中国科学院"十一五"规划教材

经·济·应·用·数·学·基·础·系·列

线性代数

李仁骏 主编

何江妮 李建军 杨霞 副主编

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院"十一五"规划教材·经济应用数学基础系列

线性代数

主　编　李仁骏

副主编　何江妮
　　　　李建军
　　　　杨　霞

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍了线性经济模型中有关的线性代数基本知识，其中既有行列式、矩阵、向量等用途广泛的数学工具，又有用它们研究的线性方程组、二次型等实用价值很高的数学知识，并对线性空间和线性变换做了简单介绍. 全书以矩阵贯穿始终，充分体现了线性方法.

本书可作为高等学校经济类和管理类本科学生的教学用书，对其他专业的学生及自学者也是一本易懂好学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李仁骏主编. —北京：科学出版社，2010. 8
(中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列)
ISBN 978-7-03-028469-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 148805 号

责任编辑：王春福　李鹏奇　唐保军 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷　印张：16
印数：1—11 000　字数：306 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列

丛书编委会

总　序

随着科学技术的迅猛发展和经济建设的快速腾飞，数学与各门学科的联系变得更加紧密，在人类实践活动中的应用也更加广泛和深入.不仅自然科学和工程技术离不开数学，财经科学、管理科学及其他社会科学同样离不开数学.

20 世纪 80 年代以来，我国高校按照教育部的要求，普遍为经济管理类各专业的本科学生开设了包括微积分、线性代数、概率论与数理统计等在内的经济应用数学基础课程.在多年的经济数学教学实践中，曾经涌现出一批具有时代特色的优秀教材，这些教材对培养合格的财经管理人才发挥过重要作用.近年来随着招生规模的不断扩大，我国已迅速进入高等教育的大众化时代.新的时代呼唤经济数学教材的改革和创新.如何为全日制经济类与管理类本科生编写一套既适合学生现状又兼顾考研需要、既传授数学思想又突出实际应用、既介绍经典理论又穿插现代理念、既适当研究解题技巧又学会使用数学软件的教材，是编者多年的夙愿，当然也是一件很有意义的事情.

基于上述想法，我们按照教育部"经济类与管理类本科数学基础课程教学大纲及要求"，深入研究了国内外经济数学教育教学改革动态，借鉴了许多优秀教材的内容结构和处理方法，并结合编者长期从事经济数学教学的经验体会编写了这套系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《经济与金融分析数学基础》，共四册.

本系列教材的前三册(《微积分》,《线性代数》,《概率论与数理统计》)的读者对象是经济类和管理类的一、二年级本科生.上述教材在编写思想、结构安排、内容取舍、教学方法等方面做了一些新的尝试，其共同特点如下：

(1) 努力体现分层次教学的思想.针对不同层次学生的学习要求，对教学内容和课后习题两个方面进行了处理.将内容分为必学内容和选学内容(加 * 号区分)，习题依照难易程度划分为(A)、(B)两组.教材综合考虑了财经类各专业学习该课程和后续课程的需要、报考研究生的需要以及将来从事有关实际工作的需要.文字叙述上尽量为初学者着想，对基本概念和证明思路的叙述力求准确和富有启发性.

(2) 突出数学的经济应用.教材引入了简单的经济(管理)应用模型，目的在于加强对学生数学应用能力的培养，引导学生学以致用，提高学生学习经济数学的兴趣.例如，《微积分》中介绍了常用的边际分析与弹性分析等经济学经典模型，《线性代数》中介绍了投入产出分析等线性模型，《概率论与数理统计》中介绍了彩票模型及报童问题等随机模型.

(3) 穿插数学建模的思想和方法，尝试使课程内容与数学软件使用有机结合.书中运用 Mathematica 5.0 编排了若干数学实验，由此也就适当弱化了对某些复杂计算技巧的介绍.

本系列教材的第四册(《经济与金融分析数学基础》)内容是前三册数学基础知识的自然延伸、提高和综合应用，读者对象为经济类、管理类、统计类、应用数学类高年级本科生及研究生.该书在内容取舍、体系结构安排及写作风格上都做了新的尝试，突出经济(金融)分析中实际问题的需要，重点放在如何运用数学的语言及模型反映经济(金融)分析及管理理论与实践中所面临的问题，而不刻意强调数学本身的系统性和严谨性.

本系列教材集中了众多专家学者及一线教师的智慧和力量，王春福主任，李鹏奇副编审以及科学出版社的许多朋友为本丛书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示感谢.

限于编者的知识水平，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正.

丛书编委会

2010 年 6 月

前　言

线性代数是现代数学的重要基石，是高等学校经济类和管理类各专业学生的必修课程. 为了满足时代发展的需要，遵循教育部教学大纲的要求，编写一本既适合学生现状又兼顾考研需要、既传授数学思想又突出实际应用，既介绍经典理论又穿插现代理念、既适当研究解题技巧又学会使用电脑软件的新教材，显然是一件很有意义的事情.

基于上述想法，我们研究了国内外数学教育改革动态，借鉴了许多优秀教材的内容结构和处理方法，并结合自己长期从事数学教学的经验体会编写了这本线性代数教材. 本书在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面作了一些改革性的尝试，其特点如下：

(1) 内容适当，结构合理，思路自然流畅，语言准确简洁.

(2) 注意使用问题教学法，重要概念的引入力求自然. 例如，从线性变换的讨论引入矩阵定义、矩阵乘法及逆矩阵，不仅使这些概念的引入显得必要，易于理解，而且凸显了作为线性代数最基本内容之一的线性变换的重要性.

(3) 适当减少一些烦琐的定理证明和公式推导，代之以较多的例题.

(4) 在概念引入、理论分析、例题演算、应用举例等环节上，力图体现代数、几何、微积分等课程之间的联系，使学生明白他们所学的各门数学课程并不是彼此孤立的.

(5) 以矩阵作为贯穿全书的主线，让线性方法得以充分体现的同时，注意知识的渗透、思想的延伸. 例如，书中自然顺势导出“分类”、“同构”的想法有益于启发学生思维，适时少量地介绍一些数学史也能增加学生的见识.

(6) 理论联系实际，加强具体应用，穿插数学建模的思想和方法.

(7) 加入数学实验，使学生学会用计算机解题，由此也就适当弱化了对某些复杂计算技巧的介绍.

本书适合作为本科经济类和管理类学生的教学用书，对其他专业的学生及自学者也是一本易懂好学的参考书. 书中介绍了线性经济模型中有关的线性代数基本知识，其中有些内容加了 * 号，可根据教学需要和学时安排决定取舍. 每章习题分为(A)、(B)两类，(A)类为普通题，(B)类为提高题，可供学有余力者或考研学生选择. 书后附有习题答案，以供参考.

本书第 1～2 章由何江妮编写，第 3～4 章由李建军编写，第 5～6 章及全部数学实验由李仁骏编写. 杨霞参加了第 1～4 章的编写，王学峰参加了第 5～6 章的编

写. 全书由李仁骏负责总纂.

本书在编写过程中得到了许多同行专家的支持和帮助,梁治安教授、王生喜教授、倪科社教授、周解勇博士等阅读了本书初稿,并提出了宝贵的修改意见或建议,在此表示衷心的感谢.

本书在编写时参考了大量的相关教材和文献资料,选用了其中的某些内容和习题,在此也向有关作者表示感谢.

由于编者水平有限,书中不当之处在所难免,敬请广大读者雅正.

编 者

2010 年 6 月

目　录

第1章　行　列　式

线性代数是大学数学教育中一门主要的基础课程，是中学代数的延伸. 行列式是线性代数中的一个重要概念，其理论来源于解线性方程组. 行列式作为一种数学工具，不但在本课程中，而且在其他数学学科以及许多其他学科领域中都有广泛的应用. 本章将介绍行列式的概念、基本性质、计算方法及其简单应用.

1.1　n阶行列式

一、二阶、三阶行列式

初等数学中，二阶行列式是在二元线性方程组的求解中提出来的.

例1　求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \tag{1.1}$$

解　利用消元法，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可得方程组(1.1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆方程组(1.1)的解，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.4}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为二阶行列式的元素，a_{ij} 的两个下标表示该元素在行列式中

的位置,第一个下标 i 称为行标,表示该元素所在的行,第二个下标 j 称为列标,表示该元素所在的列. 在(1.3)式中从左上角到右下角的对角线,称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的对角线,称为行列式的副对角线. 在(1.4)式中,等号右端的表示式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式的值,又称为行列式的展开式. 二阶行列式的展开式可用对角线法则得到,如图 1-1 所示.

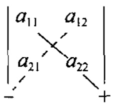

图 1-1

图 1-1 中实线上两个元素的乘积带正号,虚线上两个元素的乘积带负号.

利用二阶行列式,(1.2)式可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中分母是由方程组(1.1)中未知量的系数按原来的位置排列成的行列式,称为方程组(1.1)的系数行列式,分子则分别是将系数行列式的第 1 列和第 2 列换成方程组(1.1)右端的常数列所得的行列式. 于是,若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}. \tag{1.5}$$

例 2　设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. 问:(1) 当 λ 为何值时,$D=0$? (2) 当 λ 为何值时,$D\neq 0$?

解　因为 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda$,$\lambda^2-3\lambda=0$,则 $\lambda=0$,$\lambda=3$. 因此(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时,$D=0$;(2) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时,$D\neq 0$.

类似地,在求解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.6}$$

时,可引入三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

上式的右端称为三阶行列式的展开式，展开式也可用对角线法则得到，如图 1-2 所示.

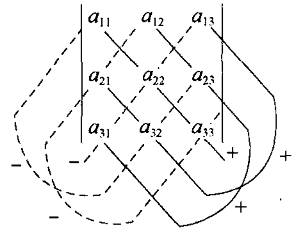

图 1-2

图 1-2 中每条实线上的三个元素的乘积带正号，每条虚线上的三个元素的乘积带负号.

可以证明，当方程组(1.6)的系数行列式不等于零时，方程组(1.6)有唯一解且可由三阶行列式用类似于(1.5)式的形式表示.

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned} D &= 2\times(-3)\times3+5\times(-5)\times1+6\times0\times2 \\ &\quad -6\times(-3)\times1-5\times0\times3-2\times(-5)\times2 \\ &= -18-25+18+20=-5. \end{aligned}$$

例 4 设 $D=\begin{vmatrix} a-1 & 4 & 2 \\ -2 & a & a \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$，则 a 取何值时，$D>0$?

解
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a-1 & 4 & 2 \\ -2 & a & a \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= a(a-1)+16a-8-8a+8-2a(a-1) \\ &= -a^2+9a=-a(a-9), \end{aligned}$$

解不等式 $-a(a-9)>0$ 得 $0<a<9$，故当 $0<a<9$ 时，所给行列式的值大于零.

二、排列与逆序数

为了揭示二阶、三阶行列式的结构规律，将行列式的概念推广到 n 阶行列式，先简单介绍有关排列的基本知识.

定义 1.1 由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n 级排列，其中 $i_j(j=1,2,\cdots,n)$ 不可重复.

例如，231 及 123 都是 3 级排列；34215 及 21354 都是 5 级排列；87546321 是 8 级排列.

排列 $12\cdots(n-1)n$ 具有自然数由小到大的顺序，称为自然排列. 容易知道 n 个

数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的全部排列总数为 $n!$.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果 $i_s>i_t$,则称这对数 i_s,i_t 构成一个逆序. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总个数,称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例 5 求下列排列的逆序数:

(1) 23514; (2) $n(n-1)\cdots 21$; (3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1) 从排列左边的第 1 个元素开始,每个元素都与它后面的元素比较,即可得到该排列的逆序数

$$\tau(23514)=1+1+2+0=4.$$

当然从排列左边的第 2 个元素开始,每个元素都与它前面的元素比较,也可得到该排列的逆序数

$$\tau(23514)=0+0+3+1=4.$$

(2) $$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(3) $$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.3 一个排列的逆序数为偶数时,则称该排列为偶排列;一个排列的逆序数为奇数时,则称该排列为奇排列.

例如,排列 23514 的逆序数 $\tau(23514)=4$,故该排列为偶排列;排列 23154 的逆序数 $\tau(23154)=3$,故该排列为奇排列;自然排列的逆序数为 0,故自然排列为偶排列.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,交换其中两个数码 i_s 与 i_t 的位置,而其余数码的位置保持不变,就得另一个 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,进行一次这样的变换,称为一次对换,记为$(i_s,i_t)$.

例如,对排列 23514 施以对换(5,1)得排列 23154,可见原来的偶排列 23514,经过一次对换(5,1)后,变成了奇排列 23154.一般地,有以下结论.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后,其奇偶性改变.

证 先讨论对换相邻数码的特殊情形.

设排列 Ai_si_tB,其中 A,B 表示除了 i_s,i_t 两个数码外的其余数码,对排列 Ai_si_tB 施以对换(i_s,i_t)得一新排列 Ai_ti_sB,比较两排列中的逆序,显然 A,B 中数码的次序没有改变,i_s,i_t 与 A,B 中数码的次序也没有改变,仅改变了 i_s 与 i_t 的次序,因此新排列只比原排列增加了一个逆序(当 $i_s<i_t$ 时)或减少了一个逆序(当 $i_s>i_t$ 时),所以对换后新排列与原排列的奇偶性相反.

再讨论一般情形.

设排列 $Ai_sk_1k_2\cdots k_ri_tB$,对该排列施以对换(i_s,i_t)得一新排列 $Ai_tk_1k_2\cdots k_ri_sB$,新排列 $Ai_tk_1k_2\cdots k_ri_sB$ 可看成是由原排列先将数码 i_s 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_r,i_t$ 作 $r+1$ 次相邻数码的对换,变为 $Ak_1k_2\cdots k_ri_ti_sB$,再将 i_t 依次与 $k_r,\cdots,k_2,k_1$ 作 r 次

相邻数码的对换而成的新排列 $Ai_tk_1k_2\cdots k_ri_sB$ 共进行了 $2r+1$ 次相邻数码的对换，每次对换相邻数码改变一次奇偶性，故共改变了 $2r+1$ 次，即奇数次奇偶性，所以它们的奇偶性相反.

定理 1.2 在全部 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中，奇排列、偶排列各占一半.

证 n 级排列的总数为 $n!$ 个，设其中奇排列 s 个，偶排列 t 个，把 s 个奇排列都施以相同的对换，如(1,2)，由定理 1.1 可知 s 个奇排列全部变为偶排列，故 $s\leqslant t$；同理把 t 个偶排列都施以相同的对换，则 t 个偶排列全部变为奇排列，故 $t\leqslant s$，因此 $s=t$，即奇、偶排列相等，各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

三、n 阶行列式的定义

有了排列的逆序数、奇偶性的概念，再观察二阶、三阶行列式的结构及其展开式的特点，可将二阶、三阶行列式的定义推广到 n 阶行列式.

	二阶行列式	三阶行列式
定义	2^2 个元素排成两行两列	3^2 个元素排成三行三列
展开式项数	2!	3!
(不计符号)每一项	取自不同行不同列的两个元素的乘积	取自不同行不同列的三个元素的乘积

每项符号：当每项的行标排列是自然排列时，对应的列标排列为奇排列，该项取负号，列标排列为偶排列，该项取正号，即可以把二阶行列式表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中 j_1j_2 是某个二级排列，$\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有二级排列求和，把三阶行列式表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是某个三级排列，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列求和，由此引伸，可推广二阶、三阶行列式的概念，定义 n 阶行列式.

定义 1.5 由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式. 它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代

数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是某个 n 级排列. 每项的符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当行标按自然排列时，对应的列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项取正号，是奇排列时，该项取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为 n 阶行列式的一般项，n 阶行列式简记为 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $|a_{ij}|$. 当 $n=1$ 时，一阶行列式只有一个元素，则认为 $|a_{11}|=a_{11}$.

注意 (1) 一阶行列式不要与数的绝对值相混淆；

(2) 二阶、三阶行列式的对角线法则对 $n\geqslant 4$ 阶行列式不适用.

例 6 利用行列式定义，计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 行列式 D 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，$D$ 中有很多元素为零，现考虑哪些项不为零. 一般项中第 1 个元素 a_{1j_1} 取自第 1 行，而第 1 行只有 a_{11} 不为零，所以 $j_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零，其他均为零；一般项中第 2 个元素 a_{2j_2} 取自第 2 行，而第 2 行中有 a_{21} 和 a_{22} 不为零，因第 1 个元素 a_{11} 已取自第 1 列，所以第 2 个元素只能取 a_{22}，即 $j_2=2$，从而 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的项可能不为零，其他均为零；这样类似推下去，可得 $j_3=3, j_4=4, \cdots, j_n=n$，因此 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零，其他项均为零，而 $\tau(12\cdots n)=0$，所以该项取正号，故

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

显然，当主对角线上有元素为零时，上面式子仍然成立，此时 $D=0$.

行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$中，当 $i<j$ 时，有 $a_{ij}=0$，即主对角线上方元素全是零，称这种行列式为下三角形行列式.

行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$中，当 $i>j$ 时，有 $a_{ij}=0$，即主对角线下方元素全是零，称这种行列式为上三角形行列式. 类似可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角形行列式与下三角形行列式统称为三角形行列式.

特殊情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种行列式称为对角行列式.

于是三角形行列式及对角行列式的值均等于主对角线上元素的乘积.

由行列式定义易得：如果行列式中有一行(列)的元素全为零，则该行列式的值为零. 以上结论在以后行列式计算中可直接应用.

下面给出 n 阶行列式定义的等价形式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (\text{其中 } j_1j_2\cdots j_n \text{ 为 } n \text{ 级排列}) \quad (1.7)$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \quad (\text{其中 } i_1i_2\cdots i_n \text{ 为 } n \text{ 级排列}) \quad (1.8)$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

(其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是某个给定的 n 级排列，$j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列). (1.9)