暨南大学研究生教材

管理运筹学 II

OPERATIONS RESEARCH FOR MANAGEMENT II

左小德　薛声家　主编

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

暨南大学研究生教材

管理运筹学 II

OPERATIONS RESEARCH FOR MANAGEMENT II

左小德　薛声家　主编

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

管理运筹学Ⅱ/左小德，薛声家主编．—广州：暨南大学出版社，2010.1
（暨南大学研究生教材）
ISBN 978-7-81135-399-0

Ⅰ．管…　Ⅱ．①左…②薛…　Ⅲ．管理学—运筹学—研究生—教材
Ⅳ．C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 191628 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
营销部（8620）85225284　85228291　85220693（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷：广州桐鑫印刷有限公司

开　本：787mm×960mm　1/16
印　张：12.25
字　数：220 千
版　次：2010 年 1 月第 1 版
印　次：2010 年 1 月第 1 次
印　数：1—2000 册

定　价：22.00 元

总 序

百年沧桑，弦歌不辍；巍巍暨南，展焕新颜。暨南大学自1906年创办以来，始终秉承“宏教泽而系侨情”的办学宗旨，注重以中华民族优秀的传统道德文化培养造就人才。学校积极贯彻“面向海外，面向港澳台”的办学方针，建校至今，共培养了来自世界五大洲127个国家和地区的各类人才20余万人，堪称桃李满天下。

暨南大学的研究生教育始于1978年，是改革开放后全国首批研究生招生培养单位。1984年，学校率先招收海外及港澳台研究生，是全国当时唯一的试点单位。1987年开始，创建了与境外知名大学合作培养研究生的教育模式，目前已与中国香港、美国、加拿大、德国、英国等地区和国家的众多知名大学联合培养研究生；1989年开创内地高校招收境外“兼读制”研究生及境外研究生面授点的先河。经过30多年的建设与发展，暨南大学已经成为推动港澳台合作办学及国际办学的探索者和实践者，联结内地与港澳台同胞、海外侨胞的桥梁和纽带，被誉为“中国境外研究生教育的试验田和窗口”。

目前，学校已拥有博士学位授权一级学科6个，博士学位授权二级学科39个，硕士学位授权一级学科18个，硕士学位授权二级学科135个，6种硕士专业学位及临床医学博士专业学位；学位授权点覆盖了哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、医学和管理学10个

学科门类；设有博士后科研流动站9个，博士后工作站1个。学校师资力量雄厚，有专任教师1 677人，其中中国科学院院士1人，中国工程院院士4人，博士生导师297人，教授390人，副教授590人。

教材建设是课程体系和教学内容改革的核心，是进一步加强研究生教学工作，深化教学改革，提高研究生教育教学质量的重要措施。为此，学校启动了“暨南大学研究生教材建设”项目，将系统出版一批具有学科特色和水平的研究生教材。在研究生部的精心组织下，通过专家组评审，分批立项，每批二三十种，覆盖了公共学位课、专业学位课和专业选修课等课程。这些教材符合研究生教育改革发展趋势，反映了学科建设的新理论、新技术、新方法，在国内同类教材中较为先进。我们以期通过几年的努力，打造出一系列特色鲜明的研究生精品教材。

暨南大学副校长 纪宗安

2009年7月

前　言

为了加强和改进研究生培养工作，改革教学内容和教学方法，充实高层次人才培养的基本条件和手段，促进暨南大学研究生教育整体水平的提高，学校决定支持一批研究生公共学位课程、专业课程、专业选修课程的教材的出版。本书获暨南大学研究生教材建设项目资助。

《管理运筹学Ⅱ》是在《管理运筹学》的基础上，面向企业管理和管理科学与工程的研究生、博士生开设的一门必修/选修课程的教材。学生在学过确定性运筹学、线性规划和单一目标规划的基础上，进一步学习非线性规划、多目标规划、博弈论和马尔可夫过程。同时，对于复杂的问题，学习仿真的基本原理和方法，掌握一定的仿真技术和工具。

全书分为6章，第1章由薛声家编写，第2章、第5章由左小德和梁云编写，第3章由郑江波编写，第4章由易余胤编写，第6章由徐咏梅编写。

编者

2009年10月

目　录

总　序 ······ 1

前　言 ······ 1

1　非线性规划 ······ 1

1.1　基本概念与最优性条件 ······ 1

1.2　非线性规划求解方法概述 ······ 18

1.3　使用计算机软件求解非线性规划 ······ 25

1.4　应用举例 ······ 37

2　多属性决策分析 ······ 47

2.1　多属性决策基本概念与数据整理技术 ······ 48

2.2　基数型多属性决策方法 ······ 54

2.3　序数型多属性决策方法 ······ 60

3　多目标规划 ······ 68

3.1　多目标规划问题举例 ······ 68

3.2　多目标规划问题的解 ······ 71

3.3　多目标规划问题求解方法概述 ······ 75

3.4　评价函数法 ······ 76

3.5　处理多目标规划问题的其他方法 ······ 81

3.6　应用计算机软件求解多目标规划问题 ······ 83

4　博弈论 ······ 90

4.1　概述 ······ 90

4.2　博弈论的基本概念 ······ 91

4.3　完全信息静态博弈 ······ 95

4.4 完全信息动态博弈 …… 109

5 仿 真 …… 121
5.1 蒙特卡洛数字仿真 …… 123
5.2 典型的仿真应用 …… 127

6 马尔可夫过程 …… 155
6.1 马尔可夫过程简介 …… 155
6.2 市场份额分析 …… 157
6.3 稳态概率 …… 165
6.4 稳态概率在决策中的运用 …… 171
6.5 软件求解稳态概率 …… 172
6.6 吸收状态的特例 …… 179

参考答案 …… 185
参考文献 …… 188

1　非线性规划

本章要求

- □ 掌握非线性规划的数学模型及建模步骤，熟悉一些常用的模型
- □ 掌握一些有关解的概念和各种最优性条件
- □ 了解凸性与广义凸性及其在非线性规划中的应用
- □ 会使用专业软件求解非线性规划
- □ 了解非线性规划求解方法的概况

我们知道，经济管理领域中有很多实际问题可以表示（或近似表示）为线性规划模型求解，线性规划模型中的目标函数和约束条件都是决策变量的线性函数。但在实际中也存在大量问题，其优化模型的目标函数或（和）约束条件不能用线性函数来表达。目标函数或约束条件中包含有非线性函数的规划问题称为非线性规划问题。

一般来说，求解非线性规划要比求解线性规划困难得多，也不像线性规划那样有适用于一般情况的单纯形法或内点法。非线性规划到目前为止还没有适用于各种问题的一般方法，现有的各种方法都有自己特定的适用范围。因此，这是一个仍需要进一步深入研究的领域。

1.1　基本概念与最优性条件

1.1.1　非线性规划的数学模型

下面通过一些简单的例子来介绍非线性规划的数学模型。非线性规划的建模思路与线性规划完全类似。

例 1　构件表面积问题

要设计一个如图 1－1 所示的半球形和圆柱形相连接的构件，要求在构件体积为定值 V 的条件下，确定构件的尺寸，使其表面积最小。

解：构件大小取决于其圆柱体的底半径和高。设该圆柱体的底半径为 x_1，高为 x_2，由于构件的表面由半球顶面、侧面和底面组成，因此其表面积为：

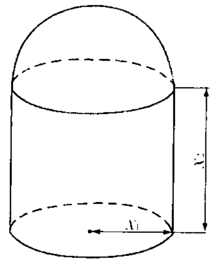

图1-1

$$S=2\pi x_1^2+2\pi x_1x_2+\pi x_1^2$$
$$=3\pi x_1^2+2\pi x_1x_2$$

构件的体积为半球体和圆柱体的体积之和，因此有条件：

$$\frac{2}{3}\pi x_1^3+\pi x_1^2x_2=V$$

最后可得到如下数学模型：

$$\min\ S=3\pi x_1^2+2\pi x_1x_2 \tag{1.1}$$
$$\text{s. t.}\quad \frac{2}{3}\pi x_1^3+\pi x_1^2x_2=V \tag{1.2}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0 \tag{1.3}$$

上述模型可以使用微积分学中的方法进行处理，例如，由等式约束（1.2）可解出 $x_2=\frac{V}{\pi x_1^2}-\frac{2}{3}x_1$，代入（1.1）得到 $S=\pi\left(\frac{5}{3}x_1^2+\frac{2V}{\pi x_1}\right)$。令 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_1}=0$，可求出 $x_1^*=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$（注意到 $\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x_1^2}(x_1^*)>0$），继而求出 x_2^* 和 S^* 的值。

注：例1也可以用多元微分学中的拉格朗日乘数法求解。

由于无约束或只带有等式约束的极值问题的研究可以回溯到几个世纪以前，所以称此类问题为经典优化问题，而称带有不等式约束的极值问题为近代优化问题。

例2　生产计划问题

某工厂生产三种产品（假定所有产品都可以完全销售），单位生产成本分别为5元、12元、9元。设 x_j（$j=1,2,3$）为产品 j 的月需求量（单位：千件），P_j 为产品 j 的单位售价（元），则需求关系式为：$x_1=18-P_1$，$x_2=9+P_1/3-P_2$，$x_3=13-P_3$。表1－1列出有关资源需求。试求使得生产利润最大的生产方案。

表 1-1 生产过程的资源需求（小时）

	产品1	产品2	产品3	每月可用量
机器时间	0.3	0.35	0.6	1 800
劳工时间	0.5	0.8	0.4	2 950

解：设 x_j 表示产品 j 的产量（$j=1, 2, 3$），Z 表示生产利润，则 $Z=(P_1-5)x_1+(P_2-12)x_2+(P_3-9)x_3$（单位：千元）。使用需求关系式和表 1-1 可得如下数学模型：

$$\max\ Z=13x_1+3x_2+4x_3-x_1^2-\frac{1}{3}x_1x_2-x_2^2-x_3^2$$

$$\text{s. t.}\quad 300x_1+350x_2+600x_3\leqslant 1\ 800$$

$$500x_1+800x_2+400x_3\leqslant 2\ 950$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$$

为了方便求解后的分析，我们不把模型化简。使用软件求解可得最优解为 $x_1=5.6$，$x_2=0$，$x_3=0.2$，目标函数最优值为 $Z=42.2$。这说明该厂的最优生产计划是：生产 5 600 件产品 1 和 200 件产品 3，不生产产品 2，可获得最大利润 42 200 元。

例 3 生产成本问题

设要在产量 Q 不低于某水平 Q_0 的条件下，极小化生产成本。

解：为了简化起见，设所考虑的决策变量为资本和劳力的投入量，分别记为 K 和 L，则由经济学中著名的 Cobb-Douglos 生产函数，有：

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

其中，Q 为产出量，A 为生产技术水平，α 和 β 为参数。今设已知资本报酬率为 r，工资率为 w，则生产成本为 $C=rK+wL$。因此，本问题的数学模型为：

$$\min\ C=rK+wL$$

$$\text{s. t.}\quad AK^{\alpha}L^{\beta}\geqslant Q_0$$

$$K,\ L\geqslant 0$$

例 4 投资决策问题

某公司拟在 10 个可能的项目中选择不多于 7 个项目投资。各个项目所需

投资分别为 $a_j=30, 70, 65, 40, 80, 35, 50, 45, 25, 75$（万元），并预计可获得收益 $b_j=5, 12, 10, 8, 13, 6, 8, 7, 4, 13$（万元）。公司要求总投资额不超过240（万元）。另外，由于某种原因，规定：项目1，2，3，4，5至多选四个；项目6，7，8，9至少选三个。求最佳投资方案。

解：引入0－1变量作为投资决策变量

$$x_j=\begin{cases}1 & \text{若决定投资第}j\text{个项目}\\0 & \text{若决定不投资第}j\text{个项目}\end{cases}\quad(j=1, 2, \cdots, 10)$$

则投资总额为：

$$\sum_{j=1}^{10} a_jx_j=30x_1+70x_2+\cdots+75x_{10}$$

投资总收益为：

$$\sum_{j=1}^{10} b_jx_j=5x_1+12x_2+\cdots+13x_{10}$$

最佳投资方案应是投资收益率（单位投资所得到的收益）最大的方案。不难看出，本例的数学模型为：

$$\max\ R=\frac{\sum_{j=1}^{10} b_jx_j}{\sum_{j=1}^{10} a_jx_j}$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases}\sum_{j=1}^{10} a_jx_j\leqslant 240\\ \sum_{j=1}^{10} x_j\leqslant 7\\ \sum_{j=1}^{5} x_j\leqslant 4\\ \sum_{j=6}^{9} x_j\geqslant 3\\ x_j=0\text{ 或 }1,\ j=1, 2, \cdots, 10\end{cases}$$

使用软件求解，可得最优解：$x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=0$，$x_4=1$，$x_5=0$，$x_6=1$，$x_7=1$，$x_8=0$，$x_9=1$，$x_{10}=1$；目标函数最优值 $R=0.1733$。因此，最佳投资方案为对项目4，6，7，9，10进行投资，相应的投资收益率为17.33%。

例5　非线性曲线的拟合问题

某物理量 y 是时间 t 的函数，具有形式 $y(t)=a+be^{-ct}$，其中 a、b 和 c

待定，$c \geqslant 0$。已知 $y(0)=1$，并已测得在时刻 t_i，y 的近似值为 y_i（见表1－2）。

表1－2 物理量 y 和时间 t 的数值

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0.875	0.795	0.720	0.706	0.677	0.674	0.670	0.653	0.648	0.641

请用最小二乘法求出参数 a、b、c 的最佳值。

解：由 $y(0)=1$ 可得 $a+b=1$，因此有模型：

$$\min F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{10} (a+be^{-ct_i}-y_i)^2$$
$$\text{s. t.} \quad a+b=1, \ c \geqslant 0$$

上机求解可得 $a=0.644$，$b=0.356$，$c=0.449$，$\min F=0.000\ 556$。

例6 股票的投资组合问题

一个投资者拟选择A、B、C三种业绩好的股票来进行组合投资，通过对这三种股票的市场分析和统计预测，得到相关数据如表1－3所示。

表1－3 股票的相关数据表

股票名称	五年期望收益率（%）	五年的协方差（$\%^2$）		
		A	B	C
A	92	180	36	110
B	64	36	120	－30
C	41	110	－30	140

投资者有一笔资金打算投资这三种股票，希望年收益率不少于65%，试给出风险最小的投资方案。

解：设 x_1，x_2，x_3 分别表示A，B，C三种股票的投资份额，则有 $0 \leqslant x_j \leqslant 1$，且 $\sum_{j=1}^{3} x_j=1$。投资的年收益率为 $R=\sum_{j=1}^{3} x_jR_j$，其中 R_j 是第 j 种股票的年收益率，它是随机变量，用每种股票5年的平均收益率 $\bar{R}_j$ 代替 R_j 的期望值 $E(R_j)$，则 R 的期望值为 $E(R)=\sum_{j=1}^{3} x_j\bar{R}_j$，投资者希望 $\sum_{j=1}^{3} x_j\bar{R}_j \geqslant 0.65$。

用什么来衡量投资的风险呢？美国学者 Markowitz 建议用收益率的方差或标准差来衡量，即方差越大则风险越大，反之则风险越小。他所提出的投资组合选择模型及其所蕴涵的风险分散思想是现代投资理论的基础。

由概率统计的知识可得 R 的方差为：

$$\begin{aligned} Var\ (R) &= Var\ (\sum_{j=1}^{3} x_j R_j) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j\, cov\ (R_i,\ R_j) \end{aligned}$$

式中，$cov\ (R_i,\ R_j)$ 是随机变量 R_i 和 R_j 之间的协方差，当 $i=j$ 时，协方差即方差。于是有如下模型：

$$\begin{aligned} \min\ Z = 180x_1^2 + 120x_2^2 + 140x_3^2 + 72x_1x_2 + 220x_1x_3 - 60x_2x_3 \\ \text{s. t.}\quad 0.92x_1 + 0.64x_2 + 0.41x_3 \geqslant 0.65 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

上机用软件求解得 $x_1 = 0.235\ 071\ 3$，$x_2 = 0.522\ 233\ 2$，$x_3 = 0.242\ 695\ 5$，$z = 64.705\ 405\ 1$。即三种股票的投资组合比例分别为 23.51%、52.22%、24.27%，最小方差为 64.705 405 1（$\%^2$）（标准差为 8.044%）。

由上面的例子可以看出，非线性规划问题的数学模型也是由决策变量、目标函数和约束条件三要素组成的，只不过模型的目标或约束函数含有决策变量的非线性表达式。它的一般形式常写为：

$$\min f\ (X) \tag{1.4}$$

$$(\text{NLP})\qquad \text{s. t.}\quad g_i\ (X)\ \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1.5}$$

$$h_j\ (X)\ = 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p \tag{1.6}$$

其中，$X = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$ 为决策变量组成的 n 维向量，即 $X \in E^n$。

由于求 $\max f\ (X)$ 等价于求 $\min\ [-f\ (X)]$，因此仅考虑极小化问题无损于一般性。对于约束条件为"$\geqslant$"不等式的情形，可通过两端乘以"-1"化为"$\leqslant$"的形式。

记集合 $S = \{X \in E^n \mid g_i\ (X)\ \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ h_j\ (X)\ = 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$，则（NLP）可表示为 $\min\limits_{X \in S} f\ (X)$，其中 S 称为约束集或可行域。当 $S = E^n$ 时，（NLP）称为无约束极值问题；当 $S \neq E^n$ 时，（NLP）称为约束极值问题。

1.1.2 非线性规划的解及图解法

设 $X\in E^n$，用 $\|X\|$ 表示向量（点）X 的模，通常定义 $\|X\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$。易见，对于 X^1，$X^2\in E^n$，$\|X^1-X^2\|$ 表示 X^1 和 X^2 两点之间的距离。

考虑（NLP），约束集 S 中的点称为可行解。下面给出最优解和极小点的概念。

设 $\overline{X}\in S$，若对于任意 $X\in S$ 都有 $f(\overline{X})\leqslant f(X)$，则称 $\overline{X}$ 为（NLP）的最优解，也称全局极小点；若存在某个 $\varepsilon>0$，使得在 $\overline{X}$ 的邻域 $N_\varepsilon(\overline{X})=\{X\mid \|X-\overline{X}\|<\varepsilon\}$ 中的任意 $X\in S$，都有 $f(\overline{X})\leqslant f(X)$，则称 $\overline{X}$ 为（NLP）的局部极小点。

注：(1) 若在上述定义中，增加条件 $X\neq\overline{X}$，且要求严格不等式 $f(\overline{X})<f(X)$ 成立，则称 $\overline{X}$ 为严格（全局或局部）极小点。

(2) 在上述定义中，如果将不等号反向，则可得到极大点的定义。

图 1-2 给出了 $n=1$ 情况下的最优解的直观图示。从图中可以看到：X^* 是严格全局最优解；X_1、X_4 以及线段 $[X_2,X_3]$ 上的所有点都是局部最优解，但只有 X_1 与 X_4 是严格的局部最优解。

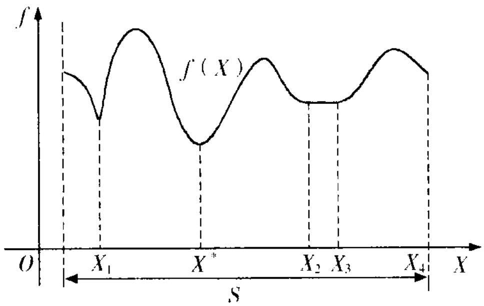

图1-2

当只有两个变量时，较简单的非线性规划也可以像线性规划那样用图解法求解。图解法虽然实际用处不大，但简单直观，有助于初学者了解非线性规划问题的几何意义和一些基本概念。图解法的主要思路是：首先画出可行域 S 和目标函数等值线族 $f(X)=c$（c 为参数），然后确定使得 c 取最大值（对于求 max 问题）或最小值（对于求 min 问题）的等值线与可行域 S 的公共点。

例 7　用图解法解下列非线性规划

（1）$\min f_1(x_1, x_2) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2$

$$\text{s.t.}\quad g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 3 \leqslant 0$$
$$x_2 \leqslant 1$$
$$x_1 \geqslant 0$$

（2）$\max f_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$，约束条件如（1）

（3）$\min f_3(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1 + 10x_2$，约束条件如（1）

解：图 1－3 的阴影部分为可行域 S，$f_1(x_1, x_2) = c$（$c \geqslant 0$）为半径$\sqrt{c}$、圆心（3，2）的圆族。因此（1）的最优解为图中的 A 点，即直线 $x_2 = 1$ 与抛物线 $g(x_1, x_2) = 0$ 的交点，其坐标为（2，1），$\min f_1 = 2$。对于（2），$f_2(x_1, x_2) = c$ 为平行直线族，容易看出该直线族与抛物线 $g(x_1, x_2) = 0$ 的切点 B（1，－2）为最优解，最优值 $\max f_2 = 4$。最后，读者不难看出 $f_3(x_1, x_2) = c$ 为椭圆族，其中心为（$\frac{1}{3}$，－1），该点 D 落在可行域 S 的内部，因此（3）的最优解为 $x_1 = \frac{1}{3}$，$x_2 = -1$，目标函数最优值为－6。

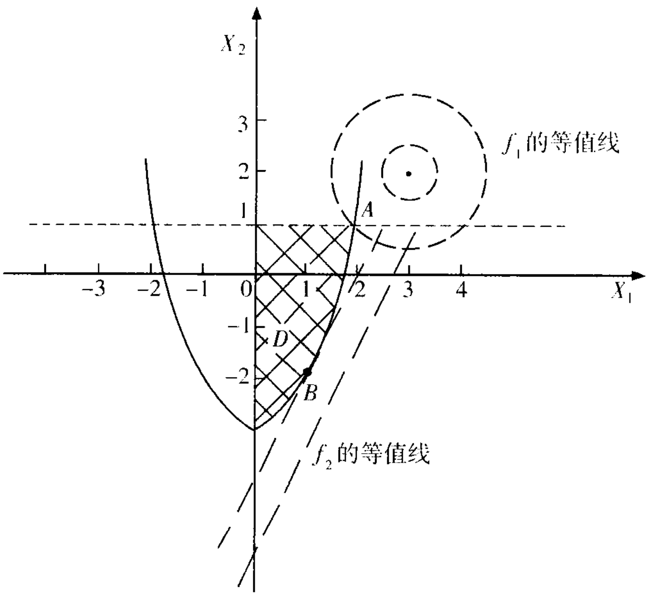

图1－3

我们知道，线性规划的最优解（若存在）一定在可行域的某个顶点（极点）达到，而例7说明，非线性规划的最优解一般在可行域的边界点（不一定是顶点）达到，但也可能落在可行域的内部。

1.1.3 无约束问题的极值条件

在微积分学课程中，已经讲授过一元函数和多元函数的极值问题，现将 n（$n>1$）元函数 $f(X)$ 与一元函数 $f(X)$ 作对比并归纳于表1-4。

表1-4 一元函数与多元函数的极值条件

$\overline{X}$（或 $\overline{X}$）是极小点	必要条件	充分条件
$f(X)$	$f'(\overline{X})=0$	$f'(\overline{X})=0$ 且 $f''(\overline{X})>0$
$f(X)$	$\nabla f(\overline{X})=0$	$\nabla f(\overline{X})=0$ 且矩阵 $H(\overline{X})$ 正定

其中，$\nabla f(\overline{X})=\left[\dfrac{\partial f(\overline{X})}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f(\overline{X})}{\partial x_2},\ \cdots,\ \dfrac{\partial f(\overline{X})}{\partial x_n}\right]$ 为 $f(X)$ 在点 $\overline{X}$ 的梯度（此处假设 $f(X)$ 可微）；$H(X)$ 为 $f(X)$ 在点 $\overline{X}$ 的 Hesse 阵，即：

$$H(\overline{X})=\left[\frac{\partial^2 f(\overline{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

（此处假设 $f(X)$ 存在连续二阶偏导数）。

我们知道，梯度 $\overline{X}$ 的方向为 $f(X)$ 的等值线（等值面）在点 $\overline{X}$ 的法线方向，沿着这个方向函数值增加最快。

由线性代数可知，矩阵的正定性可以通过其顺序主子式的符号来确定。

1.1.4 凸函数及其性质

凸集、凸函数及其性质，是研究非线性规划问题不可缺少的内容，许多重要的结论都是在问题具有凸性的条件下才得到的。

设集合 $C\subset E^n$，若对于任意的 $\alpha\in[0,\ 1]$ 以及 C 中的任意两点 X^1 和 X^2，有 $\alpha X^1+(1-\alpha)X^2\in C$，则称 C 是凸集。

凸集的几何意义为：连接凸集中的任意两点的线段必包含于此集合之中。

易见，凸集的交集一定是凸集。

设 $f(X)$ 是定义在凸集 C 上的函数，若对于任意的 $\alpha\in[0,\ 1]$ 以及 C 中的任意两点 X^1 和 X^2，有

$$f(\alpha X^1+(1-\alpha)X^2)\leq \alpha f(X^1)+(1-\alpha)f(X^2) \qquad (1.7)$$

则称 $f(X)$ 是 C 上的凸函数。