深教授参加编写工作。这套系列教材中的第一批书目已经被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。经过几年的努力,这套教材开始正式与大家见面了。其中多数是新编的,也有一些是经过教学实践证明优秀的,深受读者欢迎的教材的修订版。

这套系列教材适用于我国综合性大学、理工科大学以及师范大学中的数学类专业,作为数学专业基础课的教学用书;当然,它们也可以作为理工科中非数学类专业的教学参考书。面向全国各类高校的数学系,具有较广泛的适用性,这是我们编写这套系列教材的初衷之一。

在这套系列教材中,尽管每一本教材的风格各异,但是在编写的基本理念上大家有着相当多的共识。我们希望这套教材做到以下几点:

首先,教材内容“少而精”。

众所周知,“少而精”是教学的一个基本原则。它要求在教学上要紧紧地抓住所涉及学科的基础知识与基本训练这个纲,突出重点,纲举目张。相反,内容过多、过杂、过深,势必使人不得要领,事倍功半。但是,有时人们会看不到讲得过多的害处,会在某些口

号的驱使下使事情脱离了正确的轨道,比如求多求全、追求内容的先进性或现代化等等。我们知道,基础课教材的作用在于它为读者提供后续课以及日后参加工作不可或缺的基础知识、基本方法与基本思想。所讲的内容并非越多越好,越深越好。遗憾的是,目前基础课内容有一种不断扩充的趋势。这虽然出于良好的目的,而其效果却不如愿。实际上,就以我们这些“过来人”为例,认真回想一下自己以前所学到的、真正用得得心应手的内容并不多;而且真正用得到的内容也并不很多。与其求全求多,不如精选最基本的东西,帮助读者真正掌握这些内容的实质、方法和思想。读者有了这样的基础,在他们将来遇到没有学过但确有需要的内容时,也会有能力自学。课程内容“现代化”的要求,应当是针对数学系的整个的教学体系而言的,而不是要求基础课的内容更新换代。这对数学学科而言是无需争议的事实。基础课可以在观念上、记号上为专业课的现代化做些必要的准备,但不应该是把后续课的某些基本概念提到前面来讲述。

其次,教材尽可能做到“深入浅出”。

基础课教材是初学者入门的读本,而这些初学者在此之前没有任何学习高等数学的经验。在这种情况下,就要求教材注意循序渐进、由浅入深,尽可能做到通俗易懂,最好还能做到生动有趣,引起读者的兴趣。一个好的数学基础课教材应当既逻辑严谨、体系完整,又深入浅出、平实自然。我们应当学会通过典型的实例和足够详尽的解释,来帮助初学者学会解读数学的抽象形式,透过抽象的数学叙述,正确把握和理解其内容实质。教材的真正水准应当体现在是否能把那些艰深的内容讲得让人感到自然易懂。把本来容易的东西讲得复杂难懂,那是不可取的。为此,我们要注意避免过度形式化的不良倾向。数学工作者由于长期从事数学研究与教学,已经养成了严谨的习惯,追求叙述的一般性与抽象性,但与此同时,也往往形成了某种毛病,那就是忽视描述性语言,忽视那些抽象形式背后的直观模型,甚

至抹杀直观的意义,这是很不妥当的。过度的形式化,不仅造成了初学者的困难,更重要的是歪曲了数学本质,误导了学生。在基础课教材中,为了帮助初学者理解抽象数学形式的意义,除了典型例子之外,用必要的直观描述性语言去解释它的意义,同样是十分重要、不可或缺的。

最后,教材重视基本训练,重视对学生的能力培养。

我们赞同“双基”的提法,即基础课的任务是传授基础知识和掌握基本训练。学好一门数学课程,单单知道有关数学结论是不够的,还要求读者具有一定的分析问题与解决问题的能力。这样,勤于思考,独立思考,并做好相当数量的习题,是完全必要的。这是一切在数学上学而有成的人的共同体。通过做题可以深入、具体地理解和掌握基本概念、结论和方法;获得计算和推理的能力;理解、掌握应用基本知识和方法解决问题的途径;同时也进一步锻炼刻苦思考和探索的毅力,培养创造性的思维能力和习惯。后面一点不仅对学好数学很重要,而且对读者以后工作能力的提高和事业的成功都是很重要的。在这套教材中,我们精心选配好适合读者的各种例题与习题,它们是教材很重要的组成部分,不可忽视。习题中不仅有基本练习,而且有一些题目,需要读者经过一定的努力,花费一定的时间去探索,才能最终解决。此外,题目富有多样性、趣味性和启发性。当然,我们也不赞成出一些技巧性过强而没有训练价值的偏题与难题。

常言道:“授人以鱼,不如授人以渔”。一本好的基础课教材要努力做到授人以渔,而不只是罗列知识。这就需要帮助读者理解课程内容和方法的实质,理解其中的数学思想。在教材中要尽可能地介绍清楚问题和概念的来龙去脉,包括一些典型的例子;尽可能解释清楚解决问题的思路和方法,其中包括定理证明和计算过程的思路,以提高学生的创新意识与探索精神。

以上是我们对这套教材的希望与要求,也是我们编书的理念。把它们写在这里,主要是为了自勉,并不表明这些我们已经全部做

好了、做到位了。我们希望使用这套教材的师生和其他读者多提宝贵意见,使教材得以不断完善。

“数学基础课程系列简明教材”编委会

2008年1月5日



# 前 言

本书是为高等学校数学与应用数学专业及信息与计算科学专业编写的解析几何课程的教材,解析几何是这些专业的重要基础课程。

本书包括一个引言——解析几何的创立与它的重要性。正文分为六章,书末有绝大部分习题的答案或提示。

让学生知道一点有关本课程创立的历史,有利于学生掌握该门课程的基本思想和它在整个数学中所处的地位。为此本书将解析几何的创立与它的重要性作为引言放在本书的开头供学生阅读。

第一章是向量代数。由于学生在中学已经学习了向量的初步知识,包括向量的概念、向量的线性运算及向量的数量积等,因此本章不再重复这些内容。为了让学生更好地掌握向量本身的运算,强调向量运算的几何意义和在几何中的应用,本章到最后一节才引进空间直角坐标系,用坐标来进行向量运算。这种着重对“形”的思考和安排,有利于对学生几何直观能力的培养。

第二章是平面和空间直线。本章运用解析几何的基本方法研究平面和空间直线:首先建立平面和空间直线的方程,然后通过方程来解决有关平面和空间直线的各种几何问题。在研究有关平面和空间直线的问题时,充分发挥向量这个工具的作用。

第三章是特殊曲面。建立球面、直圆柱面、直圆锥面等常见的特殊曲面的方程,介绍并应用曲线族组成曲面的理论来建立一般柱面、锥面和旋转曲面的方程,介绍空间曲线和曲面的参数方程。

第四章是二次曲面。分析讨论椭球面、双曲面和抛物面等五种常见二次曲面的标准方程及其所表示的空间图形的几何形状,并介绍由几个曲面围成的空间区域的简图的画法,这是日后学习微积分中的二重积分时所需要的。

第五章是一般二次曲线的讨论。这是中学平面解析几何内容的提高和补充,包括通过坐标变换化简一般二元二次方程,从而将二次曲线进行分类,介绍二次曲线的不变量以及根据不变量来判别二次曲线的类型,介绍二次曲线的切线、中心、直径、渐近线及主轴等。

第六章是平面上的正交变换和仿射变换。本章重点介绍平面仿射变换,而将正交变换作为它的特例,介绍图形的仿射性质及平面仿射坐标系在解初等几何题中的应用。

本书在编写时,努力遵循以下原则:内容力求简明,突出解析几何的基本思想和方法;注意强调各种代数表示式的几何意义,着重从几何直观上进行分析;在讲解中,多分析,多举例题,使教材便于教师教和学生学。每节后都配有习题,习题的选配注重基本题,个别较难的题标有\*号。

书末附有习题中计算题的答案和证明题的提示。答案供学生及时核对用,发现和纠正错误贵在及时。当发现自己的答案不对时,建议你认真找出错在哪里,分析原因,吸取教训,这样才能避免下次不再发生类似的错误,从而不断提高自己的解题能力,这就是本书给出答案的初衷。提示是供读者在想不出证明思路时参考的,如果在这之前看提示,则一方面会束缚你的思维,另一方面会剥夺你解题的乐趣,建议你千万别轻易看提示。

本书供一年级学生使用,每周4学时讲授,2学时习作课,一学期可学完。

本书正文中有些内容前标有\*号,例如第五章§17(二次曲线的切线、中心、直径、渐近线和主轴),供有余力时选学。若将其略去,也不会影响本书后面章节的学习。

由于编者水平所限,书中缺点、错误和不足之处一定不少,诚恳地欢迎大家批评指正。

王敬麇  
于北京师范大学

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010)58581897/58581896/58581879

**传 真：**(010)82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100120

**购书请拨打电话：**(010)58581118

# 目 录

引言 .....	1
解析几何的创立与它的重要性 .....	1
<b>第一章 向量代数</b> .....	14
§ 1 向量的向量积 .....	14
§ 2 混合积和双重向量积 .....	24
§ 3 空间直角坐标系及向量的坐标运算 .....	30
<b>第二章 平面和空间直线</b> .....	43
§ 4 平面的方程 .....	43
§ 5 空间直线的方程 .....	53
§ 6 有关平面和空间直线的位置关系 .....	58
§ 7 距离 .....	72
<b>第三章 特殊曲面</b> .....	86
§ 8 曲面、空间曲线与方程, 球面、直圆柱面和直圆锥面的方程 ...	86
§ 9 曲线族组成曲面, 柱面、锥面和旋转曲面的方程 .....	95
§ 10 空间曲线和曲面的参数方程 .....	116
<b>第四章 二次曲面</b> .....	131
§ 11 椭球面、双曲面和抛物面 .....	131
§ 12 二次曲面标准方程小结 .....	147
§ 13 单叶双曲面和双曲抛物面是直纹面 .....	153
§ 14 空间区域的简图 .....	161
<b>第五章 一般二次曲线的讨论</b> .....	171
§ 15 一般二元二次方程的化简与二次曲线的分类 .....	172

§ 16	二次曲线的不变量及类型判别 .....	185
* § 17	二次曲线的切线、中心、直径、渐近线和主轴 .....	200
<b>第六章</b>	<b>平面上的正交变换和仿射变换</b> .....	<b>218</b>
§ 18	平面仿射变换及图形的仿射性质 .....	218
§ 19	正交变换及仿射变换的其他特例 .....	233
§ 20	仿射坐标系及图形仿射性质的应用举例 .....	242
	<b>习题的提示及答案</b> .....	<b>254</b>

# 引 言

## 解析几何的创立与它的重要性\*

### 一、费马和笛卡儿创立了解析几何

费马 (Fermat, 1601—1665, 法国人) 和笛卡儿 (Descartes, 1596—1650, 法国人) 是 17 世纪伟大的数学家, 由于他们直接从事科学研究工作, 关心曲线研究中的一般方法, 敏锐地看到数量方法的必要性, 而且注意到代数具有提供这种方法的力量, 因此他们就代数来研究几何. 他们所创立的学科叫坐标几何或解析几何, 其中心思想是把代数方程与曲线、曲面联系起来, 这个创造是数学中最丰富、最有效的设想之一.

一句话, 科学的需要和对方法论的兴趣, 推动费马和笛卡儿创立了解析几何.

#### 1. 费马在创立解析几何中的贡献

费马, 出生于商人家庭, 学法律并以律师为职业, 数学只是他的业余爱好. 虽然他只能利用闲暇时间研究数学, 但这并不影响他对数论和微积分作出第一流的贡献, 并同帕斯卡 (Pascal) 一起开创了概率论的研究工作, 他与笛卡儿同为解析几何的创始人.

费马关于曲线的工作, 是从研究古希腊几何学家特别是阿波罗尼奥斯 (Apollonius) 开始的. 阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》一书久已失传, 而费马是把它重新写出来的人之一. 他用代数来研究

---

\* 主要取材于 [美] 克莱因 M. 古今数学思想: 第二册. 上海: 上海科学技术出版社, 1979: 1-27.

曲线,他说,他打算发起一个关于轨迹的一般研究,这种研究是古希腊人没有做到的.1629年他写了一本《平面和立体的轨迹引论》(1679年出版),书中说,他找到了一个研究有关曲线问题的普遍方法.

费马的坐标几何,很可能是把阿波罗尼奥斯的结果直接翻译成代数的形式.他考虑任意曲线和它上面的一般点 $J$ (图1), $J$ 的位置用 $A, E$ 两个量定出: $A$ 是从点 $O$ 沿底线到点 $Z$ 的距离, $E$ 是从 $Z$ 到 $J$ 的距离.他所用的坐标就是我们现在的斜角坐标,但是 $y$ 轴没有明白出现,而且不用负数,他的 $A, E$ 就是斜角坐标中的 $x, y$ .

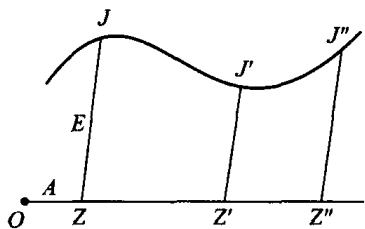


图 1

费马把他的一般原理叙述为:“只要在最后的方程里出现两个未知量,我们就得到一个轨迹,这两个量之一,其末端就描绘出一条直线或曲线.”图1中对不同位置的 $E$ ,其末端 $J, J', J'' \dots$ 就描绘出一条“线”.他的未知量 $A$ 和 $E$ ,实际上是变数,或者说联系 $A$ 和 $E$ 的方程是不定方程.他写出联系 $A$ 和 $E$ 的各种方程,并指明它们所描绘的曲线.例如,他给出方程(用我们现在的写法) $dx = by$ ,并指明它代表一条直线;他又给出 $d(a-x) = by$ ,并肯定它也表示一条直线;方程 $p^2 - x^2 = y^2$ 代表一个圆; $a^2 - x^2 = ky^2$ 代表一个椭圆; $a^2 + x^2 = ky^2$ 和 $xy = a$ 各代表一条双曲线; $x^2 = ay$ 代表一条抛物线.由于费马不用负坐标,因此他的方程不能像他所说的代表整条曲线.他确实领会到坐标轴可以平移和旋转,因为他给出一些较复杂的二次方程,并给出它们可以简化到的简单形式.他肯定:一个联系 $A$ 与 $E$ 的方程,如果是一次的,就代表直线;如果是二次的,就代表圆锥曲线.在他的《求最大值和最小值的方法》一书中,他还引进了曲线 $y = x^n$ 和 $y = x^{-n}$ .



## 2. 笛卡儿在创立解析几何中的贡献

笛卡儿首先是一位杰出的近代哲学家,另外他还是近代生物学的奠基人,第一流的物理学家,同时也是一位数学家.笛卡儿1596年3月31日出生在法国土伦的拉哈耶,8岁上了一所耶稣教会学校,16岁进入普瓦捷大学攻读法学,20岁大学毕业后去巴黎当律师,在那里他花了一年的时间,跟两位神甫梅森和迈多治一起研究数学.在其后的九年中,他曾在几个军队中服役,到过荷兰、丹麦和德国,但一直继续研究数学.回到巴黎后,他为望远镜的威力所激动,一心钻研光学仪器的理论和构造.1628年,他32岁时移居荷兰,得到较为安静自由的学术环境,在那里他住了二十年,写出了他的著名作品.1649年冬天他被邀请去瑞典做克里斯蒂娜女皇的教师,第二年春天,1650年2月11日在那里患肺炎去世,享年54岁.

1637年笛卡儿写的《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》(简称《方法论》)一书出版,这是一本哲学的经典著作,包括三个著名的附录:《几何》、《折光》和《陨星》.《几何》是他写的唯一一本数学书,他关于坐标几何的思想,就包括在这本《几何》中.由于费马的书《平面和立体的轨迹引论》虽然是在1629年就已写成,但直至费马死后十几年,1679年才由他的儿子出版,因此人们通常把笛卡儿的这本《几何》的出版作为解析几何创立的标志.笛卡儿的其他著作有《思想的指导法则》、《世界体系》、《哲学原理》和《音乐概要》等.

笛卡儿首先是作为一位哲学家来研究数学的.他致力于寻找在一切领域建立真理的方法,他说这个方法就是数学方法.数学立足于公理之上的证明是无懈可击的,而且是任何权威所不能左右的,数学提供了获得必然结果以及有效地证明其结果的方法.笛卡儿清楚地看到,数学方法超出它的对象之外,他说:“……所有那些目的在于研究顺序和度量的科学,都和数学有关.至于所求的度量是关于数的还是形的,是关于星体的还是声音的,以及是关于其