

沈宏梁 著

无限的探索

清华大学出版社

无限的探索

沈宏梁 著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书以思想日记的形式整理了作者二十多年来关于数学哲学相关问题的思考成果,主要是提出了一种关于无限的新理论,原创了逻辑时间等新概念,这种新思想又旨在减少人们的相关认知过程中的一些失误。本书可以分为两个部分,第一部分是成文于十多年前的几篇文章及其说明,这些文章包括《自然数的再思考(一)》、《自然数中的基本矛盾》、《实数的再思考》、《Cantor 集合论是一种无限的数学吗?——实数的再思考之二》和《无限的再思考》;第二部分是对第一部分所要表述内容的一个更为全面的重新表达,主要包括“关于数学哲学的狂想曲”、“康托尔新理解”、“新理论视野下关于数的一个模型的速写”以及“逻辑时间”等几部分。

本书可作为对数学哲学、认知科学有兴趣的读者的参考读物。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

无限的探索/沈宏梁著. —北京:清华大学出版社,2010.5
ISBN 978-7-302-22323-8

I. ①无… II. ①沈… III. ①数学哲学—研究 IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 055983 号

责任编辑:王一玲

责任校对:时翠兰

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:163×220 印 张:7.5 插 页:2 字 数:123 千字

版 次:2010 年 5 月第 1 版 印 次:2010 年 5 月第 1 次印刷

印 数:1~1000

定 价:29.00 元

序言似乎需要像很多好心的朋友所劝说的那样请个名人或大家来做。思量再三,除了想起了当年维特根斯坦为了《逻辑哲学论》的出版迫于出版商的压力请了当时已经是名人的罗素先生做序的故事,实在找不出逻辑上内在的必然理由,故放弃。

本书努力想表述一种关于无限的新理论,这种新思想又旨在减少人们认知过程中的一些失误。本书可以分为两个部分,第一部分是成文于十多年前的几篇老文章及其说明,称为陈年老酒;第二部分就称老酒新装。其他该说的我想在书中都会说的,这里没必要重复。

那么,序中重点表达与本书相关的内心情感方面的致歉和鸣谢。

致歉:

首先想对父母说:在人生的最旺盛时期,由于对数学哲学的过度痴迷,使自己的人生道路显得有些杂乱,许多的选择会难以理解,有的选择甚至非常地对不起父母含辛茹苦的养育之恩,在此深表自责和愧疚。

对爱妻:由于游离于现实和脱离现实的思考,有时会使生活变得莫名其妙,尽管自己已通过一点聪明(非智慧)和努力担负了现实中一个男人的责任,但那是不够的。对这种无形的也是无限的思考,于自己的内心深处可以带来无限的乐趣,但那是天天生活在身边的爱人所无法共享的,尽管自己已经在尽最大的努力在“形式”上“最大限度”地减少它的存在。这只能理解为一种自私,为此深表内疚。

对那些通过阅读本书而发现了一些有价值的东西或有所启迪的读者,我想说:本应该用再简洁一些的一篇长一点的文章将思想整理表达出来,但却苦于时间和精力不济,也许有些冗余,也许由此多浪费了读者的眼神,浪费了一些物理资源,在此深表歉意。

在现实生活中,有一个名为“水木同正”的企业谱写着一段“中华箭”的网络安全故事,那是以我为领头的团队所开创的实业。但是,由于我对本书及相关探索的挂牵,放弃了许多让人羡慕的机会。在此,对多年来一直全力支持本人的紧密合伙人张红彬与众多忠心耿耿的业务骨干以及关心、支持、帮助过水

木同正的兄弟朋友们，为自己的这点私心表示深深的歉意。

理智的愧疚：自己的思维无论是全部还是潜伏在深层，一直为本书的思想折磨挂牵，形成的执著、痴迷使本该平静的心灵备受折腾，在此理智用语言向心灵致歉！

鸣谢：

要感谢的实在太多，几十年来身边的一切从某种角度上讲都值得我去感激：

感谢日月众星、青山绿水、鲜花小草等，是浩瀚美丽的大自然使我的思考常常新鲜神怡。

感谢中华古老的文化，要不无限问题的痴迷和缠绕肯定也把我整成康托尔(Cantor)第二了。庆幸之余心怀感激。

写书的我还得感谢本书的内容，是它让我拥有了一个持续如此长久的爱好，从而内心多了一份东西。有时笑话自己，总规定干涉自己的孩子不能沉迷于网络游戏，自己却一不小心沉迷于无限的游戏二十余载！于此再做个补记：本书定稿于2010年春节的牛尾虎头期间。记得大年三十除夕中国传统新年的钟声快要敲响之机，在大地一片爆竹声声、举国上下祥和喜庆的氛围中，见我时不时地回到案头梳理思绪、咬文嚼字，妻儿问曰：“书稿何时完成？过节了，轻松轻松吧！”吾窃曰：“这是我最轻松宁静快乐的时候，这才是我最大的享受……”“要不是现实的存在，我还真不愿结束！”再次认真地感谢这些文字背后的探索所带给我的。

至于要感谢的人，实在是太多了——有限但不可数，当然就不能一一列举了。前面致歉中提及的人当然是最要感谢的。还有我可爱的孩子沈博魁和沈博霖，虽然本书的写作剥夺了老爸不少本该属于你们的时间和心思，你们却还非常地支持我，关心我书写的进度，在我疲惫时安慰我，所以，想专门对你们说句“谢谢你们！我的好孩子，我爱你们！”最后要感谢母校清华大学出版社王一玲编辑的支持，她为本书成为现实做了很大的努力。

引子(2008年1月1日—1月8日) / 1

缘起(2008年1月8日—1月16日) / 3

“早期的几篇论文”的整理及简要评论(2008年1月18日—3月17日) / 4

早期的几篇论文之一——“自然数的再思考(一)” / 4

早期的几篇论文之二——“自然数中的基本矛盾” / 10

早期的几篇论文之三——“实数的再思考” / 13

早期的几篇论文之四——“Cantor 集合论是一种无限的数学吗? ——
实数的再思考之二” / 19

早期的几篇论文之五——“无限的再思考” / 28

早期的几篇论文之杂记 / 40

关于数学哲学的狂想曲：几点设想(2008年8月5日—10月28日) / 46

浅谈数学哲学的研究现状 / 46

杂谈数学哲学研究之意义、内容及出路 / 52

康托尔新理解——兼评康托尔的几个具体失误

(2008年10月8日—11月27日) / 56

批判一：理念层面 / 57

批判二：具体知识层面 / 60

新理论视野下关于数的一个模型的速写

(2008年11月28日(2009年9月25日重新开始)至2009年10月16日) / 76

自然数 / 77

“不自然(非天然)的”自然数 / 79

实数 / 81

逻辑时间

(2008 年 11 月 20 日(2009 年 10 月 16 日重新开始)至 2009 年 11 月 28 日) / **92**

逻辑“现状”杂谈 / 92

从悖论的角度看 / 94

从逻辑时间的观点看“经典”逻辑——兼说排中律和反证法 / 102

逻辑时间延伸“无限的再思考” / 105

逻辑时间的没完没了——从数学哲学到认知科学 / 110

后记(2010 年 1 月 1 日) / **113**

(2008年1月1日—1月8日)

每凡新旧交替之际,人的感慨总是要多一些。看看这日记(注:当2005年现实的事业有所成的时候,心又强烈地倾斜到学问,于当年元旦重新开始记录思想日记)的开始至今也已有三个年头。也就是说,自己想从商界回到学问已经又这么久了。

我认为自己的文字或许可以减少人们的些许迷惑,至少我愿望是这样的。因为我认为,自己曾经历过了一个从一头雾水到见了点滴和谐的光辉的心路历程,感受到那种看到一些本来毫不相干的东西背后似乎有那么一种灿烂的桥梁而带来的激动或惊喜,把它们记录下来或许会对有同样迷惑的人们走出“困境”有所启发和帮助。关于我所要总结的文字的意义后面将会有专门的章节论述。但说心里话,我依旧担心我的文字也会像大多数的文字一样只会引起更多的混乱,不仅仅是我自己的意思被曲解。为了避免误读,为了减少产生混乱的可能,需要付出的努力是巨大的。

而现实还有一件叫公司创业经营的事情牵扯着自己,由之带来的社会责任要为一个团队的吃饭问题而费心劳神,所以,注定我这辈子想要等到一个彻底静心的日子怕已是奢望。但时间之矢依旧“逝者如斯夫,不舍昼夜”,那么,我只能抓紧时间,哪怕是点滴。

所以,我想到了用零星时间来整理思想的方法。从而放弃那种完美地、系统地表述描绘自己理论体系的计划。这是受了《少年维特之烦恼》的启发。我会用“主题(×年×月×日—×月×日)”的方式整理(想想也好笑,一个思想是否有价值怎么会与时间相关呢?而且请注意这里的时间是整理表达思想的时间。但考虑到本书的主题正是与时间密切相关的,故而保留)。也就是在这段时间内围绕这一个题目,不管大小,至少我认为是有意义的,或者是在那个阶段正好由于某些日常生活事件而触发了我的一些相关思考的回忆,利用点点滴滴的时间来梳理。这样做,我知道,系统性肯定会很差,层次感上会倾向平坦,而且,由于没有系统地梳理,理性方面肯定会欠缺。而且因为基于日常感

悟,感性的成分肯定偏多。但我也一直怀疑,科学难道一定要剥离完所有的感性吗?

语言上尽量不去追求什么,要不我不会有效率和进展。我还会用自己的文字风格来表述自己的思想,这肯定会被批评不够学术。自己深知,这种用随笔写学术的做法可能会被认为是一种疯狂的尝试。写到后来,我还想“勇敢”地承认,有些文字只是用来凑字数的。(可叹!)但我依旧认为,那都只是一种表达的形式而已,内容应该是更为重要。所以,也请大家不要用文字的风格之类去品味,而是看看其中表达的思想是否对你的思考有所启迪。而且,在引文或相关对比研究等方面我会做得很差。(注:但后来我还是尽最大限度地努力了。先前我之所以不主张引文有几个原因,窃以为一种思想的流露表述与谁曾经说过什么无关,主要的是思想本身内在的一致性和连贯性,而采用引文往往容易破坏这种内在需求;而且引文还往往伴有断章取义的缺点。后来之所以尽量采用引文,更多的是考虑到这样做可以表达一种对思索同仁的尊重和感激。)这倒不是我不屑或是不会做相关的比较研究,相反我认为任何的研究探索都是建立在前人的基础之上的,而确实是时间上等原因制约我去把这方面的工作做好。在此也深深地为自己的不敬觉得不安,我只能申明自己对那些同样有兴趣于相关问题并做过认真思考的所有同仁在内心怀有深深的敬重之意。另一方面,任何原创性的思想大多是在对自己内心深处痛苦的挣扎、对看到的不和谐希冀超越而产生的,所以不会是简单的延伸。更何况,自己丝毫没有说想要对自己文字表达的内容有什么特殊的权益,因为,我想做的只是想把曾经产生于自己头脑中的那场让我牵肠挂肚一辈子的“风暴”进行一次科学的、学术性的描绘,所以如果其中的某些内容正好和别人的相似了,决非剽窃之意,在此表示歉意,而且自以为这种可能性应该很小。因为我总认为,真正的原创性思维,即便有些形式上的一致,也总有其特殊性的。上述几点似乎决定了这些文字肯定是够不上“合格”的学术论文,但希望由于它的内涵而具有相应的学术价值。

所有这些元素将使得产生的文字离我满意的地步肯定会很远,这对一个比较追求完美的人来说本身是痛苦的,但有总比没有强……

(2008年1月8日—1月16日)

自己对相关问题的思索,起源于大学一年级学习熵的概念。而沉迷于数学哲学的相关思考是源自我大二(1986年)学习集合论的时候。

从那时开始,我狂热地思索,饥渴地阅读了几乎所有能够在当时清华大学图书馆找到的相关的中文文献,其中以译著、译文为主。这也是我思考的出发点,显然有些“陈旧”。这也是一直让我不安或没有多少自信的根本原因。但是,后来也零星地看过一些新一点的资料,每次都还是“惊喜”地发现自己的观点并不旧,看到的似乎更多、更远些,所以信心在增加,同时挂牵也就更放不下。在那个风华正茂的年代通过持续的思考,为出现了所谓的思想火花而激动不已。自己觉得看到了某些东西,觉得抓住了一些问题的根本。关于这些思考,自己觉得有所心得,所以从大学高年级开始就一直想把它整理出来。但一直为生存(包括大学时的学业和毕业后的工作)而牵制,除了大量的零星笔记而没有太多的进展。其中,从1992年底到1993年中,由于从日本进修回来有一整段时间在老家休息,利用那段时间,我开始了较系统的整理,包括“无限的探索”这个题目、一个整体的纲领以及几篇具体的文章的雏形都形成于那个时期。1993年开始的研究生初期又将几篇文章进行了具体的整理,形成了几篇自己还算满意的文章:《实数的再思考》、《Cantor集合论是一种无限的数学吗?——实数的再思考之二》、《自然数的再思考》、《自然数中的基本矛盾》、《无限的再思考》。记得另外还想写的一个题目是“悖论的再思考”。对《无限的再思考》当年是作为提纲性的文章,只是描述了一个概貌,而《实数的再思考》、《自然数的再思考》是作为一个铺垫而写的。很显然,现在我想做的无非是将其中未尽之意加以描绘、表述。但本来按照我的理想,出现的结果应该是一个系统性很强的新体系,这些文章的内容是这个体系中一些部分,而不是这些文章本身成为一个部分。现在,我选择了以补充、添加等方式把更多的内容先挖掘表达出来,放弃原本想自己完成的精雕细琢工作。

那么就从整理工作开始吧。

“早期的几篇论文”的整理及简要评论

(2008年1月18日—3月17日)

下面还是先全文列出这些文章，只是把内容提要、参考书目等部分删除。

早期的几篇论文之一——“自然数的再思考(一)”

还没有人怀疑过自然数。其实，自然数可以看成是数学的开始，也是各种无限理论分歧的起点。

有必要对自然数本身进行专门的再思考，是为了解决存在于思维中的一些困惑，而且这种困惑具有一定的普遍性而且非常重要。困惑之一：我的思维从一开始便对自然数后面的那种追影子似的过程接受不了，并对之深深地感到疑惑。真不明白为什么人们一直未曾去正视过这种过程中存在的问题而把自然数视作一个完整的概念接受下来。困惑之二：我发现之所以出现上述困惑主要是与对自然数的“后继性”的理解上的困惑有关。这种后继性一方面似乎让人觉得只是从属于每个自然数而已，另一方面又让人觉得它是超乎自然数个体的，总之，是有种让人琢磨不透的东西扰乱着我们的思维。这种疑惑的排除显然对“所有自然数的总体”的存在性等这样引起智者们争论的问题的重新认识提供了一个机会。

说起自然数，直观地便是 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 。这也是自然数的一个最直观的模型，其他的许多认识方法最后也是归结到这种模型上来的，但这只是一种带有模糊性的模型。这种值得引起我们注意的模糊性是指模型里的“……”蕴涵着不明确性。很显然，之所以采用这种“……”的表达方法，是我们的思维已经觉察到仅仅靠数体的列举并不能列举完毕而构成一个完整体，故而采用了这么一种能引导我们的思维发散的方法，以期趁思维“混沌”之际似乎能够得到关于自然数的完整体。从这个意义上说，这是人们企图描述出自自然数完整

体的一种努力和尝试。分析一下形成这个模型的过程也许是有好处的。认识从某些特定的自然数开始,然后通过对个体的抽象而得到总体的概念,也即为了勾画出自然数的整体,需要集积全部的个体的自然数,这是蕴涵了由个体组成全体的观念的。具体地说,作为个体,从 1, 2, 3 开始,但是自然数很多,靠这样列举,列到 100 也只是 100,列到一万也只是一万,于是便用了“…”加以过渡,继而引出了有代表意义的 n ,用它代表任意一个可得到的自然数,如 1010, 10 0100 都可以,也许因为有了它,已可代表任意的一个自然数,所以模型到此似可截断。但还另有一条却不允许这么做,即人们已经意识到每个自然数都会有紧跟其后的数,所以,即便是“万能的” n 也还有它的后继数 $n+1$ 紧跟其后。因此不允许我们在某个地方截断而固定下来,于是便有了……这条长长的尾巴。但对这条尾巴的理解上的困惑也即随之而来。首先是有穷性的问题。很明显, n 是有穷数这一点是人们所普遍接受的,而我们的思维是不易接受也不易想象一个从有限一步跳到无限的过程,所以紧跟其后的应该还是有穷数,而且不管延伸到何处都是一样的。所以人们似乎可以认为它所代表的应该是有穷数。既然是有穷数,那么思维应该是能够把握的。但是,这里的延伸是没有尽头的,进入了这种过程后,思维就似乎已无力驾驭那滚滚前伸的势头,总有一种望洋兴叹之感。这显然是一个隐含的矛盾。对此,过去人们提出了“每个自然数是有限的,但自然数总体个数却是无限的”这一勉强的不自然的认识。但个数无限的自然数又究竟是怎样完成的问题仍然是一个值得探讨的问题。而对这些问题想要在这样的认识范围内就事论事而没有新的观念上的突破便说得一清二楚是不可能的,它只会引起无休止的争论。在进入实质性的讨论之前,再就关于自然数的另一种认识方法——Peano 公理定义进行考察。

Peano 关于自然数的定义,被认为是自然数定义中的一种被普遍接受了、权威性的定义。它先有三个基本概念(“1”、“后继”、“自然数”),又有五条公理是:

1. 1 是一个自然数。
2. 任何自然数的后继是一个自然数。
3. 不同的自然数决不可能有相同的后继。
4. 1 不是任何自然数的后继。
5. 如果某件事情对于 1 为真,并且当它对于一个自然数为真时它对于该

自然数的后继也为真,那么,它对于所有的自然数都为真。

它的前四条公理就如其简洁的形式表述着简单的内容并易为人们所理解。而被称为是数学归纳法的基础的第五条公理,则如其形式上就复杂些一样,显得重要些,其内容也较复杂些。看上去它是在描述一种性质,但就如在字面上也出现了“所有的自然数”这一名词一样,实际上是在试图勾画出整幅自然数图像中的总体像,也就是想定义出自然数的总体。它是想通过揭示由后继的不断持续得到的都是自然数而且不会有任何别的东西是自然数这一点以达到构成“所有的自然数”这个总体概念;想通过对个体的一次遍历而排除有别的东西混入其内,也排除个体数的遗漏。具体地说,有了归纳性,推理判断可以无止境地延伸下去以至冲破一切有限的、给定的障碍,即某种性质可以无限止地在数体中蔓延下去。但是另一方面,数的再生过程也是无限止的,不管走到哪里都还可保证有新数可再生成。这两个趋势都是没有尽头的,而且这两种趋势是处于同等级地位的,是均等的。而这种蔓延是否可遍及到数体全部这一点是无法判定的,对判定结果的刨根究底的追踪,犹如“阳光下追逐影子”的过程,不管如何追逐,影子总依旧映在前面,而影子的存在也不会阻挡那延伸的奔驰去超越任何一个给定的路标点。它的不可判定性其实是源于数体的不可完成性(不完备性、无穷性),而勉强地认为某种思维抽象超越过程能把我们带到某个完结的终点的看法,犹如在势均力敌的争执双方中生硬地挤掉某一方而达到某种表面上的统一,这么做显然是没有道理的,是不公正的,是含有不完备性的判定,所以也是没有真正说服力的,也达不到形成真正完整概念的地步。我们是不是可以不这么盲目地追逐下去而采用某种另外的办法,即不是去判定而是去辨明争执的原因以便从一开始就去避免这种不可判定性,从而达到完整的认识呢?

这里我们指出自然数这个由思维在认识过程中形成的概念体并不是一种简单的单一层次上的存在,它是一种复杂体,对它的认识其实至少要包含两个方面或两个层次,一个是个体的层次,另一个是总体(整体)的层次。所谓个体层次,是对具体的个体数实体或者是泛指数实体(如 $1, 2, 3, n$ 等)考察的认识角度,这个认识角度由于其简单性,人们的思维还没有什么疑虑;所谓总体层次,是与个体层次相对应的一种旨在对自然数的整体性图像进行描述的一种认识角度,如前面分析的模型中的“……”及公理中的第五条等都是这种努力,正是在这种整体性的考察中一直困惑着人们,如“所有的自然数”究竟是何种意义

下的存在这个根本性问题，一直如蒙着一层薄纱而找不到一个令人满意的清晰的图像和明确的答案。这种总体层次的认识之所以需要，主要有两个方面的原因，一是从自然数本身出发的需要，是自然数本身用以构成完整体的需要。简单地说，由抽象，我们得到了具体的确定了数 $1, 2, 3$ 等等，但是这不够用，于是人们赋予自然数一种超越性，即能通过再生，源源不断地为我们提供数体。而我们的思维觉得需要将之集积起来成为一体（成为一种完整不变的总体），即需要完整性而不希望我们处理的数在这个时候是 $1, 2, 3, \dots, 100$ 而另一个时候是 $1, 2, 3, \dots, 1000$ ，这便是总体的概念。另一方面是来自外部的需要，在分析中，如序列的研究、实数的认识等，都是需要有自然数整体的概念为基础的。所以，对自然数的完整认识是必然需要包含这两个层次的认识的，只有通过这么两个层次的共同认识才能勾画出一个完整的自然数的概念。

通过前面的分析，看到以前人们在对自然数的认识过程中未能做到这一点，对总体认识上明显地存在方法上的问题。从本质上说，以前根本就没有捕捉到过正确反映整体性的图像，它所得到的如冠之以“所有自然数”这一名词的概念实际上只是一种虚无的没有明确内容的东西，是一种渺茫的不易为我们的思维所把握的东西！如 Peano 定义中的第五条公理及“ $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ”模型中的“ $\dots$ ”都是旨在勾画出自然数的总体图像的方法，但如前所述两者都出现了困惑，或者是要在势均力敌的争执双方中作出判定，或者是在从有限走到无限的过程中我们的思维总是有一个空隙需要填补。以前，只是凭借对抽象性及模糊性的某种神秘的迷信力，勉强地承受下来。其实这些困惑并不是固有的，而是由对自然数认识方法上的问题而引起的。是因为以前的认识方法都是局限于个体层次上的，只是对个体进行了考察。如在 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 的模型中，它所做的只不过是力争将个体数全部集结起来组成一体的努力而已！又如 Peano 的归纳方法也不过是想用某种“永动机”的力量遍历一次个体数全体而已。

思维之所以受个体层次所局限，走不出个体的层次，达不到总体的层次是一直来为“个体可以组成总体”的观念所束缚、所框框，认为只要对个体做足够多的工作如集结、延伸（都是无限止的）便可达到完整一体。这种观念来自有限的情形。在对自然数总体的认识过程中为这种观念所束缚的最关键性的一条是没有处理好后继性这样的内容，或者说是没有正确看待后继性在自然数中的地位。那么，“后继性”与个体数的关系及与自然数总体的关系究竟如何？

或者更明确地提出：“后继性”只是个体数的一种附属品而已吗？

以前人们对后继性的认识是模糊的，一直只是将后继性作为自然数数体的一种附属品看待的。因为集结、延伸过程中，处理的、立足的、着眼的都是个体数。虽然在思维的内部深处似乎还存有某种显示着活力的后继性，却一直未曾正视过它，一直来只把它当做一种本质上说是外在的内容而未把它提出来放到应有的位置上去。后继性只出现在人们构造数体时的延伸过程中的一瞬间。后继性虽有其名而无显然的地位。人们可以用它创造出新数，但它本身什么也不是。正是由于看不到后继性独立于个体的存在性，从而产生了仅由个体就可以组成全体的观念。

其实，后继性是人们在构造自然数这个概念体时，发现了个体数不完备时赋予自然数的一种超越性，一种用它超越个体局限（有穷局限）的特性（就是加上它使之完备）。让它能产生取之不尽用之不竭的个体数而满足要求。它正是通过个体的再生、延伸得以实现的，对个体来说确实只不过是一种外在的属性而已，但是对自然数整个概念来说，却不再只是一种外部的存在，而是一种内部的有机成分，正是用它来克服个体数本身的不足。所以说：

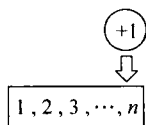
后继性是自然数的特性而不是个体数的特性。

后继性从属于自然数而独立于个体数。

后继性与个体数紧密相联却又独立于个体数，两者是并列的。

但在构造态之后的逻辑思维过程中，我们思维处理的多是个体实在，开始时（数学分析之前）用的只是个体实在，而且只有实在的有限的个体似乎才是让人安心的，所以一直陷于个体层次上。在这种层次上，看到的只是个体，后继性被自然地退化成属性一样的附属品隐于其后。但这只是处理数体的学问中（如数论）可以采用的一种暂时性的行得通的方法，可以说是我们现在习惯了的思维方法的一种局限性，也是现存观念中的一种缺陷。当我们的研究范围扩充时，隐含的局限性便就不同程度地显现出来使我们无法逃避。如到分析、集合论时便再也躲避不了悖论等不安的阴影。只有在明确了后继性是个体数并列的独立存在体、是自然数的一个有机组成部分这一点之后，才能很好地理解自然数总体在个体上的不完备（整）性从而把自然数总体与自然数个体的概念清楚地区分开来，而这种区分又正是走出迷途引向正确认识的前提。在自然数研究中，应该对后继性的存在重视起来了，已经到了正视它并正确对待它的时候了。

有了上面的认识之后,在对自然数这个概念的完整体进行认识时,就再也不必回到从前那种仅由那些个体数就能组成总体的观念的局限而陷入无尽头的怪异之圈。当我们的视野集中于那单独的个体层次考察时,看到的是一个个简单的、丰富的个体数,如 $1, 2, 3, n$ 。而当我们视野转向总体层次考察时,为了避免在后面出现一条长长的、甩不掉的模糊尾巴,不是让那思维随延伸性狂奔起来去追逐无限远处的阴影般的终点,不再将注意力只集中于个体数,不再将看到的延伸性转化为个体数继续往后扫描,而是一改过去的单纯个体层次的考察方法,真正从中解脱出来,采用全新的对总体层次的考察方法,即调整角度将注意力也集中于那种后继性本身,并将它作为一个有机的重要的组成部分使之进入画面。从而得到由这两个有机部分组成的总体像。不妨直观地如此描述:



概括地说是不再用思维不断地将后继性转化成个体数形成不断涌现的无尽头的过程,而是让它存在于那儿而我们正视它,即看到它的存在而不是陷到转化过程等里面去。我们是要去用它而不是去排挤掉它。值得指出的是在本文中几次提及自然数在个体层次上的不完整性,这种不完整性也正是与哥得尔发现的算术系统的不完备性深深地关联着的。那是从外部的一种考察而有的发现,这里我们是从概念体本身即从内部进行了分析和探讨。

将上述思路加以总结,便是:以前在对自然数的认识过程中是受“由个体组成全体”的观念的束缚、为个体层次所局限。在试图完整地认识自然数时没有能够很好地明白所做的努力大多只是立足于和局限于个体层次上的忽略了本该重视的非个体层次的内容的片面认识。而对自然数的一个完整认识,其实并不能够想只由个体的信息来取代一切,自然数作为一个整体,不是个体的单纯集积体,单纯的个体集积是形成不了一个完整体的。自然数,它包含着作为实体的个体数和超越个体局限的后继性,是一个复杂体而不是一个简单体。要对它有全面的认识得需要有对应的多层次的认知方法,而不要产生偏颇,特别是在获取总体像时应能善于直视捕捉不是显现的后继性那样的内容,这需要人们的思维具有灵活性而不再仅仅是局限在逻辑思维的禁锢中。

早期的几篇论文之二——“自然数中的基本矛盾”

包含在自然数观念中最根本的矛盾是下述两个命题似乎同时成立的现象：

命题 1：自然数是数不完的。

命题 2：每个自然数是可数到的。

每个命题分开看都显得十分有理，而两者的对立也是显然的。也正是由此触发了潜无穷、实无穷等观念的冲突。但人们没能解释它没有理解冲突的原因，从而也无法超越它，无法得到一个完整一致、和谐的自然数模型。其实两者并不同时成立，更确切些说是并不同时在同一意义下成立。这是从两种不同的角度得到的都是真实的命题。简单地说，命题 1 是自然数的总体特性的描述，命题 2 是对自然数个体性质的揭示（而且它是蕴涵某种假设条件的先验设定型命题）。

每个自然数都是生成确定了的，如果还没有生成完毕，又怎能称之为“个”，把它当做一个自然数这样的存在体？所以命题 2 是成立的；而如果没有那种还没生成、有待生成或可以生成的数的烘（衬）托，又怎能有充足完备的自然数？命题 1 是更根本的，命题 2 虽然成立，却并非是完全的，并没有揭示自然数的完整信息。每个自然数是可数到的，但并非只有可数到的就是自然数。

下列两组命题的比较决非仅仅是文字游戏：

（I 组） 命题：自然数是可数到的。

逆否：不可数到的不是自然数。

（II 组） 命题：每个自然数都是可数到的。

逆否：不可数到的不是任一个自然数。

I 组命题并不成立，II 组命题却是成立的。

两者的细微区别是不能忽略的。

II 组命题之所以成立，它是在揭示自然数个体，而在逆否命题中否定的是“不是个体”，却并没否定可能是并非个体的“可能性”之类。自然数存在有不可数到的内容，这正是 I 组命题不成立的缘由，它讨论的是自然数总体的概念。

所以，关于“自然数”存在个体和总体两种不同意义的解释。

另一个值得讨论的命题：