弹性力学

TANXINGLIXUE XUEXIZHIDAO YU JIETIZHINAN

学习指导与解题指南

孔德森 门燕青 编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

弹性力学学习指导
与解题指南

孔德森　门燕青　编

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是与徐芝纶教授编写的《弹性力学简明教程》(第 3 版)相配套的学习辅导书。本书旨在帮助读者更深入地理解弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法，进而掌握弹性力学的解题思路。全书共分 8 章，即绪论、平面问题的基本理论、平面问题的直角坐标解答、平面问题的极坐标解答、用差分法和变分法解平面问题、用有限单元法解平面问题、空间问题的基本理论、空间问题的解答。本书每章均由四部分组成，即学习要求、重点知识归纳、典型例题分析和课后习题全解。

本书可供高校工科类本科生和研究生学习弹性力学课程参考，也可作为高校教师、科研人员和现场技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学学习指导与解题指南/孔德森，门燕青编. -- 上海：同济大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-5608-4323-0

Ⅰ.①弹… Ⅱ.①孔… ②门… Ⅲ.①弹性力学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 076881 号

弹性力学学习指导与解题指南

孔德森 门燕青 编

责任编辑 解明芳 责任校对

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 14.5

印 数 1—3 100

字 数 290 000

版 次 2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4323-0

定 价 25.00 元

前　言

本书是与徐芝纶教授编写的《弹性力学简明教程》(第3版)相配套的教学辅导书。编写本书的目的是：帮助读者更好地理解与使用这本教材，从而更深入地理解弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法，进而掌握弹性力学的解题思路，同时，希望有助于引导读者在所学基础理论的基础上扩展知识面，并激发读者自主学习的积极性，从而培养读者的分析、综合和创新能力。

本书编写顺序与徐芝纶教授编写的《弹性力学简明教程》(第3版)基本一致，分为：绪论、平面问题的基本理论、平面问题的直角坐标解答、平面问题的极坐标解答、用差分法和变分法解平面问题、用有限单元法解平面问题、空间问题的基本理论、空间问题的解答，共8章内容。本书的每一章均包括学习要求、重点知识归纳、典型例题分析和课后习题全解四部分。

"学习要求"明确了每章的学习任务和学习目标，使学习过程有的放矢；"重点知识归纳"通过表格、图形和流程图等形式对重点知识进行总结和分析，重点突出；"典型例题分析"对具有代表性的常见题型进行解题过程分析，对解题技巧进行归纳；"课后习题全解"对这本教材中的所有习题给出详细解答，明确解题思路。

本书的特点主要体现在以下四个方面，即：

1. 紧扣课堂教学

将重点知识归纳具体到每一章节，有效地与主教材对应，与课堂同步。

2. 简明扼要

充分运用表格、图形和流程图等形式归纳知识点，并注重相似知识点的对比，简明扼要地介绍基本概念、理论公式及解题过程，避免了繁琐的数学推导及描述，达到了巩固所学知识的目的。

3. 重点突出

归纳总结了每章节的学习难点和学习重点，帮助读者更好地掌握及运用所学知识，并对易混淆的概念进行解释，进一步巩固和加深所学知识。

4. 难度适中

典型例题代表性强，立足于本科生和研究生的基本学习要求，又兼顾了部分读

者需要进一步提高的愿望。

由于编者水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2010 年 4 月

目　　录

1 绪　　论

【学习要求】

1. 了解弹性力学的研究对象、研究内容和研究方法；了解弹性力学与材料力学以及结构力学的区别与联系。

2. 掌握弹性力学中体力、面力、内力、形变、位移等基本量的定义及表示符号、正负号规定和量纲等；理解切应力的互等性。

3. 理解并掌握弹性力学中采用的五个基本假定及其作用。

【重点知识归纳】

1.1 弹性力学的内容

1. 弹性力学的定义

弹性力学，即弹性体力学，又称弹性理论，是固体力学的一个分支。其研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

2. 弹性力学与材料力学、结构力学的比较

弹性力学与材料力学、结构力学间的区别与联系列于表 1-1。

表 1-1　弹性力学与材料力学、结构力学的比较

相同点		均分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度和刚度，并寻求或改进它们的计算方法
不同点	材料力学	研究对象为单根杆状构件，并且引用了构件的形变状态或应力分布假设，简化了数学推演，但解答是近似的
	结构力学	研究对象为多根杆件组成的杆件系统
	弹性力学	研究对象为实体结构及杆状构件，在杆状构件的研究中一般不引进假设，可得到精确的解答，从而对材料力学解答进行校核
联系		弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法，应用范围大大扩展；有限单元法用结构力学中的位移法、力法或混合法求解连续弹性体，显示了弹性力学与结构力学的综合应用；此外，对同一结构的各个构件或同一构件的不同部分用三种力学进行计算既可节省工作量又可得到满意的效果

1.2　弹性力学中的几个基本概念

1. 弹性力学中各基本量的特征

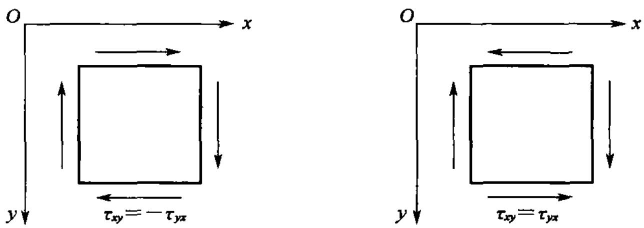
弹性力学中体力、面力、应力、形变、位移等基本量的特征列于表 1-2。

表 1-2　　　　弹性力学基本量的特征

物理量		符号	定义式	正负号规定	量纲
外力	体力	f_x，f_y，f_z	$f=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta V}$	体力及面力沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负	$L^{-2}MT^{-2}$
	面力	$\bar{f}_x$，$\bar{f}_y$，$\bar{f}_z$	$\bar{f}=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta S}$		$L^{-1}MT^{-2}$
内力（应力）	正应力	σ_x，σ_y，σ_z	$p=\lim\limits_{\Delta A\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta A}$	正面上内力沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负；负面上内力沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负	$L^{-1}MT^{-2}$
	切应力	τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}			$L^{-1}MT^{-2}$
形变（应变）	线应变	ε_x，ε_y，ε_z	$\varepsilon=\dfrac{\Delta L}{L}$	线应变伸长为正，缩短为负	1
	切应变	γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx}	各线段之间的直角的改变，用弧度表示	切应变以直角变小为正，变大为负	1
位移		u，v，w	位置的移动	沿坐标轴正方向位移为正，沿坐标轴负方向位移为负	L

注：体力、面力和应力是单位体积或单位面积上的作用力，因此，在考虑平衡条件求合力时，需乘以相应的体积或面积。

弹性力学与材料力学相比，正应力的符号规定二者相同，而切应力的符号规定不完全相同，如图 1-1 所示。材料力学中的切应力以单元或其局部产生顺时针方向的转动趋势为正，而弹性力学中的切应力则与坐标面的正负有关。



（a）材料力学的表示方法　　（b）弹性力学的表示方法

图 1-1　弹性力学与材料力学中切应力正负号的区别

2. 切应力的互等性

作用在两个相互垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号也相同），即切应力记号的两个下标字母可以对调，即 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}$。

1.3 弹性力学中的基本假定

1. 弹性力学的研究方法

弹性力学的研究方法是在弹性体区域内部考虑静力学、几何学和物理学三方面的条件，分别建立平衡微分方程、几何方程和物理方程，然后结合弹性体边界上的应力边界条件或位移边界条件求解应力分量、形变分量和位移分量。

2. 弹性力学的基本假定及其作用

弹性力学的基本假定及其作用列于表 1-3。

表 1-3　弹性力学基本假设及其作用

基本假设		作　用
材料性质假设	连续性	所有物理量如应力、应变、位移等都是连续的，可用坐标的连续函数表示它们的变化规律
	完全弹性	物体的应力与应变之间的关系是线性的，可用胡克定律来表示，其弹性常数不随应力或形变的大小而变
	均匀性	物体的弹性常数不随位置坐标而变
	各向同性	材料性质与方向无关，物体的弹性常数不随方向而变
变形状态假设	小变形假设	位移和变形是微小的，可用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸

总之，弹性力学研究的是理想弹性体的小变形问题。

【课后习题全解】

1-1　试举例说明，什么是均匀的各向异性体，什么是非均匀的各向同性体，什么是非均匀的各向异性体。

解　木材、竹材等都是均匀的各向异性体，砂石混凝土为非均匀的各向同性

体，而钢筋混凝土则为非均匀的各向异性体。

1-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

解 作为理想弹性体需满足五个基本假设，即连续性假设、均匀性假设、各向同性假设、完全弹性假设和小变形假设。

一般混凝土构件符合理想弹性体的基本假设，故可以看作理想弹性体；而钢筋混凝土构件因内置钢筋不符合各向同性等基本假设，故不可以看作理想弹性体。

一般的均匀岩质地基满足基本假设，可看作理想弹性体，而土质地基不能看作理想弹性体。

1-3 五个基本假定在建立弹性力学基本方程时有什么用途？

解 (1) 连续性假定。假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何孔隙。这样，所有物理量如应力、应变、位移等都是连续的，可用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

(2) 完全弹性假定。假定物体在任一瞬时的形变完全决定于它在这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关，这样，物体的应力与应变之间的关系是线性的，可用胡克定律来表示，其弹性常数不随应力或形变的大小而变。

(3) 均匀性假定。假定物体是由同一材料组成，这样，物体的弹性常数不随位置坐标而变。

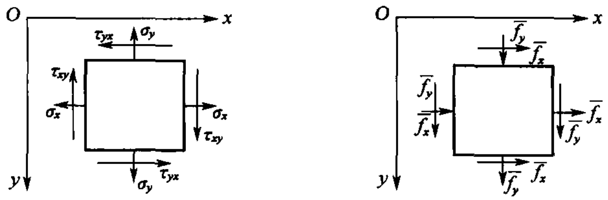
(4) 各向同性假定。假定物体的弹性常数在所有各个方向都相同，这样，物体的材料性质与方向无关，物体的弹性常数不随方向而变。

(5) 小变形假定。假定物体在受力后，所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，而且应变和转角都远小于 1，这样，可用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸而不致引起显著的误差。

1-4 应力和面力的符号规定有什么区别？试分别画出正面和负面上的正的应力和正的面力的方向。

解 应力符号规定与坐标面的正负有关，在正面上，应力以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负；在负面上，应力以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。

面力符号规定与坐标轴有关，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。应力与面力的正方向如习题 1-4 图所示。



(a) 应力正方向　　(b) 面力正方向

习题 1-4 图

1-5 试比较弹性力学和材料力学中关于切应力的符号规定。

解 在材料力学中,切应力以使微段产生顺时针转动的应力为正,反之为负。在弹性力学中切应力的正负号规定与坐标面有关,在正坐标面上,切应力以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负;在负坐标面上,切应力以沿坐标轴负方向为正,沿坐标轴正方向为负。习题 1-5 图为二维坐标系中切应力的正方向表示图。

(a) 材料力学中切应力的正方向　　(b) 弹性力学中切应力的正方向

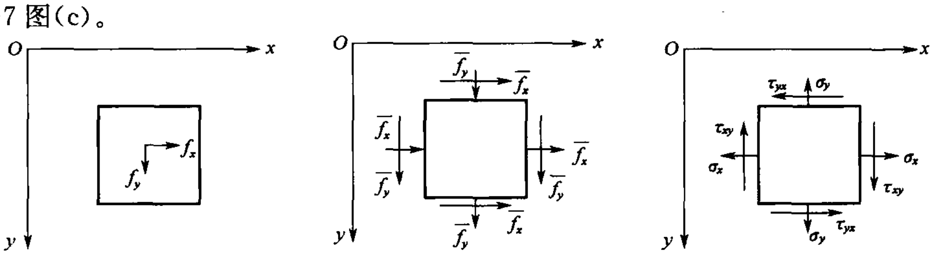
习题 1-5 图

1-6 试举例说明正的应力对应于正的形变。

解 以工字钢为例,当工字钢受拉力作用时将发生伸长变形,正的应力(拉应力)对应于正的形变。梁受拉伸作用时发生伸长变形,同样是正的应力(拉应力)对应于正的形变。

1-7 试画出图中的矩形薄板的正的体力、面力和应力的方向。

解 正的体力见习题 1-7 图(a),正的面力见习题 1-7 图(b),正的应力见习题 1-7 图(c)。

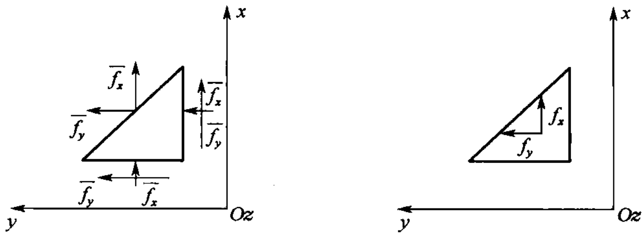


(a) 正的体力　　(b) 正的面力　　(c) 正的应力

习题 1-7 图

1-8 试画出图中的三角形薄板的正的面力和体力方向。

解 正的面力方向见习题 1-8 图(a),正的体力方向见习题 1-8 图(b)。



(a) 正的面力 (b) 正的体力

习题 1-8 图

2　平面问题的基本理论

【学习要求】

1. 理解平面应力问题和平面应变问题的主要区别并掌握两类平面问题的基本特征。

2. 理解平衡微分方程、几何方程及物理方程推导过程中采用的基本假定，并掌握这三类方程的推导过程和公式表示。

3. 理解并会计算平面问题中一点的应力状态。

4. 了解刚体位移。

5. 理解并熟练应用边界条件。

6. 理解圣维南原理的内容、作用和适用条件，并熟练应用圣维南原理。

7. 理解按位移求解平面问题和按应力求解平面问题的基本思路和方法。

8. 理解并掌握按位移求解平面应力问题的基本微分方程和边界条件。

9. 理解并掌握形变协调方程（相容方程）的作用、公式表示及其物理意义；掌握按应力求解平面问题的基本微分方程和边界条件。

10. 重点掌握常体力情况下的相容方程及用应力函数表示应力分量的方法。

【重点知识归纳】

2.1　平面应力问题与平面应变问题

弹性力学中的平面问题可归结为两大类，即平面应力问题和平面应变问题。这两类平面问题的基本特征列于表 2-1。

表 2-1　　平面应力问题与平面应变问题的基本特征

特　征	平面应力问题	平面应变问题
弹性体特征	很薄的等厚度薄板	很长的等截面长柱体
外力特征	外力平行于板面作用在板边，沿板厚方向不变，板面无面力	外力垂直作用于柱体轴线，沿长度方向不变

续　表

特　征	平面应力问题		平面应变问题	
应力特征	$\sigma_x(x,y)$，$\sigma_y(x,y)$，$\tau_{xy}(x,y)$	$\sigma_z=0$，$\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$	$\sigma_x(x,y)$，$\sigma_y(x,y)$，$\tau_{xy}(x,y)$	$\sigma_z=f(\sigma_x、\sigma_y)$，$\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$
应变特征	$\varepsilon_x(x,y)$，$\varepsilon_y(x,y)$，$\gamma_{xy}(x,y)$	$\varepsilon_z=f(\sigma_x,\sigma_y)$，$\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$	$\varepsilon_x(x,y)$，$\varepsilon_y(x,y)$，$\gamma_{xy}(x,y)$	$\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$

2.2　平衡微分方程

平衡微分方程表示的是应力分量和体力分量之间的关系，其推导思路和表达式如下：

根据理想弹性体基本假设及静力平衡条件，可得

$$\begin{cases}\sum M_C=0\\ \sum F_x=0\\ \sum F_y=0\end{cases}\qquad(2-1)$$

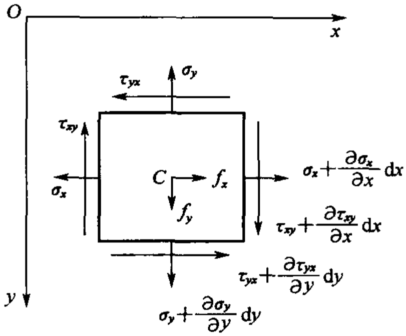


图 2-1　微小正平行六面体的应力状态

由 $\sum M_C=0$，可得

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}\qquad(2-2)$$

由 $\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，可得平面问题的平衡微分方程，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\end{cases}\qquad(2-3)$$

对于式(2-3)，需要说明的是：

(1) 方程中包含三个未知数，即 σ_x，σ_y 和 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，而仅有两个方程，是一次超静定问题，还必须考虑几何学和物理学方面的条件才能解决问题。

(2) 方程的推导过程中运用了连续性、均匀性和小变形假设。

(3) 方程对于平面应力和平面应变两类问题均适用。

2.3 平面问题中一点的应力状态

平面问题中一点的应力状态表示的是一点应力的不同表示形式，它可以表示成任一斜面上的应力分量（p_x，p_y）、斜面上的正应力和切应力（σ_n，τ_n）、主应力（σ_1，σ_2）和应力主向以及最大、最小的正应力和切应力等（图 2-2）。

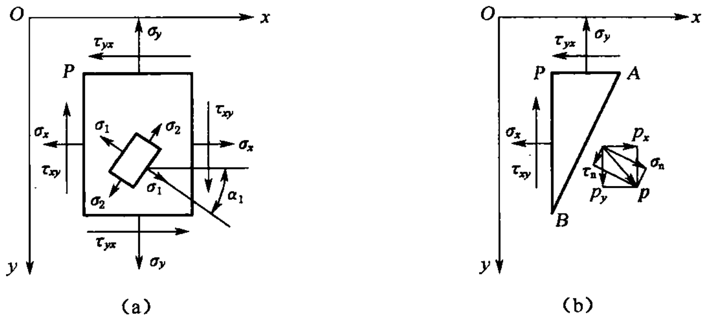


图 2-2 一点的应力分量

1. 任一斜面上的应力分量（p_x，p_y）

$$\begin{cases} p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} \\ p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{cases} \tag{2-4}$$

2. 任一斜面上的正应力和切应力（σ_n，τ_n）

$$\begin{cases} \sigma_n = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy} \\ \tau_n = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy} \end{cases} \tag{2-5}$$

3. 主应力及应力主向（σ_1，σ_2，α_1）

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tan\alpha_1 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \end{cases} \tag{2-6}$$

且 $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$。

4. 最大、最小的正应力和切应力(σ_1，σ_2，τ_n)

$$\begin{cases}\sigma_{n\max}=\sigma_1\\ \sigma_{n\min}=\sigma_2\\ \tau_{n\max}=\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-l^2\right)^2}(\sigma_2-\sigma_1)\\ \tau_{n\min}=-\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-l^2\right)^2}(\sigma_2-\sigma_1)\end{cases}\tag{2-7}$$

2.4 几何方程 刚体位移

几何方程是表示形变分量和位移分量之间关系的表达式，在推导过程中运用了连续性、均匀性和小变形假定。

几何方程为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\tag{2-8}$$

几何方程式(2-8)对于平面应力问题和平面应变问题均适用。

由几何方程可见，当物体的位移分量完全确定时，形变分量即完全确定；反之，当形变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定。

刚体位移可表示为

$$u=u_0-\omega y,\quad v=v_0+\omega x\tag{2-9}$$

式中 u_0，v_0——物体沿 x 轴及 y 轴方向的刚体平移；

ω——物体绕 z 轴的刚体转动。

2.5 物 理 方 程

物理方程是表示形变分量和应力分量之间关系的表达式，在推导过程中运用了连续性、均匀性、完全弹性、各向同性和小变形假定。

理想弹性体中，形变分量与应力分量之间的关系可用胡克定律表示为