高等学校教材

数学物理方程

朱汝金 编

数学基础课程系列
简明教材

高等教育出版社

76

高等学校教材

数学基础课程系列简明教材

数学物理方程

Shuxue Wuli Fangcheng

朱汝金　编

高等教育出版社・北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书介绍数学物理典型方程的物理背景、主要解法及有关适定性的基本结论，阐述能量积分、积分变换、最大模估计、变分法与广义解等重要概念。全书的论证严谨、计算完整，力求简明易读。读者具有数学分析、常微分方程知识就可学习本书。略去选讲的材料，57 课时可以基本讲完全书。

本书可用作高等学校数学类专业的教材，也可用作自学读本。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/朱汝金编. —北京：高等教育出版社，2010.1

ISBN 978-7-04-028323-5

Ⅰ.数… Ⅱ.朱… Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 208581 号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 胡 颖 **封面设计** 张申申
责任绘图 尹文军 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 姜国萍
责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850×1168 1/32	版 次	2010 年 1 月第 1 版
印 张	8	印 次	2010 年 1 月第 1 次印刷
字 数	200 000	定 价	12.40 元

物料号 28323-00

总　　序

2005 年,高等教育出版社为适应高校数学类专业的教学需求,经过一段时间的酝酿,决定在“十一五”期间推出一套“数学基础课程系列简明教材”。这套系列教材包含数学分析、高等代数、解析几何、复变函数、实变函数、概率统计、微分几何等。为做好此事,在高等教育出版社的主持下成立了编委会,并邀请了一批有多年教学实践经验的资深教授参加编写工作。这套系列教材中的第一批书目已经被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。经过几年的努力,这套教材开始正式与大家见面了。其中多数是新编的,也有一些是经过教学实践证明优秀的,深受读者欢迎的教材的修订版。

这套系列教材适用于我国综合性大学、理工科大学以及师范大学中的数学类专业,作为数学专业基础课的教学用书;当然,它们也可以作为理工科中非数学类专业的教学参考书。面向全国各类高校的数学系,具有较广泛的适用性,这是我们编写这套系列教材的初衷之一。

在这套系列教材中,尽管每一本教材的风格各异,但是在编写的基本理念上大家有着相当多的共识。我们希望这套教材做到以下几点:

首先,教材内容“少而精”。

众所周知,“少而精”是教学的一个基本原则。它要求在教学中要紧紧地抓住所涉及学科的基础知识与基本训练这个纲,突出重点,纲举目张。相反,内容过多、过杂、过深,势必使人不得要领,事倍功半。但是,有时人们会看不到讲得过多的害处,会在某些口

号的驱使下使事情脱离了正确的轨道,比如求多求全、追求内容的先进性或现代化等等。我们知道,基础课教材的作用在于它为读者提供后续课以及日后参加工作不可或缺的基础知识、基本方法与基本思想。所讲的内容并非越多越好,越深越好。遗憾的是,目前基础课内容有一种不断扩充的趋势。这虽然出于良好的目的,而其效果却不如愿。实际上,就以我们这些“过来人”为例,认真回想一下自己以前所学到的、真正用得得心应手的内容并不多;而且真正用得到的内容也并不很多。与其求全求多,不如精选最基本的东西,帮助读者真正掌握这些内容的实质、方法和思想。读者有了这样的基础,在他们将来遇到没有学过但确有需要的内容时,也会有能力自学。课程内容“现代化”的要求,应当是针对数学系的整个的教学体系而言的,而不是要求基础课的内容更新换代。这对数学学科而言是无需争议的事实。基础课可以在观念上、记号上为专业课的现代化做些必要的准备,但不应该是把后续课的某些基本概念提到前面来讲述。

其次,教材尽可能做到“深入浅出”。

基础课教材是初学者入门的读本,而这些初学者在此之前没有任何学习高等数学的经验。在这种情况下,就要求教材注意循序渐进、由浅入深,尽可能做到通俗易懂,最好还能做到生动有趣,引起读者的兴趣。一个好的数学基础课教材应当既逻辑严谨、体系完整,又深入浅出、平实自然。我们应当学会通过典型的实例和足够详尽的解释,来帮助初学者学会解读数学的抽象形式,透过抽象的数学叙述,正确把握和理解其内容实质。教材的真正水准应当体现在是否能把那些艰深的内容讲得让人感到自然易懂。把本来容易的东西讲得复杂难懂,那是不可取的。为此,我们要注意避免过度形式化的不良倾向。数学工作者由于长期从事数学研究与教学,已经养成了严谨的习惯,追求叙述的一般性与抽象性,但与此同时,也往往形成了某种毛病,那就是忽视描述性语言,忽视那些抽象形式背后的直观模型,甚

至抹杀直观的意义，这是很不妥当的。过度的形式化，不仅造成了初学者的困难，更重要的是歪曲了数学本质，误导了学生。在基础课教材中，为了帮助初学者理解抽象数学形式的意义，除了典型例子之外，用必要的直观描述性语言去解释它的意义，同样是十分重要、不可或缺的。

最后，教材重视基本训练，重视对学生的能力培养。

我们赞同"双基"的提法，即基础课的任务是传授基础知识和掌握基本训练。学好一门数学课程，单单知道有关数学结论是不够的，还要求读者具有一定的分析问题与解决问题的能力。这样，勤于思考，独立思考，并做好相当数量的习题，是完全必要的。这是一切在数学上学而有成的人的共同体会。通过做题可以深入、具体地理解和掌握基本概念、结论和方法；获得计算和推理的能力；理解、掌握应用基本知识和方法解决问题的途径；同时也进一步锻炼刻苦思考和探索的毅力，培养创造性的思维能力和习惯。后面一点不仅对学好数学很重要，而且对读者以后工作能力的提高和事业的成功都是很重要的。在这套教材中，我们精心选配好适合读者的各种例题与习题，它们是教材很重要的组成部分，不可忽视。习题中不仅有基本练习，而且有一些题目，需要读者经过一定的努力，花费一定的时间去探索，才能最终解决。此外，题目富有多样性、趣味性和启发性。当然，我们也不赞成出一些技巧性过强而没有训练价值的偏题与难题。

常言道："授人以鱼，不如授人以渔"。一本好的基础课教材要努力做到授人以渔，而不只是罗列知识。这就需要帮助读者理解课程内容和方法的实质，理解其中的数学思想。在教材中要尽可能地介绍清楚问题和概念的来龙去脉，包括一些典型的例子；尽可能解释清楚解决问题的思路和方法，其中包括定理证明和计算过程的思路，以提高学生的创新意识与探索精神。

以上是我们对这套教材的希望与要求，也是我们编书的理念。把它们写在这里，主要是为了自勉，并不表明这些我们已经全部做

好了、做到位了。我们希望使用这套教材的师生和其他读者多提宝贵意见,使教材得以不断完善。

"数学基础课程系列简明教材"编委会

2008年1月5日

前　言

数学物理方程指的是在物理学、力学及工程技术问题中出现的反映客观世界的物理量间相互关系的一些偏微分方程。

微积分诞生不久,人们就开始研究偏微分方程。到18世纪已相继提出著名的弦振动方程、调和方程与热传导方程。19世纪中叶,随着对具体方程的深入研究,逐渐形成偏微分方程的一般理论。进入20世纪以来,生产实践与科学实验提出大量的数学物理方程新问题,需要做深入研究;另一方面,由于数学学科的发展,新的数学理论与方法为数学物理方程研究提供新的有力工具,在理论与应用两方面都取得巨大的成效。计算机的普及与计算方法的创新,给数学物理方程的应用创造了更加有利的条件。现在,偏微分方程(数学物理方程是其重要组成部分)已成为现代数学学科十分重要的分支。其根本任务是提供偏微分方程的解法,给出解的表达式或计算方法,研究解的性质,加深对方程反映的实际现象的认识。无疑它是数学联系实际的重要桥梁。它不仅广泛使用已有的数学成果,而且不断提出数学的新问题、新思想与新概念,从一个方面促进数学学科的发展,在一定意义上成为数学发展的源泉与动力之一。

本书作为专业课教材,介绍几个典型的数学物理方程的实际背景,阐述数学物理方程最基本的理论与解法,并研究解的性质。通过本书的学习,不仅可以了解数学物理方程最基本的内容,还能看到数学分析、代数及函数论等在数学物理中的应用,从而加深对这些前置课程内容的理解。本书共分五章另加两个附录:

第一章主要介绍几个典型方程的实际背景及有关偏微分方程

的最基本的概念，给出方程的分类及化简方法。其中§1.6有关多元方程的分类与化简可以选讲。

第二章介绍波动方程的柯西问题及混合问题的解法，引入能量积分并用以证明定解问题解的唯一性与稳定性。§2.4作为选讲材料，对常用的分离变量法的理论基础作简要说明。本章举例较多，可以只讲其中一部分。

第三章讨论热传导方程。首先简要介绍傅里叶变换，然后用傅里叶变换导出热传导方程柯西问题解的泊松公式。证明热传导方程的极值原理，并用以证明定解问题解的唯一性与稳定性。

第四章从椭圆型方程的重要特性极值原理入手，建立解的最大模估计(先验估计)，进而证明定解问题解的唯一性与稳定性。利用调和方程的基本解及格林公式，引入格林函数的概念。求出调和方程在一些特殊区域上狄利克雷问题的格林函数，并得到解的泊松公式。利用上述结果证明调和函数的一系列性质。§4.4介绍牛顿位势及非齐次泊松方程的解，此节要处理带参量的广义重积分的可微性。§4.5介绍证明调和方程狄利克雷问题解存在的佩龙方法，它考虑的是一般区域，且用非构造性的方法，而不是先构造形式解再加以验证的方法证明解存在。这两节的内容有特点，但较难，可以选读选讲。

第五章利用一些几何概念引入所谓的特征方程组，然后用这个常微分方程组的解，证明一阶偏微分方程柯西问题解的存在性与唯一性。讨论的是拟线性与完全非线性方程，并从解曲面的几何性质入手找到求解方法，这些都是前面未接触过的。

此外，还有两个附录作为选学材料，以扩大视野。附录A用幂级数及强函数方法，对一般形式的偏微分方程组柯西问题，证明解析解的局部存在性，即柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理。附录B介绍变分原理及偏微分方程的广义解，对偏微分方程的现代理论作浅层次的了解。

本书力求简明易读，论证力求完整。希望用较短的篇幅尽量

全面地介绍数学物理方程的主要内容。收集了一定数量的习题，供学生练习，以提高解题能力。略去选讲的材料，57课时可以基本讲完本书。

本书在写作过程中，参考了书末参考文献所列的各本著作。这些书都是很好的教科书或科学专著，欲进一步了解数学物理方程的内容，可阅读这些书。

本书在写作过程中，得到严士健教授、李仲来教授及保继光教授的鼓励与支持，并得到高等教育出版社编辑李蕊同志的帮助。在此特表谢忱。

郑重声明

目　录

第一章　方程的导出、分类与化简

含有未知的多元函数 u 及其偏导数的关系式称为**偏微分方程**. 若方程中未知函数偏导数的最高阶数为 n,便称之为 **n 阶偏微分方程**. 如果一个偏微分方程关于未知函数及其偏导数都是线性的,则称为**线性偏微分方程**;若方程仅关于未知函数的最高阶导数是线性的,则称为**拟线性偏微分方程**. 例如方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b(x,y)u=0$$

是二阶线性偏微分方程. 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y)$$

是一阶拟线性偏微分方程. 方程中不含未知函数及它的偏导数的项称为自由项. 无自由项的方程称为**齐次方程**,否则称为**非齐次方程**. 上述第二个方程含有自由项 $f(x,y)$,因此是非齐次方程;而第一个方程是齐次方程.

一个函数 u 在某一区域上连续、具有偏微分方程中出现的各阶连续偏导数,而且代入方程后能使之成为恒等式,则称函数 u 是偏微分方程的一个**解**,或称为**古典解**. 以区别于现代偏微分方程理论中的广泛采用各种意义的**广义解**.

具有物理学、力学、化学、生物学及工程技术背景的偏微分方程统称为**数学物理方程**. 本章首先从物理学与力学的定律出发,导出波动方程、热传导方程及位势方程等典型方程与主要的定解条件,然后阐述定解问题解的适定性概念,最后介绍二阶方程的分类与化简. 我们将会看到不同类型的方程的解具有完全不同的特性,

而且解法也不相同.因此,辨别方程的类型是十分重要的.

§1.1 波动方程的导出及其定解问题

1.1.1 弦振动方程及其定解问题

设有一根均匀、柔软且有弹性的弦(一维弹性体),拉紧后作微小横振动.假如弦的静止状态占据 x 轴上$[0,l]$区间,用 $u(x,t)$ 表示 t 时刻 x 点处弦的横向位移.振动是微小的,因此弦的弯曲也极其微小,即 u_x 甚小,u_x^2 与 1 相比可以忽略不计.弦是柔软的,从而弦弯曲变形时不会产生抵抗力,因此弦振动时,互相间只有张力 $\boldsymbol{T}$ 存在,其方向为弦的切线方向.在上述限定下可以证明 $\boldsymbol{T}$ 的大小与 x,t 无关,记之为 T.最后假设弦的质量线密度为$\rho(x)$,所受垂直方向的外力(如重力)的密度为 $F(x,t)$,水平方向的外力为零.

取弦上与任意区间$[a,b]$相应的一段(见图 1.1.1),作用在两端的张力 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$ 的大小均为 T,故它们的垂直分量分别为

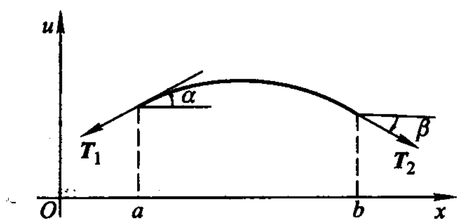

图 1.1.1

$$-T\sin\alpha=-T\frac{u_x(a,t)}{\sqrt{1+u_x^2(a,t)}}\approx-Tu_x(a,t),$$

$$T\sin\beta=T\frac{u_x(b,t)}{\sqrt{1+u_x^2(b,t)}}\approx Tu_x(b,t),$$

其中 α,β 分别是弦在 a,b 处的切线与 x 轴的夹角，因此，$\tan\alpha=u_x(a,t)$，$\tan\beta=u_x(b,t)$. 这段弦所受外力的合力为

$$\int_a^b F(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

惯性力为

$$-\int_a^b \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x.$$

根据牛顿定律，

$$T[u_x(b,t)-u_x(a,t)]+\int_a^b F(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_a^b \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\int_a^b \left[T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}x=0.$$

由区间 $[a,b]$ 的任意性，知 $u(x,t)$ 满足

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,t),\ \forall x\in(a,b),t>0, \qquad (1.1.1)$$

这就是所谓的**弦振动方程**. 如果 $\rho(x)$ 是常数，记 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$，$f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$，则方程可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad \forall x\in(a,b),t>0.$$

仅弦振动方程尚不足以完全确定弦的运动规律，还必须考虑弦的起始状况及两端受约束的状况，即必须给出**初始条件**及**边界条件**.

初始条件一般给出弦的初始位移和初始速度：

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l],\\ &u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in[0,l]. \end{aligned} \qquad (1.1.2)$$

边界条件通常有三种提法：

(1) 弦的两端固定或位移按已知规律随时间变化，即