21世纪高等学校规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（下册）

全贤唐 主编

张峰荣 范东梅 李明芳 副主编

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（下册）

主　编　全贤唐
副主编　张峰荣　范东梅　李明芳
编　写　良　燕　全长河
主　审　刘　红

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

全书分上、下两册。本书为下册，共分5章，主要内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程等。此外，每节配有适量习题，有利于巩固所学知识；每章的自测题及书末的试题，可供学生自己检查学习效果；书末附习题参考答案，以供参考。本书在内容安排上循序渐进、由浅入深、通俗易懂。

本书可作为普通高等院校高等数学课程教材，也可作为远程、函授等成人教育或高职高专用书，还可作为自学考试的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/全贤唐主编．—北京：中国电力出版社，2010．2

（21世纪高等学校规划教材）

ISBN 978-7-5083-9996-6

Ⅰ．①高… Ⅱ．①全… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第006111号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2010年3月第一版 2010年3月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 8.75印张 205千字

定价16.00元

第七章　空间解析几何与向量代数

向量是解决很多数学、物理、力学和工程技术问题的有用工具. 本章先介绍如何在空间直角坐标系中建立向量的坐标表示式，用代数方法讨论向量的运算，然后介绍空间解析几何的基本知识，再以向量为工具讨论平面与直线，以及介绍常见的曲面与曲线.

第一节　空间直角坐标系

(1) 将数轴（一维）、平面直角坐标系（二维）进一步推广，建立空间直角坐标系（三维），见图 7-1，其符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.

(2) 空间直角坐标系共有八个卦限，各轴名称分别为 x 轴、y 轴、z 轴，坐标面分别为 xOy 面、yOz 面、zOx 面. 坐标面以及卦限的划分如图 7-2 所示.

(3) 空间点 $M(x,y,z)$ 的坐标表示方法. 通过坐标把空间的点与一个有序数组一一对应起来.

注意如下特殊点的表示：

1) 在原点、坐标轴、坐标面上的点；

2) 关于坐标轴、坐标面、原点对称点的表示法.

(4) 空间两点间的距离. 若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，则 M_1M_2 的距离（见图 7-3）利用直角三角形勾股定理计算如下：

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1p|^2+|pN|^2+|NM_2|^2$$

而

$$|M_1P|=|x_2-x_1|$$
$$|PN|=|y_2-y_1|$$
$$|NM_2|=|z_2-z_1|$$

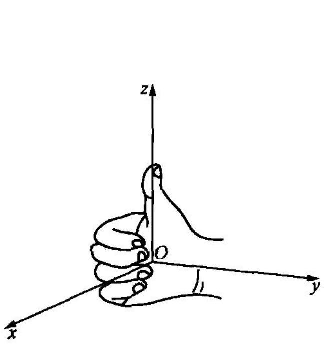

图 7-1

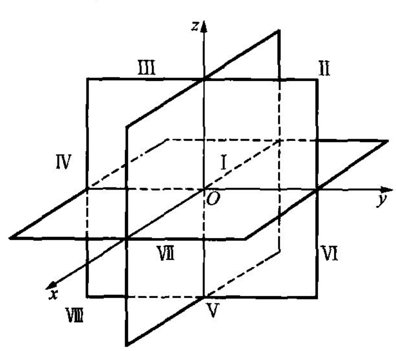

图 7-2

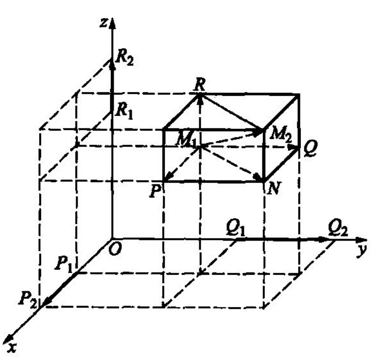

图 7-3

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特殊情况：若两点分别为 $M(x,y,z)$，$O(0,0,0)$，则

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

【例 7-1】 求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

证 $|M_1M_2|^2=(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2=14$

$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6$

$|M_3M_1|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6$

由于 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，原结论成立。

【例 7-2】 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 距离的两倍，求点 P 的坐标。

解 因为 P 在 x 轴上，设 P 点坐标为 $(x,0,0)$，则

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11}\quad|PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}$$

$\because |PP_1|=2|PP_2|$

$\therefore \sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$

$x=\pm 1$

所求点为 $(1,0,0)$，$(-1,0,0)$。

习题 7-1

1. 是非题（判断下列结论的正误，正确的在括号里面画√，错误的画×）。

(1) 点 A（-4，3，5）在 xOy 平面上的投影点是（-4，3，-5）。（ ）

(2) 在 yOz 平面上的投影点是（4，3，5），在 zOx 面上的投影点是（-4，-3，5）。（ ）

(3) 在 x 轴上的投影点是（-4，0，0）。（ ）

(4) 在 y 轴上的投影点是（0，3，0）。（ ）

(5) 在 z 轴上的投影点是（0，0，5）。（ ）

2. 填空题（将正确的答案填在横线上）。

(1) 下列各点所在卦限分别是：

1)（1，-2，3）在______；

2)（2，3，-4）在______；

3)（2，-3，-4）在______；

4)（-2，-3，1）在______。

(2) 点 P（-3，2，-1）关于平面 xOy 的对称点是______，关于平面 yOz 的对称点是______，关于平面 zOx 的对称点是______，关于 x 轴的对称点是______，关于 y 轴的对称点是______，关于 z 轴的对称点是______。

(3) 已知空间直角坐标系下，立方体的 4 个顶点为 A（$-a,-a,-a$），B（$a,-a,-a$），C（$-a,a,-a$）和 D（a,a,a），则其余顶点分别为______，______，______，______。

目　录

前　言

21 世纪的远程教育与函授教育得到迅速的发展，数学作为工程类、经济类重要的基础理论课，受到人们的广泛关注。而教材，在教学实践中，直接关系到教学质量，在引导教学教法、理论联系实际、指导实践等方面具有重要作用。为了培养出具有一定科学素质和职业技能的优秀人才，需要提供适合其发展的教材。但是现阶段适合远程教育与函授教育的教材微乎其微。本教材紧密衔接初等数学，从特殊到一般，从具体到抽象，注重基本概念、基本定理的讲述，并从实际例子出发，内容深入浅出。本教材具有以下特点：

（1）由于远程教育与函授教育的学生基础相差比较大，以及高等教学的核心概念与方法在上册教材中已经有了较系统、全面的介绍，而不同层次学生的高等数学的学习内容主要体现在下册内容的选择上，根据教学大纲的要求，下册教材的内容比较简约一些。

（2）由于远程教育与函授教育的学生多数在工作岗位，教材的内容要体现工作实践的应用性，所以教材中选择了较多的应用问题；有关理论验证性的推导内容，在不影响后继课程学习和实际需要的情况下，适量进行了缩减。

（3）为了学生自查的学习效果，书后配有本科及专科各 3 套模拟试题与答案。

本教材由北京科技大学全贤唐担任主编，张峰荣、范东梅、李明芳担任副主编。北京科技大学远程与成人教育学院良燕，中国人寿保险公司北京分公司的全长河参加了本书的编写工作。全书由首都医学院刘红担任主审。

由于编者水平有限，书中难免有不妥和疏漏之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2010 年 1 月

3. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两个顶点 $A(2, -3, -5)$，$B(-1, 3, 2)$ 及它的对角线交点 $E(4, -1, 7)$，求顶点 C，D 的坐标。

4. 已知某直线线段 AB 被点 $C(2, 0, 2)$ 及点 $D(5, -2, 0)$ 内分为 3 等份，求端点 A，B 的坐标。

5. 求点 $M(-4, 3, -5)$ 到各坐标轴的距离。

6. 在 yOz 面上，求与三个已知点 $A(3, 1, 2)$，$B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点。

第二节　向量及其运算

一、向量的概念

(1) **向量**：是指既有大小，又有方向的量。在数学上用有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，方向表示向量的方向。在数学上只研究与起点无关的自由向量（以后简称向量）。

(2) **向量的表示方法有**：$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$、$\overrightarrow{OM}$ 等。

(3) **向量相等 ($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$)**：如果两个向量大小相等，方向相同，则称两个向量相等（即经过平移后能完全重合的向量）。

(4) **向量的模**：是指向量的大小或长度，记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{OM}|$。

模为 1 的向量称为单位向量，模为零的向量称为零向量。零向量的方向是任意的。

(5) **向量平行 ($\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$)**：两个非零向量，如果它们的方向相同或相反，则称两个向量平行。零向量与任何向量都平行。

(6) **负向量**：是指大小相等，但方向相反的向量，$\boldsymbol{a}$ 的负向量记为 $-\boldsymbol{a}$。

二、向量的运算

(1) **加减法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$**。加法运算规律为平行四边形法则（有时也称三角形法则），其满足的运算规律有交换率和结合率，见图 7-4。

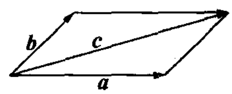

图 7-4

(2) **减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}$**。

(3) **向量与数的乘法 $\lambda\boldsymbol{a}$**。设 λ 是一个常数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定为：

1) $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$；

2) $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

3) $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。

其满足的运算规律有结合率、分配率。设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

定理 7.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

【例 7-3】　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（见图 7-5）。

解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

由于 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，于是 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

又由于 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，于是 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$；

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，于是 $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$。

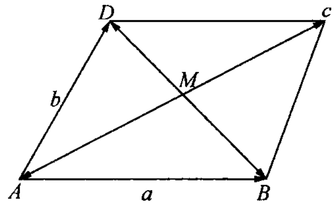

图 7-5

三、向量的坐标表示

（一）向量在轴上的投影

1. 概念

(1) 轴上有向线段的值：设有一轴 $\boldsymbol{u}$，$\overrightarrow{AB}$ 是轴 $\boldsymbol{u}$ 上的有向线段，如果数 λ 满足 $|\lambda|=|\overrightarrow{AB}|$，且当 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 同向时 λ 是正的，当 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 反向时 λ 是负的，则数 λ 称为轴 $\boldsymbol{u}$ 上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值，记作 AB，即 $\lambda=AB$。设 $\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{u}$ 轴同方向的单位向量，则 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}$。

(2) 设 A，B，C 是 $\boldsymbol{u}$ 轴上任意三点，不论三点的相互位置如何，总有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$。

(3) 两向量夹角的概念：设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$。

(4) 空间一点 A 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影：通过点 A 作轴 $\boldsymbol{u}$ 的垂直平面，该平面与轴 $\boldsymbol{u}$ 的交点 A' 称为点 A 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影。

(5) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影：设已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影分别为点 A' 和 B'，那么轴 $\boldsymbol{u}$ 上有向线段的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$。

2. 投影定理

性质 1 向量在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影等于向量的模乘以轴与向量夹角 φ 的余弦，即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$。

性质 2 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和，即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_2$

性质 3 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积，即

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}$$

（二）向量在坐标系上的分向量与向量的坐标表示式

1. 向量在坐标系上的分向量与向量的坐标（见图 7-6）

通过坐标法，使平面上或空间的点与有序数组之间建立了一一对应关系，同样地，为了沟通数与向量的研究，需要建立向量与有序数之间的对应关系。

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 轴正向的单位向量，并称它们为这一坐标系的基本单位向量，由图 7-6，并应用向量的加法规则可得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

或
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

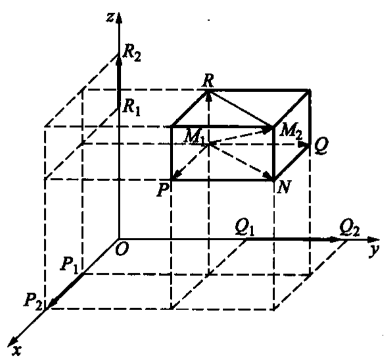

图 7-6

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式。

有序数组 a_x、a_y、a_z与向量$\boldsymbol{a}$ 一一对应，向量 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影 a_x、a_y、a_z就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并记为

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式。

于是，起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量可以表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

特别情况，点 $M(x,y,z)$ 对于原点 O 的向径为

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$$

注意：向量在坐标轴上的分向量与向量在坐标轴上的投影有本质区别。向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影是 a_x、a_y、a_z三个数，向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的分向量是 $a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 三个向量。

2. 向量运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则向量运算的坐标表示如下：

加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$

减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$

乘数：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$

或

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

平行：若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$$

也相当于向量的对应坐标成比例，即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

（三）向量的模与方向余弦的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，可以用它与三个坐标轴的夹角 α、β、γ（均不小于 0，不大于 π）来表示其方向，称 α、β、γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，见图 7-7，其余弦表示形式 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为方向余弦。

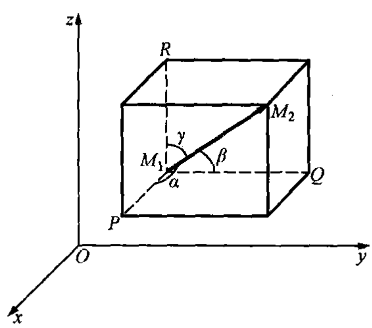

图 7-7

模表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

方向余弦

由性质 1 知 $\begin{cases}a_x=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha\\ a_y=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta\\ a_z=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\end{cases}$，当 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \end{cases}$$

任意向量的方向余弦有性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

与非零向量 a 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x, a_y, a_z\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

【例 7-4】 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$，$M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角以及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量。

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2}\} = \{-1,1,-\sqrt{2}\}$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{2},\ \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3},\ \beta = \frac{\pi}{3},\ \gamma = \frac{3\pi}{4}$$

设 $\boldsymbol{a}^0$ 为与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量，由于 $\boldsymbol{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，则

$$\boldsymbol{a}^0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

习题 7-2

1. 是非题（判断下列结论的正误，正确的在括号里面画√，错误的画×）。

(1) 设向量 $\vec{b}=(1,\ k,\ 2)$ 与 $\vec{a}=(2,\ -1,\ 4)$ 平行，则 $k=0.5$。 (　　)

(2) 点 (2，−1，1) 与 z 轴的距离是 1。 (　　)

2. 填空题（将正确的答案填在横线上）

(1) 已知某向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行，方向相反，且 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，则 $\vec{b}$ 由 $\vec{a}$ 表示为______。

(2) 已知梯形 $OABC$，$\overrightarrow{CB} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overrightarrow{OA}$ 且 $|\overrightarrow{CB}|=1/2|\overrightarrow{OA}|$，若 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=$ ______。

(3) 一向量的终点为点 B (2，1，−7)，它在 x、y、z 轴上的投影依次为 4，−4 和 7，则这向量的起点 A 的坐标为______。

(4) 设向量的模是 4，它与某数轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，则它在该数轴上的投影为______。

(5) 已知 A (4，0，5)，B (7，1，3)，则 $\overrightarrow{AB}^0=$ ______。

3. 一向量的起点为 A (1，4，−2)，终点为 B (−1，5，0)，求在 x、y、z 上的投影，并求 $|\overrightarrow{AB}|$。

4. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$,$M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

5. 已知 $\vec{a}=(3,5,4)$,$\vec{b}=(-6,1,2)$,$\vec{c}=(0,-3,-4)$，求 $2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$ 及其单位向量。

6. 一向量与 x、y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是前者的两倍，求该向量的方向角。

7. 已知向量 $\vec{a}$ 与三坐标轴成相等的锐角，求它的方向余弦，若 $|\vec{a}|=2$，求向量的坐标

8. 设 $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$,$\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$,$\vec{c}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量 $\vec{l}=4\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量。

9. 已知两向量 $\vec{a}=(\lambda,5,-1)$,$\vec{b}=(3,1,\mu)$ 互相平行，求 λ、μ 的值。

第三节　数量积、向量积

一、数量积

定义 7.1　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

物理意义：物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线位移 $\boldsymbol{s}$，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角。

性质 1　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$。

性质 2　两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直（即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$）的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

性质 3　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。

性质 4　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$。

性质 5　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$（$\lambda$ 为数）

等价公式如下：

(1) 坐标表示式：设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

(2) 投影表示式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$$

(3) 两向量夹角可以由 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 式求解。

【例 7-5】　已知三点 M (1，1，1)，A (2，2，1) 和 B (2，1，2)，求 $\angle AMB$。

提示：先求出向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$，应用求夹角的公式。

解　$\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|AM||MB|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\angle AMB=135^\circ$$

二、向量积

概念　设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定义：

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的平面，指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$。

注意：数量积得到的是一个数值，而向量积得到的是向量。

公式为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

性质 1 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$

性质 2 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行（$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$）的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\vec{0}$。

性质 3 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。

性质 4 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$。

性质 5 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$（$\lambda$ 为数）。

等价公式如下：

(1) 坐标表示式：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

(2) 行列式表示式为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

【例 7-6】 已知三角形 ABC 的顶点分别为 A（1，2，3），B（3，4，5）和 C（2，4，7），求三角形 ABC 的面积。

解 根据向量积的定义，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle C=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ 2,\ 4)$

因此 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

于是 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$

习题 7-3

1. 填空题（将正确的答案填在横线上）。

(1) 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为单位向量，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ ______。

(2) 若向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(2,-1,2)$ 共线，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-18$，则 $\vec{b}=$ ______。

(3) 已知 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=5$，当 $\lambda=$ ______时，$\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 互相垂直。

(4) 已知 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3,|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$，则 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ ______。

(5) 已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，且 $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=12$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$ ______，$|\vec{a}-\vec{b}|=$ ______。

(6) 向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直，且 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3$，则 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度为______。

2. 是非题（判断下列结论的正误，正确的在括号里面画√，错误的画×）。

已知 $\vec{a}=(2,-1,2)$，$\vec{b}=(1,4,1)$，则：

(1) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 90°。 (　　)

(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 0。 (　　)

3. 已知 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=36$，$|\vec{a}\times\vec{b}|=72$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$。

4. 已知 A (1，−1，2)，B (5，−6，2)，C (1，3，−1)，求：

(1) 同时与 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量；

(2) $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 从顶点 A 到边 BC 的高的长度。

第四节　曲面及其方程

曲面在空间解析几何中被看成是动点的几何轨迹。动点的轨迹也能够用方程或方程组来表示，从而得到曲面方程的概念。

定义 7.2　如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{7-1}$$

有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足式（7-1）；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足式（7-1）。

则式（7-1）就称为曲面 S 的方程，而曲面 S 就称为式（7-1）的图形。

常见曲面如下。

1. 球面

【例 7-7】　建立球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程。

解　设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是球面上的任一点，则

$$|M_0M|=R$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

特别情况：如果球心在原点，则球面方程为（讨论旋转曲面）$x^2+y^2+z^2=R^2$

2. 线段的垂直平分面（平面方程）

【例 7-8】　设有点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程。

解　由题意知道，所求平面为与 A 和 B 等距离的点的轨迹，设 $M(x,y,z)$ 是所求平面上的任一点，由于 $|MA|=|MB|$，则

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得所求方程为

$$2x-6y+2z-7=0$$

研究空间曲面有以下两个基本问题：

(1) 已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程。

(2) 已知坐标间的关系式，研究曲面形状。

3. 旋转曲面

定义 7.3　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面，旋转曲线和定直线依次称为旋转曲面的母线和轴。

旋转曲面的方程如下：

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，其方程为

$$f(y,z)=0$$

使该曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 C 上的任一点，则有

$$f(y_1,z_1)=0 \tag{7-2}$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 也绕 z 轴旋转到另一点 $M(x,y,z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且点 M 到 z 轴的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

将 $z_1=z$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入式（7-2），就有螺旋曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

无论旋转曲面图绕哪个轴旋转，该变量都不变，另外的变量将缺的变量补上，改成正负二者的完全平方根形式。

常用旋转曲面为锥面［直线绕直线旋转，两直线的夹角为 α（$0°<\alpha<90°$）］，其方程为

$$z^2=a^2(x^2+y^2)$$

$$a=\cot\alpha$$

4. 柱面

定义 7.4 平行于定直线，并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹称为柱面。

定曲线 C：准线　　　　动直线 L：母线

(1) 特征：x、y、z 三个变量中若缺一个（例如 y），则表示母线平行于 y 轴的柱面。

(2) 常用的柱面：

1) 圆柱面：$x^2+y^2=R^2$（母线平行于 z 轴）。

2) 抛物柱面：$y^2=2x$（母线平行于 z 轴）。

习题 7-4

1. 是非题（判断下列结论的正误，正确的在括号里面画√，错误的画×）。

(1) 任意一个二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形都是一个空间上的曲面。　　(　　)

(2) 平面上的任意一个二次曲线方程在空间上都是一个柱面。　　(　　)

2. 填空题（将正确的答案填在横线上）。

(1) 以点（1，2，3）为球心，且过点（0，0，1）的球面方程是______。

(2) 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 Ox 轴旋转而成的曲面方程是______。

(3) 将 xOy 坐标面上的圆 $x^2+(y-1)^2=2$ 绕 Oy 轴旋转一周所生成的球面方程是______，且球心坐标是______，半径为______。

(4) 方程 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=0$ 表示旋转曲面，其旋转轴是______。

(5) 方程 $y^2=z$ 在平面解析几何中表示______，在空间解析几何中表示______。

3. 画出下列各图：

(1) yOz 坐标面上 $z^2=y$ 绕 Oy 轴旋转而成的曲面。

(2) 由 $x+z=1$，$x^2+y^2=1$ 和 $z=0$ 所围成的立体表面。