21世纪高等学校研究生教材

第八届全国优秀科技图书一等奖

数学学科硕士研究生系列教材 (第3版)

随机过程通论

SUIJI GUOCHENG TONGLUN

北京师范大学数学科学学院 组 编 (上卷)

王梓坤 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高等学校研究

第八届全国优秀科技图书一等奖

数学学科硕士研究生系列教材 （第3版）

随机过程通论

SUIJI GUOCHENG TONGLUN

北京师范大学数学科学学院 组 编

（上卷）

王梓坤 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机过程通论(第3版)(上卷)/王梓坤著.—北京：北京师范大学出版社，2010.2重印
(21世纪高等学校研究生教材)
ISBN 978-7-303-10391-1

Ⅰ.随… Ⅱ.王… Ⅲ.随机过程-研究生-教材
Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第117083号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　刷：北京联兴盛业印刷股份有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm × 230 mm
印　张：25.25
字　数：425千字
版　次：2010年2月第3版
印　次：2010年2月第1次印刷
定　价：38.00元

策划编辑：岳昌庆　王松浦　责任编辑：岳昌庆　王松浦
美术编辑：高　霞　装帧设计：高　霞
责任校对：李　菡　责任印制：李　丽

内容提要

本书分上、下两卷，上卷介绍随机过程的一般理论、马尔可夫过程（简称马氏过程或马程）、平稳过程. 前九章附有习题与解答（或提示），下卷叙述布朗运动与位势理论的关系、马尔可夫链与生灭过程，包括基本理论和国内一些科研成果. 以完整的书的形式系统地论述生灭过程及其概率构造，本书也许是第一部. 书末附录 2 综述了超过程，它是当今国际上最新的研究课题之一.

上、下两卷基本上是独立的，阅读下卷时不必通读上卷.

读者对象为高等院校和研究单位的大学生、研究生、老师和科研人员.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院．学院现有教师76人，其中教授32人，副教授25人；有博士学位的教师占91%．特别地，有中国科学院院士2人，教育部长江学者奖励计划特聘教授6人和讲座教授1人，国家杰出青年科学基金获得者4人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人，入选教育部跨/新世纪人才培养计划8人．现有全日制在校生938人，其中本科生689人，硕士研究生176人，博士研究生73人．已毕业全日制本科生6 825人，授予博士学位258人，硕士学位1 030人，研究生班毕业209人．

学院1981年获基础数学、概率论与数理统计博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权．1988年基础数学、概率论与数理统计被评为国家级重点学科．1990年建立了我校第一个博士后流动站．1996年，数学学科成为国家“211工程”重点建设的学科．1997年成为国家基础科学人才培养基金基地．1998年获数学一级学科博士学位授予权．2001年概率论方向被评为我国数学界第1个国家自然科学基金创新群体，并获得3期9年资助．2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台．2007年数学被评为一级学科国家重点学科．2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点．2009年国家教育部数学与复杂系统重点实验室通过验收．学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、课程与教学论（数学）、科学技术史（数学）、计算机软件与理论、控制理论与控制工程8个硕士点．学院下设数学系、统计与金融数学系，有数学与应用数学、统计学2个本科专业，和《数学通报》杂志编辑部．（李仲来执笔）

2009-12-30

第 3 版前言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据. 纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1953 年至 1960 年是我院研究生教育初创时期，招生为代数、分析、几何等方向的 10 个研究生班；1962 年至 1965 年改为招收少量的硕士研究生；1966 年至 1976 年“文化大革命”时期，研究生停止招生. 1978 年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课. 每年导师根据招生情况，分别制定每个研究生的培养计划. 从 1982 年开始，首次开展制定攻读硕士学位研究生培养方案的工作. 为拓宽研究生的知识面，对每届研究生开设 5 门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选 3 门；从 1983 年起，增加代数拓扑，共 6 门基础理论课，安排有经验的教师讲课且相对固定，考试要求严格，使研究生受到正规的训练. 由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距，经过这个阶段的学习后，基本上达到了一个相同的水平，为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障. 1992 学年起，改为开设 8 门基础课，增加概率论基础和计

算机基础．从1997学年开始，规定研究生每人至少选4门．从2000学年起，改为开设12门基础课，增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程．从2007学年起，去掉计算机基础，改为开设15门基础课，增加高等统计学、最优化理论与算法、非线性泛函分析、动力系统基础，规定研究生每人至少选5门．经过30多年系统的研究生培养工作，研究生教育正在逐步走向正规．在此期间，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的．

随着研究生的扩招，招收研究生的数量越来越大．再加上培养方案的改革，出版研究生系列教材已经提到议事日程上来．在20世纪90年代，北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材：《泛函分析》《实分析》《随机过程通论》等，但未系统策划出版系列教材．2005年5月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，由我院组编（李仲来负责），准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后出版第2版或第3版，进一步再用几年时间，出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材．

教材的建设是长期的、艰苦的任务，每一位教师在教学中要自主地开发教学资源，创造性地编写和使用教材．学院建议：在安排教学时，应考虑同一教师在3年至5年里能够稳定地上同一门课，并参与到教材的编写或修订工作中去．在学院从事教学的大多数教师，应该在一生的教学生涯中至少以自己为主，编写或修订一种本科生或研究生教材作为己任，并注意适时地修订或更新教材．我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善．

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论（数学）等硕士研究生使用和参考．（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

2009-04-20

第 2 版上卷作者的话

本卷由科学出版社于 1965 年初版，1978 年重印. 尽管随机过程理论发展非常迅速，这里所叙述的关于马尔可夫过程与平稳过程的理论仍是很重要的，它们至今还是每位研究概率论者不可不知的基本理论. 在这一版中，改正了一些笔误.

初版后承一些著名大学用作教本或参考书，热心的读者曾多次赐教，他们的重要意见已吸收在新版中，作者谨对他们表示衷心的谢忱.

作者还衷心地感激韩丽娟、洪良辰、廖昭懋、蒋铎、洪吉昌等各位教授，他们关心本书的再版，并给予了许多帮助.

各章之末附有参考文献，卷末有参考书目. 每章末有补充与习题或附记.

§1.2 表示第 1 章第 2 节，§3 则表示本章内第 3 节.

王梓坤　1995-08-10

第 1 版上卷作者的话

本卷的目的是叙述随机过程论（简称过程论）的基本理论．要达到此目标，不可避免地会碰到两个问题：什么是过程论的基本理论？怎样才能把它叙述得谨严而又易懂？前者是选材问题；后者涉及叙述的方式．

原来，过程论虽是一门年轻的数学学科，它的蓬勃发展不过是近 30 年左右的事；但由于实际需要的推动和数学工作者的努力，这门学科已经具有非常丰富的内容，诸子百家，巧立门户，早已形成群峰竞秀，万水争流的局面．因此，要在一本篇幅不大的书里，比较直接而又详细地叙述它的核心部分，必须认真选材，才有可能不浪费或少浪费读者的精力．幸好 1961 年我国部分概率论工作者曾交换意见，认为概率论的基本理论中，至少应该包括极限理论、平稳过程和马尔可夫过程三方面．这给作者以很大的启发．遵照这一意见，本卷主要由三部分组成：随机过程的一般理论，马尔可夫过程和平稳过程（极限理论不在本书范围内）．在这三部分的具体取材中，作者参考了 A. H. Колмогоров， P. L. Добрушин， E. Б. Дынкин，J. L. Doob，M. Loève 和 K. Itô 等人的著作，并包含了作者本人的若干结果．特别是江泽培教授的平稳过

程讲义，给了作者很大的启发与帮助，谨此深表谢意.

迄今叙述过程论的方式主要有两种：一是理论性的，严谨而系统，但不证明的细节太多，以致初学时发生不少困难；另一种是实用性的，关于应用方面的材料很丰富，涉及面广，但作为数学基本理论，却似乎不很适当. 本书的任务要求采用第一种方式，为了便于初学，作者力求把选定的内容写细. 我们希望，即使在没有外援的自学条件下，学生学习本书也有可能坚持到底. 除最后一章外，各章末备有习题，它们都不太难，而且几乎每题都附有提示或解答，这些习题对加深理解无疑是有益处的. 此外，在各章末的附记中，简短地指出了作者所知的进一步值得注意的问题与参考文献，这当然是十分浅薄和挂一漏万的.

基于上述想法，我们力求在全书中贯彻选材精练而叙述详细的原则.

上卷共 10 章，可把它们分成三个单元：第 1，3 章主要讲过程的一般理论；第 2，4，5，6，10 章讲马尔可夫过程；第 7，8，9 章讲（弱）平稳过程. 后二单元基本上是彼此独立的. 书末附篇中收集了要用到的测度论知识，读者最好先看一下，以便了解正文中的符号.

上卷底稿在南开大学数学系部分地讲授过，作者衷心感谢听众所提出的许多宝贵意见. 吴荣教授详细阅读了底稿，并提出了许多改进建议；来新三教授校对了文字；胡国定教授对本书的写作始终关心和鼓励. 作者谨对以上诸位敬致谢意；同时还感谢审校者的大力协助.

由于作者学识浅薄，尽管竭力而为，错误缺点，仍然难免，敬请随时指教，以便改进.

1963-01

目 录

上卷 随机过程的一般理论

上卷

随机过程的一般理论

第 1 章

随机过程的基本概念

§1.1 随机过程的定义

（一） 像许多其他数学学科一样，概率论需要自己的公理结构. 我们采用 A. H. Колмогоров 于 1993 年所引进的公理系统，它使概率论建立在测度论的基础上，因而有可能充分利用测度论中的结果和工具. 虽然如此，从历史上看，概率论的产生远在一般的测度理论建立以前，它有专门的术语和偏重的问题. 为了保留这些术语的直观意义，我们自然应该沿用概率论中的名词.

有关测度论的预备知识都收集在附篇中.

测度空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$，如果满足条件 $P(\Omega)=1$，就称为**概率空间**. 本书中，为了避免许多烦琐的关于零测集的子集的说明，总设 P 为**完全的概率测度**. 概率论中，称 Ω 中的点 ω 为**基本事件**，Ω 为**基础事件空间**，$\mathcal{F}$中的集 A 为**事件**，称 $P(A)$为 A 的**概率**. 定义在 Ω 上取实数值的 $\mathcal{F}$ 可测函数 $x(\omega)$称为**随机变量**，ω 的复数值函数$\xi(\omega)$，$\xi(\omega)=y(\omega)+\mathrm{i}z(\omega)$，如果它的实部 $y(\omega)$和虚部 $z(\omega)$都是随机变量，就称为**复随机变量**. 以后如果同时研究多个随机变量，除非特别声明，我们总设它们定义在同一个概率空间上.

对随机变量 $x(\omega)$，函数

$$F(\lambda)=P(x(\omega)\leqslant\lambda) \tag{1}$$

称为 $x(\omega)$的**分布函数**，它对一切 $\lambda\in\mathbf{R}^1$ 有定义，而且是 λ 的不下降右连续函数，满足条件

$$\lim_{\lambda\to-\infty}F(\lambda)=0,\ \lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=1 \tag{2}$$

（右连续性及(2)由测度的连续性公理推出）. 因此，$F(\lambda)$具备一维分布函数的一切性质，从而它在 $\mathcal{B}_{1,F}$上产生一个**概率分布**①，后者定义为 $F(\lambda)$所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度，即测度

$$\int_A \mathrm{d}F(\lambda),\ A\in\mathcal{B}_{1,F}. \tag{3}$$

这测度在 $\mathcal{B}_1$上的限制叫做 $x(\omega)$的**分布**.

对于任何一个一维分布函数 F（以后“一维”二字省去），如果存在某个 Lebesgue 可测而且可积函数f，使

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)\mathrm{d}\mu\quad(\lambda\in\mathbf{R}^1), \tag{4}$$

就称 f 为 F 的**分布密度**，或者说，F 有分布密度为 f.

---

① 记号 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}_{1,F}$等的意义见附篇(二)段.