

《高中基础知识与能力同步训练》丛书

高二数学

杨玉蓉 主编

科学技术文献出版社

《高中基础知识与能力同步训练》丛书

高二数学

北京市第八中学 杨玉蓉 主编

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书在“源于课本，高于课本”的原则下，以巩固基础知识，提高能力为目的，按高二数学教材的顺序，把课本内容分成32个独立题目，对每一题目所涉及的概念、方法进行了剖析；对重要公式、定理的特点、使用条件、使用方法进行了分析；对易错、易混的问题进行了针对性的解释；对知识的内在联系进行了归纳和总结。

本书在每一题目的后面配有一定量的练习题。练习题注重基础知识的巩固，注重基本方法的应用，并有一定的灵活性和综合性。在答案与提示中，对解题的思路和方法进行了小结。

本书难易程度恰当，是高二年级学生巩固基础知识，课堂同步学习的好帮手。

图书在版编目(CIP)数据

高二数学/杨玉蓉主编. — 北京:科学技术文献出版社, 1996.8

(《高中基础知识与能力同步训练》丛书)

ISBN 7-5023-2689-8

I. 高… II. 杨… III. 数学课—高中—习题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 04782 号

科学技术文献出版社出版

(北京复兴路 15 号 邮政编码 100038)

北京百善印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

1996 年 8 月第 1 版 1996 年 8 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 32 开本 10.375 印张 224 千字

社科新书目: 432-323 印数: 1—10000 册

定价: 10.00 元

编者的话

《高中基础知识与能力同步训练》丛书是以国家教委颁布的各学科教学大纲为依据,以人民教育出版社出版的高中课本为基础,结合高考大纲而编写的。本套丛书分为高一、高二年级的语文、数学、英语、物理、化学、历史共十二个分册。

本套丛书特点:

1. 与课堂教学同步,源于课本,高于课本。
2. 练习题紧扣双基,注重知识的灵活运用及能力培养。
3. 每个练习分为以下三个部分:

(1) 知识要点

对本节练习所涉及的知识点给予梳理和精辟的分析。

(2) 测试训练

配备了既能巩固基础知识,又能起到开阔思路、提高能力的灵活多样的练习题。

(3) 答案与提示

对于每道题不仅给出答案,还给出了解题思路和方法,同时注重解题技能、技巧的训练,这一点也是本套丛书的主要特色。

本套丛书是由北京八中、清华附中、北京三十五中、北京十二中、北京十五中、北京东直门中学、北京七中、北京鲁迅中学、北京市教学教研部等学校和单位多年在高中任教或从事教研工作的特级、高级教师编写的,他们有 30 多年的教学经验、对知识

的重点, 难点, 高考中的要求及学生的接受能力都掌握的恰如其分, 能从学生的实际出发, 针对性较强, 因此本套丛书对学生的同步学习指导效果会更佳, 它将起到一个理想的家庭教师的辅导作用, 一定会得到广大同学的青睐。

参加高二数学编、校人员还有: 陈召林、张天国、李桂英、陈兆申、李惠芬、程宇、陆楠。

编者 1996.2

目 录

练习一	反三角函数	(1)
练习二	三角方程	(11)
练习三	不等式的性质	(19)
练习四	一次、二次不等式	(28)
练习五	高次、分式不等式	(37)
练习六	无理不等式	(44)
练习七	指数、对数不等式	(50)
练习八	绝对值不等式	(59)
练习九	不等式的证明	(67)
练习十	不等式的应用	(79)
练习十一	不等式综合练习	(89)
练习十二	数列的概念	(99)
练习十三	等差数列	(105)
练习十四	等比数列	(115)
练习十五	数列求和	(123)
练习十六	数列极限	(131)
练习十七	数学归纳法	(141)
练习十八	数列综合练习	(149)
练习十九	复数的概念	(159)
练习二十	复数的运算	(166)
练习二十一	复数的三角式	(174)

练习二十二	复数与方程	(186)
练习二十三	复数与几何	(195)
练习二十四	复数综合练习	(204)
练习二十五	有向线段、定比分点	(212)
练习二十六	直线方程(一)	(220)
练习二十七	直线方程(二)	(229)
练习二十八	两条直线的位置关系	(240)
练习二十九	曲线与方程	(248)
练习三十	圆	(253)
练习三十一	椭圆	(261)
练习三十二	双曲线	(272)
练习三十三	抛物线	(283)
练习三十四	坐标轴的平移	(291)
练习三十五	极坐标	(296)
练习三十六	参数方程	(302)
练习三十七	第一学期期末综合练习	(308)
练习三十八	第二学期期末综合练习	(316)

练习一 反三角函数

一、知识要点

1. 掌握好反正弦、反余弦、反正切、反余切函数的定义及主要性质、图象。图象见课本。

函数	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \arctg x$	$y = \operatorname{arctg} x$
定义域	$x \in [-1, 1]$	$x \in [-1, 1]$	$x \in R$	$x \in R$
值域	$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$y \in [0, \pi]$	$y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$y \in (0, \pi)$
单调性	增函数	减函数	增函数	减函数
奇偶性	奇函数 $\arcsin(-x) = -\arcsin x$	非奇非偶函数 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$	奇函数 $\arctg(-x) = -\arctg x$	非奇非偶函数 $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$

2. 两组等式

$$(1) \sin(\arcsin x) = x, |x| \leq 1 \quad \cos(\arccos x) = x, |x| \leq 1$$

$$\operatorname{tg}(\arctg x) = x, x \in R \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in R$$

$$(2) \arcsin(\sin x) = x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos(\cos x) = x, x \in [0, \pi]$$

$$\arctg(\operatorname{tg} x) = x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0, \pi)$$

第二组公式特别要注意 x 取值范围，一般地， $\arcsin(\sin x)$

$=x'$, 而 $x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 且 $\sin x' = \sin x$ (其它三个函数同理)。

$$(3) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1].$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$$

二、测试训练

(一) 选择题 (每小题只有一个答案正确)

1. 下列函数中, 存在反函数的是 ()

(A) $y = \sin x, x \in [-\pi, 0]$

(B) $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\pi]$

(C) $y = \sin x, x \in [\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi]$

(D) $y = \sin x, x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$

2. 函数 $y = \sin x, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ 的反函数为 ()

(A) $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$

(B) $y = -\arcsin x, x \in [-1, 1]$

(C) $y = \pi + \arcsin x, x \in [-1, 1]$

(D) $y = \pi - \arcsin x, x \in [-1, 1]$

3. 若 $\cos x = -\frac{3}{4}$, 且 $x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$, 则 x 可表示成 ()

(A) $\pi + \arccos(-\frac{3}{4})$ (B) $\pi + \arccos \frac{3}{4}$

$$(C) -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \quad (D) \frac{3}{2}\pi - \arccos\frac{3}{4}$$

4. $\sin\theta = -\frac{1}{3}$, $\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, 则 θ 值为 ()

$$(A) \pi + \arcsin\frac{1}{3} \quad (B) \pi - \arcsin\frac{1}{3}$$

$$(C) -\pi + \arcsin\frac{1}{3} \quad (D) -\pi - \arcsin\frac{1}{3}$$

5. 若 $\operatorname{tg}\alpha = k$, 且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 则 α 等于 ()

$$(A) \pi + \arctan k \quad (B) \pi - \arctan k$$

$$(C) \arctan k \quad (D) 2\pi - \arctan k$$

6. 满足 $\arccos(1-x) < \arccos x$ 的 x 取值范围是 ()

$$(A) 0 < x < 1 \quad (B) 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$(C) \frac{1}{2} < x \leq 1 \quad (D) 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

7. 在 $x \in [-1, 0]$ 时, 下列各式中正确的是 ()

$$(A) \pi - \arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$$

$$(B) \pi - \arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$$

$$(C) \pi - \arcsin(-x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$$

$$(D) \pi - \arccos(-x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$$

8. $\arcsin(\sin 4)$ 值为 ()

$$(A) 4 - \pi \quad (B) \pi - 4$$

$$(C) 4 \quad (D) -4$$

9. 若 $\arctan x > \frac{\pi}{4}$ 且 $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{3}$, 则 x 取值范围 ()

- (A) $x > 1$ (B) $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
(C) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$

10. 设函数 $y = \arctan x$ 的图象沿 x 轴负方向平移 3 个单位的图象为 C , 又图象 C_1 与 C 关于原点对称, 则 C_1 所对应的函数为 ()

- (A) $y = -\arctan(x+3)$ (B) $y = \arctan(x-3)$
(C) $y = -\arctan(x-3)$ (D) $y = \arctan(x-3)$
(二) 填空题

11. 函数 $y = \frac{\pi}{3} - \arctan \sqrt{x-2}$ 的定义域 _____, 值域为 _____.

12. 函数 $y = \arcsin(x^2 - x)$ 的定义域 _____, 值域为 _____.

13. 函数 $y = \pi - \arctan \frac{x-1}{3-x}$ 值域 _____.

14. 若 $m+n+mn=1$, 则 $\arctan m + \arctan n =$ _____.

15. $\arcsin(\sin \frac{20\pi}{7}) =$ _____.

16. $\cos [\arcsin(-\frac{4}{5}) - \arccos(-\frac{3}{5})] =$ _____.

17. 下列各式的大小关系是:

$$(1) \arcsin(-\frac{2}{5}) \text{ ______ } \arcsin(-\frac{4}{5})$$

$$(2) \arccos \frac{1}{10} \text{ ______ } \arccos(-\frac{1}{3})$$

$$(3) \operatorname{arctg} \pi \text{ ______ } \operatorname{arctg} 3.14$$

$$(4) \operatorname{arctg} 3 \text{ ______ } \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2})$$

$$(5) \arcsin(-\frac{2}{3}) \text{ ______ } \operatorname{arctg}(\sqrt{2}) \text{ ______ } \arccos(-\frac{1}{3})$$

18. 若 $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x)$ 成立, 则 x 的取值范围是

19. $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{2}$ 的值是 ______.

20. $\arccos [\sin(-\frac{4}{3}\pi)] + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) =$ ______.

(三) 解答题

21. 求函数 $y = \arccos(x^2 - x)$ 的单调递增区间.

22. 若 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两个实根为 x_1 和 x_2 , 设 $\alpha = \operatorname{arctg} x_1$, $\beta = \operatorname{arctg} x_2$, 求 $\alpha + \beta$ 值.

三、答案与提示

(一) 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	B	C	A	D	B	B	A	D

1. 函数在指定区间内是单调的, 则在指定区间内存在反函数, 否 (A) (B) (D), $\therefore$ 选 (C).

2. 从两方面考虑, (1) 反函数所表示的角应在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$,

$\therefore$ 否 (A) (B), (2) 由 $\sin y = x$, 否 (C), $\therefore$ 选 (D).

3. $\because \arccos(-\frac{3}{4})$ 表示 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 之间角, (A) (D)、显然不

对, 而 (C) 表示 $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ 角, $\therefore$ 选 (B).

4. θ 角终边在第三象限, 且 θ 为负角, $\therefore$ 选 (C).

5. $\because \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\therefore \operatorname{tg} \alpha$ 为负值即 $k < 0$,

$\therefore \arctan k \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 则 $\pi + \arctan k \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,

$\therefore$ 选 (A).

6. 由 $\begin{cases} 1-x > x \\ -1 \leq 1-x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \therefore 0 \leq x < \frac{1}{2}, \therefore$ 选 (D).

7. 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\arcsin(-x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$\therefore \pi - \arcsin x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\pi - \arcsin(-x) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 而

$\arccos \sqrt{1-x^2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore$ 否 (A) (C); 当 $x \in [-1, 0]$,

$\arccos x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\arccos(-x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \pi - \arccos x$

$\in [0, \frac{\pi}{2}]$, 而 $\pi - \arccos(-x) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 又 $\arcsin \sqrt{1-x^2}$

$\in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore$ 否 (D) 选 (B).

8. $\because \pi - 4 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 且 $\sin(\pi - 4) = \sin 4$, $\therefore$ 选 (B); 对于 (A), 虽然 $4 - \pi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 但 $\sin(4 - \pi) \neq \sin 4$, 故 (A) 不正确; $4 \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $-4 \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore$ (C), (D) 显然不正确.

9. 由 $\arctan x > \frac{\pi}{4}$ 得 $x > 1$,
由 $\operatorname{arccot} x < \frac{\pi}{3}$ 得 $x > \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ } $\therefore x > 1, \therefore$ 选 (A).

10. 图象 C 为 $y = \arctan(x+3)$, $\because C_1$ 与 C 关于坐标原点对称, $\therefore$ 以 $-x$ 代 x 函数值为相反值, 有 $y = -\arctan(-x+3) = \arctan(x-3)$, $\therefore$ 选 (D).

(二) 填空题

11. 由 $x-2 \geq 0$, $\therefore x \geq 2$, $\therefore$ 定义域为 $x \in [2, +\infty)$

由 $\arctan \sqrt{x-2} \in [0, \frac{\pi}{2})$ 得 $-\arctan \sqrt{x-2} \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$,

则 $\frac{\pi}{3} - \arctan \sqrt{x-2} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

12. 由 $x^2 - x \in [-1, 1]$, $\therefore x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ 为定义域,

又 $\because x^2 - x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ $\therefore x^2 - x \in [-\frac{1}{4}, 1]$

$\therefore \arcsin(x^2 - x) \in [\arcsin(-\frac{1}{4}), \frac{\pi}{2}]$ 为值域.

$$13. \text{ 令 } \alpha = \frac{x-1}{3-x} = \frac{-(3-x)+2}{3-x} = -1 + \frac{2}{3-x}, \therefore \alpha \neq -1,$$

$$\text{则 } \arcsin \alpha \neq \frac{3}{4}\pi, \therefore \pi - \arcsin \alpha \neq \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots ①$$

$$\text{又 } \arcsin \alpha \in (0, \pi), \therefore \pi - \arcsin \alpha \in (0, \pi) \dots\dots\dots ②$$

$$\text{由 } ① \text{ } ② \text{ } y \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \pi).$$

$$14. \text{ 设 } \alpha = \arcsin m, \therefore \sin \alpha = m, \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{设 } \beta = \arcsin n, \therefore \sin \beta = n, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{又 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{1 - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{m + n}{1 - mn} \dots\dots\dots$$

$$\text{由 } m + n + mn = 1 \text{ 得 } m + n = 1 - mn$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \frac{1 - mn}{1 - mn} = 1,$$

又 $\alpha + \beta \in (-\pi, \pi)$, 在此区间内使 $\sin(\alpha + \beta) = 1$ 的角有两个
为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $-\frac{3}{4}\pi$.

$$\begin{aligned} 15. \text{ 原式} &= \arcsin[\sin(2\pi + \frac{6}{7}\pi)] = \arcsin[\sin(\pi - \frac{1}{7}\pi)] \\ &= \arcsin(\sin \frac{\pi}{7}) = \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \text{ 令 } \alpha &= \arcsin(-\frac{4}{5}), \text{ 则 } \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ 且 } \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \text{ 有} \\ \cos \alpha &= \frac{3}{5}, \text{ 令 } \beta = \arcsin(-\frac{3}{5}), \text{ 则 } \sin \beta = -\frac{3}{5} \text{ 且 } \beta \end{aligned}$$

$$\in [\frac{\pi}{2}, \pi], \text{ 有 } \sin\beta = \frac{4}{5}, \text{ 又 } \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{3}{5}(-\frac{3}{5}) + (-\frac{4}{5})(\frac{4}{5}) = -1.$$

$$7. (1) > \quad (2) < \quad (3) < \quad (4) < \quad (5) \because \arcsin(-\frac{2}{3})$$

$$\in [-\frac{\pi}{2}, 0], \arctan\sqrt{2} \in (0, \frac{\pi}{2}), \arccos(-\frac{1}{3}) \in$$

$$[\frac{\pi}{2}, \pi], \therefore \arcsin(-\frac{2}{3}) < \arctan\sqrt{2} < \arccos(-\frac{1}{3}).$$

$$18. \text{ 令 } \alpha = \arccos x, \text{ 则 } \cos\alpha = x \text{ 且 } \alpha \in [0, \pi], x \in [-1, 1].$$

$$\therefore \sin\alpha = \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{令 } \beta = \arcsin x, \text{ 则 } \sin\beta = x \text{ 且 } \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \in [-1, 1].$$

$$\therefore \cos\beta = \sqrt{1-x^2},$$

$$\text{若使 } \sin\alpha = \cos\beta \text{ 成立, 则 } x \in [-1, 1].$$

$$19. \text{ 令 } \alpha = \arctan \frac{1}{3}, \beta = \arctan \frac{1}{2}, \text{ 则 } \tan\alpha = \frac{1}{3}, \tan\beta = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{又 } \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \beta \in (0, \frac{\pi}{2}) \therefore \alpha + \beta \in (0, \pi).$$

$$\text{在 } (0, \pi) \text{ 区间内使 } \tan(\alpha + \beta) = 1 \text{ 的角只有 } \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} 20. \text{原式} &= \arccos[-\sin(\pi + \frac{\pi}{3})] + \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} \\ &= \arccos(\sin \frac{\pi}{3}) + \pi - \frac{\pi}{6} \\ &= \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{5}{6} \pi \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6} \pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(三) 解答题

$$21. \text{由 } -1 \leq x^2 - x \leq 1 \text{ 得 } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots ①$$

$\because y = \arccos u$ 为减函数, 只须求 $u = x^2 - x$ 的单调减区间, 即得 $y = \arccos(x^2 - x)$ 的递增区间,

$$\because x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}, \therefore \text{减区间为 } x \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots ②$$

$$\text{由 } ① \text{ } ② \text{ 得 } x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}].$$

$$22. \text{由已知得 } x_1 = \operatorname{tg} \alpha, x_2 = \operatorname{tg} \beta,$$

$$\because x_1 + x_2 = -3\sqrt{3}, x_1 \cdot x_2 = 4, \therefore x_1 < 0, x_2 < 0,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = \sqrt{3}$$

$$\text{由 } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \alpha + \beta \in (-\pi, 0),$$