全国高校素质教育教材研究编审委员会审定

WEIJIFENXUEZHONGZHIDINGLIYANJIU

微积分学中值定理研究

马保国◇著

中国教育文化出版社

微积分学中值定理研究

马保国　著

图书在版编目（CIP）数据

微积分学中值定理研究/马保国 著，—中国：中国教育文化出版社，2006年6月

ISBN 988-98846-2-3

Ⅰ.微…　Ⅱ.马…　Ⅲ. 微积分学—高等学校—教学研究

Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）

微积分学中值定理研究

马保国 著

特约编辑：柯红路
责任编辑：聂　凯
封面设计：张骐年
出版发行：中国教育文化出版社
排　　版：科士洁文印中心
印　　刷：新颖印务有限公司
开　　本：880mm×1230mm　1/32
印　　张：10.125
字　　数：263千字
版　　次：2006年6月第1版
印　　次：2006年6月第1次印刷
书　　号：ISBN 988-98846-2-3/G・378
定　　价：20.20元

地址：北京市海淀区交大东路62号307室　100044

内 容 提 要

全书共六章。第一章微分学中值定理与第二章积分学中值定理，分别给出了各种不同形式的微分中值定理和积分中值定理及基本定理的多种证明方法；第三章中值定理的逆定理，主要讨论了微积分学中值定理的逆问题；第四章微分学中值定理“中值点”ξ的渐近性，第五章积分学中值定理“中值点”ξ的渐近性，第六章中值定理的分析性质，主要讨论了微积分学中一些重要的中值定理的中值点ξ的单调性、连续性、可导性。

本书可以作为高等院校《高等数学》、《数学分析》课的教学参考书，也可以作为进一步研究微积分学中值定理的参考资料。

前 言

微积分学（高等数学）是理工科高等院校专业学生的一门重要基础课，它是许多理工科专业课的重要数学工具，因而受到广大师生的高度重视。

在微积分学（高等数学）中，有一套重要而优美的中值定理，就是微分学中值定理和积分学中值定理。每位学过微积分学的人恐怕都没有不知道微分学中值定理和积分学中值定理的。无论是微分学中值定理，还是积分学中值定理，实际上都是适合特定等式的某个区间内的“中值点”的存在性定理。它们在微积分学（高等数学）中，不仅具有重要的理论意义，更重要的是它们有十分广泛的应用。微分学中值定理是联系函数与导数的桥梁，是应用导数（微分）讨论函数性质的重要工具；积分学中值定理是联系函数与积分的桥梁，是应用积分讨论函数性质的重要工具。

中值定理虽然只能肯定“中值点”的存在性，不能给出确定“中值点”的位置的方法，但丝毫没有影响它们的应用。在任何一本微积分（高等数学）教科书中，都要介绍和讨论微积分学中值定理和它们的应用问题，而且主要是几个典型的、应用最广泛的定理。

近年来，国内外专家学者对微积分学中值定理的研究兴趣与日俱增，他们多方位、多角度、多途径地对微积分学中值定理的条件、结论进行了广泛的拓展，取得了一系列研究成果。这些研究，既丰富了微积分学中值定理的内容，又完善了微积分学中值定理的研究体系，同时也给出了一些新的研究方法，促进了微积分学教学研究工作的开展，推动了课程教学改革的深入进行。

本书从近年来国内外大量的微积分学中值定理研究成果中，

选取了一部分进行了系统的整理，归类，形成了本书的基本内容。全书共六章。第一章微分学中值定理，第二章积分学中值定理，第三章中值定理的逆定理，第四章微分学中值定理“中值点”ξ的渐近性，第五章积分学中值定理“中值点”ξ的渐近性，第六章中值定理的分析性质。

由于收集资料所限，可能使有些重要研究成果未能收入，加之本人的研究还不是很多、水平有限，书中错误在所难免，恳请读者批评指正。

本书可以作为高等院校《高等数学》、《数学分析》课的教学参考书，也可以作为进一步研究微积分学中值定理的参考资料。

目　录

第一章　微分学中值定理

微分学中值定理是微分学的核心定理，在大学数学分析课或高等数学课程中占有十分重要的地位．所谓中值定理，是函数在某研究范围内（如区间、点的邻域），关于该函数某种类型的等式成立的“中值点”(区间或点的邻域中间的一点)的存在性定理．微分学中值定理，是一组反映函数与其导数之间相等关系的中值点的存在定理．通常在数学分析或高等数学的教科书中，介绍的微分学中值定理有四个：罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒中值定理．这些定理都是研究函数的重要工具，因为它们是沟通函数及其导数的桥梁．不但在理论上微分学中值定理处于很重要的地位，而且有十分广泛的应用．

人们对微分学中值定理的研究，从微积分建立之时就开始了，长期以来，对微分学中值定理的研究从未间断过，这些研究既丰富了微积分学的内容，又完善了微积分的理论体系，拓广了应用的领域．

§1　基本定理

1.1　一元函数的微分中值定理

定理 1.1　罗尔（Rolle）中值定理

设函数 f 满足下列条件：

(i) f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(ii) f 在开区间 (a,b) 内可导；

（iii） $f(a)=f(b)$，
则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$f'(\xi)=0. \tag{1}$$

证 因为f在闭区间$[a,b]$上连续，所以有最大值与最小值，分别用M与m来表示．现在分两种情况来讨论：

（1）若$M=m$，则f在区间$[a,b]$上是常数，从而，结论显然成立．

（2）若$m<M$，则因$f(a)=f(b)$使得，最大值M与最小值m至少有一个在(a,b)内某点ξ处取得，从而ξ是f的极值点．由条件（ii），f在点ξ可导，故由费马定理知

$$f'(\xi)=0,$$

定理得证．

罗尔中值定理的几何意义是：在每一点都有切线的一段连续曲线上，如果曲线的两个端点的高度相同，则曲线至少存在一条水平切线（图1—1）．

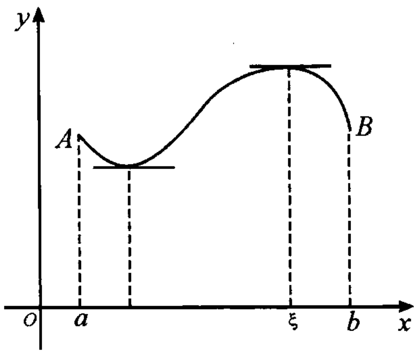

图1－1

定理 1.2 拉格朗日（Lagrange）中值定理

设函数f满足下列条件：

（i） f在闭区间$[a,b]$上连续；

（ii） f在开区间(a,b)内可导；

则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

证 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

显然，$F(a)=F(b)=0$，且F在闭区间$[a,b]$上，满足罗尔中值定理1.1的另外两个条件，故存在$\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=f(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

移项后，即得所要证明的（2）式，从而定理得证.

特别，当$f(a)=f(b)$时，本定理的结论（2）即为罗尔中值定理1.1的结论（1）. 这表明罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的一个特殊形式.

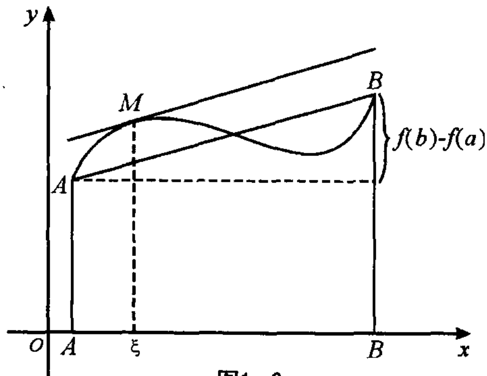

图1-2

拉格朗日中值定理的几何意义是：在满足定理条件的曲线$y=f(x)$上至少存在一点$M(\xi, f(\xi))$，使得曲线$y=f(x)$在该点处的切线平行与曲线两端点的连线AB（图1—2）.

定理1.2的结论（公式（2））称为拉格朗日公式.

拉格朗日公式有下列几种常用的等价形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b, \tag{3}$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\ 0<\theta<1, \tag{4}$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\ 0<\theta<1, \tag{5}$$

另外，拉格朗日公式不论是$a<b$，还是$a>b$都成立，而ξ是介于a与b之间的某一个定数.

定理1.3　柯西（Cauchy）中值定理

设函数f和g满足下列条件：

（i）f和g在闭区间$[a,b]$上都连续；

（ii）f和g在开区间(a,b)内都可导；

（iii）f'和g'不同时为零；

（iv） $g(a) \neq g(b)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{6}$$

证 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

易知，F 在闭区间 $[a,b]$ 上，满足罗尔中值定理 1.1 的条件，故存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0,$$

因为 $g'(\xi) \neq 0$（否则，由上式 $f'(\xi)=0$），所以，可将上式改写为（6）式，定理得证.

柯西中值定理有着与前述两个中值定理相类似的几何意义. 只是现在要把 f 和 g 这两个函数写作以 x 为参变量的参数方程： $u = g(x)$， $v = f(x)$，在 uov 平面上表示一段曲线（图 1—3）. 由于（6）式右边的

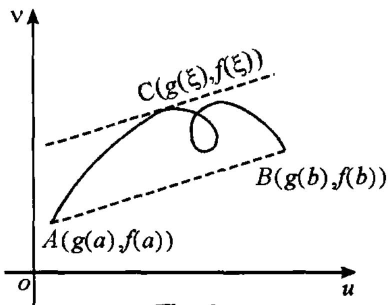

图1-3

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

表示连接曲线两端的弦 AB 的斜率，而（6）式的左边

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left.\frac{dv}{du}\right|_{x=\xi},$$

则表示该曲线上与 $x=\xi$ 相对应的一点 $C(g(\xi), f(\xi))$ 处切线的斜率. 因此（6）式即表示上述切线与弦 AB 相互平行.

显然，当 $g(x)=x$ 时，本定理的结论（6）即为拉格朗日中

值定理的结论（2）. 这表明拉格朗日中值定理是柯西中值定理的一个特殊形式.

定理 1.4 泰勒（Taylor）中值定理

设函数 f 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶连续导函数，在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导函数，则对任意给定的 x，$x_0\in[a,b]$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{7}$$

证 作辅助函数

$$F(t)=f(x)-\left[f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right],$$

$$G(t)=(x-t)^{(n+1)}.$$

则所要证明的（7）式，即为

$$F(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}G(x_0),$$

或

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

不妨设 $x>x_0$，则 $F(t)$ 与 $G(t)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续，在 (x_0, x) 内可导，且

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-t)^n,\quad G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq 0.$$

又因 $F(x)=G(x)=0$，所以，由柯西中值定理得

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中$\xi \in (x_0, x) \subset (a,b)$.

通常称（7）式为泰勒公式，其中

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}，\ \xi=x_0+\theta(x-x_0)，(0<\theta<1)，$$

称为拉格朗日余项．所以，（7）式称为带有拉格朗日余项的泰勒公式．

由于当$n=0$时，（7）式即为拉格朗日中值公式

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0).$$

所以，泰勒公式可以看作拉格朗日中值定理的推广．又因为在泰勒中值定理中，出现了函数f的高阶导数，所以俗称为高阶导数的中值定理．

常用的泰勒中值定理，还有带有佩亚诺余项的形式[1]，带有积分型余项的形式[1]等多种类型，且当余项的形式不同时，相应的泰勒中值定理的条件也就有所不同，请读者在学习时注意．

1.2 多元函数的微分中值定理

对于多元函数的微分学中值定理，在大多数的数学分析或高等数学教科书中，一般都介绍的比较少，且从二元函数到n元（$n \geq 3$）函数的推广完全是形式化的，因此本段重点介绍二元函数的微分中值定理．

首先介绍一下平面凸区域的概念，对于高维（$n \geq 3$）的情形类似．

若平面区域D上任意两点的连线都含在D内，则说D为凸区域．这就是说，若D为凸区域，则对D内任意两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$和一切λ（$0 \leq \lambda \leq 1$），恒有

$$P(x_1+\lambda(x_2-x_1),\ y_1+\lambda(y_2-y_1)) \in D.$$

定理 1.5 二元函数的罗尔（Rolle）中值定理

设二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 连续，在 D^0 的每一点存在偏导数，且当 $(x, y)\in \partial D$ 时，$f(x, y)\equiv C$，则至少存在一点 $(\xi, \eta)\in D^0$，使

$$f_x'(\xi, \eta)=0, \quad f_y'(\xi, \eta)=0,$$

其中 D^0，∂D 分别表示 D 的内部和边界，C 为常数.

证　根据有界闭区域上连续函数的性质知，$f(x, y)$ 在区域 D 上必有最大值 M 和最小值 m.

（1）若 $M=m$，则当 $(x, y)\in D$ 时，

$$f(x, y)\equiv M=m=C,$$

于是，对 D^0 内的任意一点 (ξ, η)，都有

$$f_x'(\xi, \eta)=0, \quad f_y'(\xi, \eta)=0,$$

即结论成立.

（2）若 $m<M$，则最大值 M 与最小值 m 至少有一个不在 ∂D 上取到，即 M 与 m 中至少有一个与 C 不相等. 不妨设 $M\neq C$，则 D^0 内必有一点 (ξ, η)，使 $f(\xi, \eta)=M$. 下证，在该点处，函数 $f(x, y)$ 的两个偏导数的值为零.

因 $(\xi, \eta)\in D^0$，故一元函数 $f(x, \eta)$ 在内点 $x=\xi$ 取得最大值，据费马定理知

$$f_x'(\xi, \eta)=0,$$

同理可证，$f_y'(\xi, \eta)=0$. 于是，定理得证.

定理 1.5 的几何意义是:如果曲线

$$\{(x, y, z):(x, y)\in \partial D,\ z=f(x, y)\},$$

在平面 $z=C$ 上, 则在曲面

$$\{(x, y, z):(x, y)\in D,\ z=f(x, y)\},$$

上必有一点 $(\xi, \eta, f(\xi,\eta))$，使在该点的切平面平行于平面 $z=C$，其中 $(\xi, \eta)\in D^0$.

定理 1.6 二元函数的拉格朗日（Lagrange）中值定理

设二元函数 $f(x, y)$ 在平面凸开区域 D 上连续，在 D^0 内可微，则对 D 内的任意两点 $P(a, b)$，$Q(a+h, b+k)\in D^0$，存在 θ（$0<\theta<1$），使得

$$f(a+h, b+h)-f(a, b)$$
$$=f_x(a+\theta h, b+\theta k)h+f_y(a+\theta h, b+\theta k)k\ . \quad (8)$$

证 令

$$\Phi(t)=f(a+th, b+tk)\,, \quad (9)$$

则 $\Phi(t)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的一元函数，由定理中的条件知，$\Phi(t)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可微，于是，根据一元函数的拉格朗日中值定理，存在 θ（$0<\theta<1$），使得

$$\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta) \quad (10)$$

由复合函数的求导法则

$$\Phi'(\theta)=f_x(a+\theta h,\ b+\theta k)h$$
$$+f_y(a+\theta h,\ b+\theta k)k\ . \quad (11)$$

由于 D 为凸区域，所以 $(a+\theta h, b+\theta k)\in D$，故由（10）、（11）即得所要证明的（8）式，定理得证.

注 若 D 是闭凸区域，且对 D 上任意两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 及任意的 λ（$0<\lambda<1$），都有

$$P(x_1+\lambda(x_2-x_1),\ y_1+\lambda(y_1-y_2))\in D^0\,,$$

则对 D 上连续，在 D^0 内可微的函数 $f(x, y)$，只要点 P, $Q\in D$，也存在 θ（$0<\theta<1$），使得（8）式成立.

公式（8）也称为二元函数（在凸区域上）的中值公式.

对于二元函数，通常在讨论其可微的条件时，给出如下的中值公式.

定理 1.6′ 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内存在偏导数，若 (x, y) 属于该邻域，则存在