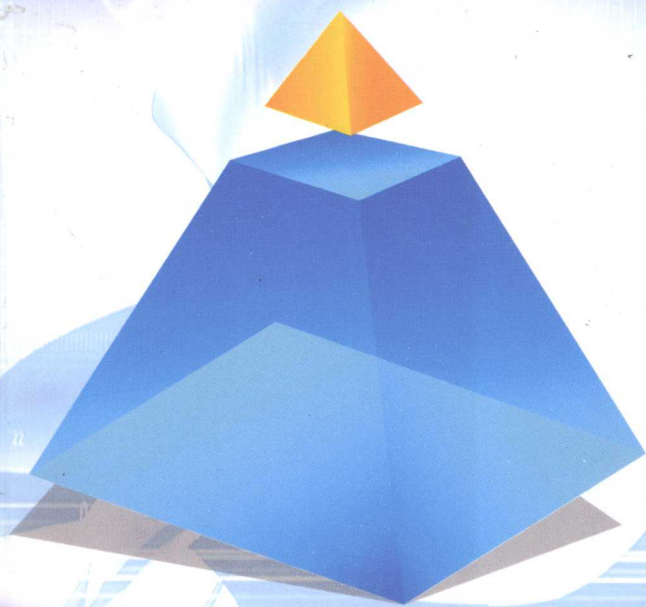


The Progress of Interdisciplinary Research For Mathematics,
Mechanics, Physics and High New Technology, 2010 (13)

数学 · 力学 · 物理学 · 高新技术
交叉研究进展
——2010(13)卷

龚自正 主编



科学出版社
www.sciencep.com

数学·力学·物理学·高新技术 交叉研究进展——2010(13)卷

The Progress of Interdisciplinary Research For Mathematics,
Mechanics, Physics and High New Technology, 2010 (13)

龚自正 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书收入我国学者在学科交叉研究方面的学术论文 135 篇,反映出近年来的最新研究进展。

全书分数学力学与数学物理、非线性科学、复杂性科学、力学与工程、物理学与高新技术、空天科学技术、生命科学与基础科学、金融量化分析与计算、数学等九个方面,相当好的体现了大学科之间交叉研究的特色,体现了基础科学对工程科学和高新技术的支撑作用,体现了基础科学与各新兴学科之间的密切联系,顺应了国际科学发展的潮流。

本书适合于数学、力学、物理学、工程科学、生命科学、信息科学、材料科学、金融科学、交叉科学各分支的研究者和教育工作者参考,也可以作为自然科学其他各分支研究者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学·力学·物理学·高新技术交叉研究进展. 2010(13)卷 / 龚自正主编. —北京: 科学出版社, 2010

ISBN 978-7-03-028262-0

I. ①数… II. ①龚… III. ①数学-文集 ②力学-文集 ③物理学-文集 ④高技术-文集 IV. ①N53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 130923 号

责任编辑: 刘延辉 鄢德平/责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏 杰 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2010 年 7 月第一次印刷 印张: 54 3/4
印数: 1—900 字数: 1 279 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(环伟))

数学·力学·物理学·高新技术交叉

研究进展——2010(13)卷编委会

顾问: 焦善庆 (西南交通大学)

梅凤翔 (北京理工大学)

主编: 龚自正 (中国空间技术研究院)

副主编: 罗绍凯 (浙江理工大学)

魏冬青 (上海交通大学)

郭永新 (辽宁大学)

郭军义 (南开大学)

编委: 汪秉宏 (中国科技大学) 陈立群 (上海大学)

张庆明 (北京理工大学) 张毅 (苏州科技学院)

唐云 (清华大学) 何大韧 (扬州大学)

张庆灵 (东北大学) 王德石 (海军工程大学)

王新志 (兰州理工大学) 姬广富 (中国工程物理研究院)

序

自 20 世纪 60 年代以来,国际上交叉科学研究日趋繁荣,各种交叉科学研究机构、研究中心和学术团体纷纷成立。现代科学各学科之间的交叉研究,源于现代科学的发展与技术革命的需要,源于现代科学的综合思想、移植思想、整体思想、优化思想和数学化思想的形成,源于重大综合性科学问题的出现。学科交叉点往往就是科学新的生长点、新的科学前沿,这里最有可能产生重大的科学突破,使科学发生革命性的变化;同时,交叉科学是边缘性、横断性和综合性的跨学科产物,对于开拓新的科学领域、树立新的科学观念、提出新的科学方法以及解决重大科学和社会问题,具有重大现实意义和深远历史意义。

我国学术界自 20 世纪 80 年代以来,对各学科之间的交叉研究以及交叉科学总体规律的研究,给予了应有的重视。特别是近 10 多年来,我国科学界、政府职能部门以及党和国家领导人对各学科之间的交叉研究高度重视,把跨学科的交叉研究提到了促进我国科技进步的重要位置。中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会的创建,顺应了学科交叉发展的国际性潮流,弥补了我国科学界大学科交叉研究学会甚少的不足。自 1986 年以来,学会组织学科大交叉活动的特色显著,主持举办了大量的、卓有成效的学术活动,相继组建了数学力学、数学物理、物理学与高新技术、非线性科学及其工程应用、空间科学技术、金融量化分析与计算、复杂性科学、生物信息学、力学与工程等九个交叉特色鲜明的专业委员会,现有来自全国 90 多家高校和科研院所的会员近 300 人,连续出版了《数学、力学、物理学、高新技术交叉研究进展(MMPH)》第一卷至第十二卷。

2008 年学会在国际上注册为“International Association of Scientists in the Interdisciplinary Areas(IASIA)”,创办了由 Springer 出版社出版的国际性学会会刊《Interdisciplinary Sciences》,邀请国际艾滋病研究与预防基金会主席、法国的 Montagnier Luc 教授(Professor and President, the World Foundation AIDS Research and Prevention, France)担任编委会主任(Montagnier 教授后来荣获 2008 年诺贝尔医学或生理学奖)。学会在上海成功举办第二届理论与计算化学国际会议(The 2nd International Conference on the Theory and Application of Computational Chemistry in 2008, TACC2008),来自全球 20 多个国家和地区的 500 多名专家学者参会,包括 1992 年诺贝尔化学奖获得者、美国加州理工学院教授 Marcus Rudolph A., 以及计算生物学领域杰出学者、哈佛大学教授 Karplus Martin 等 200 多名海外杰出科学家。学会成功举办第二届 IEEE 生物信息学及生物医学工程大会(Bioinformatics and Biomedical Engineering Conferences, 2009);成功举办第一届和第二届中国计算与系统生物学国际会议(The First International Conference on Computational and System Biology, ICCSB2009; The 2nd International Conference on Computational and Systems Biology, ICCSB2010),迈出了学会国际化的坚实步伐,形成了集基础科学、应用科学和高新技术于一体,具有十分显著的多学科交叉研究特色的国际化的大型学术活动群体。

学会卓有成效的工作,对于促进学科交叉研究的繁荣和发展,促进基础理论与工程技术之间的紧密结合,促进交叉研究人才的成长和提高,促进国际间的学术交流与协作,起到了积极的推动作用,在我国数学、力学、物理学和工程技术界产生了深远而又广泛的影响,并得到中国科协的充分肯定。中国科协书记处书记、副主席冯长根教授多次对学会工作给予指导,于2006年4月为学会成立20周年题词“加强交叉研究,促进科学进步——祝贺中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会成立二十周年”。

中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会第十三届学术年会将于2010年8月和9月分别在中国敦煌和加拿大蒙特利尔市召开,会议论文集《数学、力学、物理学、高新技术交叉研究进展-2010(13)卷》由科学出版社出版,收入学科交叉研究方面的学术论文135篇,反映出近年来的最新研究进展。全书分数学力学与数学物理、非线性科学、复杂性科学、力学与工程、物理学与高新技术、空天科学技术、生命科学与基础科学、金融量化分析与计算、数学等九个方面,相当好的体现了大学科之间交叉研究的特色,体现了基础科学对工程科学和高新技术的支撑作用,体现了基础科学与各新兴学科之间的密切联系,顺应了国际科学发展的潮流。本书适合于数学、力学、物理学、工程科学、生命科学、信息科学、材料科学、金融科学、交叉科学各分支的研究者和教育工作者参考,也可以作为自然科学其它各分支研究者的参考书。

感谢学术界同仁的通力合作,感谢中国空间技术研究院(航天五院)的孙晨博士、代福博士、牛锦超博士、郑建东博士、侯明强博士、李宇、曹燕、徐坤博等;北京大学的邓力维博士、常琳琳博士生、何强、胡晓敏硕士研究生、王思程硕士研究生等;以及浙江理工大学沈静琴博士、王艳利博士等在文集整理和校对工作中所付出的辛勤劳动!

愿交叉科学伴随时代的步伐永远前进!愿我国的跨学科交叉研究和人才培养取得更大进步!愿中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会更好更快的发展!

中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会常务副理事长、兼秘书长

中国空间技术研究院 研究员、博士生导师

龚自正 博士

2010年3月18日于北京

目 录

序

数学力学与数学物理

Noether 理论和 Lagrange 力学逆问题	丁光涛	3
线粘弹性动力学的拟变分原理及其应用	宋海燕 刘宗民 梁立孚	9
PFAFF 约束可积的 MEI 形式的充分必要条件 ...	贾利群 解银丽 杨新芳 郑世旺	14
Perturbation to weakly Noether symmetry and Mei adiabatic invariants for general holonomic mechanical systems	Wang Peng, Zhu Hengjiang	20
研究物种竞争模型的 Lagrange-Noether 方法	李宽国	30
An Averaging Method of Particle Systems	Zhu Haiping, and Yu Aibing	36
Approximate Solution of Homotopic Mapping for Generalized (2+1)-Dimensional.....		
Nozhnik-Novikov-Veselov System	Zheng Chunlong, Liu Rongwan	41
弹性细杆精确模型的 Frenet 轴系	薛 纭 李燕芬	48
弯曲载荷下各向异性复合材料板的裂纹尖端场	赵文彬 张雪霞 杨维阳	53
粘弹性压电材料接触问题的 H-半变分不等式方法	李云翔 刘振海	58
夹层环形板弯曲问题的数值分析	杨静宁 邱 平 甘文艳 王新志	66
梁-柱结构的非线性数学模型与应用	郝美慈 朱媛媛 三浦房纪	72
周期复合材料压电均匀化常数的数值模拟	冯永平 邓明香	78
一类具加权局部化源反应扩散方程组解的一致爆破性质	蒋良军	83
一类奇摄动问题渐近展开解的余项估计	汪训洋	90
The inverse problem on determining diffusion velocity	Jiaqing Pan	95
分数阶 5 参数广义 Zener 模型	黎 明 徐明瑜	100
配置法求解 Burgers 方程	闭 海	105
On the Diophantine Equation $x^p+1=py^2$ for Square Integer Matrices		
.....	Ma Xin, Wang Shiqiang	113
三维 Laplace 算子与方程在不同坐标系下的刻画	陈 晓 谭福锦	114
Numerical Approximation of a Model Arising in Oscillating Magnetic Fields		
.....	Chen Ruyun, Li Zhi	124
Instability of dust acoustic waves with non-adiabatic dust charge fluctuation and nonthermal ions in nonuniform collision dusty plasmas	Zhang Liping, Yuan Lihua, Zhang Meiling	129
Questioning to the explain of Coriolis force in geography	Hongli Liu	134
Perturbation to weakly Noether symmetry and Mei adiabatic invariants for general holonomic mechanical systems	Wang Peng, Zhu Hengjiang	141

非线性科学

周期脉冲扰动下 Duffing 振子的安全盆分叉	王德石 谌 龙 史跃东	153
一类非线性相对转动系统周期运动的稳定性控制	刘 爽 李玉仙 贺敏佳 李延树 巩 蕊 刘 彬	158
耦合相位振子网络双属性连接的同步	张廷宪 郑志刚	162
随机非线性爱情动力学模型	狄根虎 顾仁财 许 勇	167
基于竞选算法的非线性约束优化问题实现	贺春华 张湘伟 吕文阁 谢庆华	174
Strange Property of Two Tent Maps	Wang Hongqing	181
Bifurcation of Limit Cycles in a Quintic Hamiltonian System with Perturbed Terms	Hong Xiaochun, Tan Benshu	187
New Exact Traveling Wave Solutions to (2+1)-Dimensional GMKPI Equation	Wang Junmin, Li Yongjie	192
A new method to obtain exact solutions of nonlinear evolution equations	Chao Lu	197
Double Periodic Wave Solutions of the Modified Kawahara Equation	Junjun Wang, Junmin Wang	203
Rangwala-Rao 方程的精确解	刘小华	208
Oregonator 模型中周期外力对螺旋周期的影响	甘正宁	213
不对称迟滞非线性系统响应分析	刘 强	217

复杂性科学

人类运动斑图中的记忆与任务	韩筱璞 汪秉宏	225
BA 模型网络最大度的发散和扰动	周晖杰 叶 臣 阎春宁 史定华	232
汇流-引流模型中的标度规律	曹世峰 霍 杰 郝 睿 王旭明	238
汇率序列的可见图分析	唐 镇 王建波 杨会杰	246
基于复杂网络的城市气温序列分析	张 东 王建波 杨会杰	251
人类启动子序列的复杂性	赵丽丽 王建波 杨会杰	256
Research of Gray Neural Network	Tao Li, Haibo Li, Yitao Chen	260

力学与工程

扁球面薄壳受迫振动的特性	韩明君 王 钢 邱 平 王新志	269
索膜结构自由振动的有限元分析	林文静 陈树辉	274
变弯曲刚度梁的自由振动和屈曲的积分方程解法	李显方 黄 勇	282
二自由度汽车半主动悬架随机振动的首次穿越研究	许 佳 王洪礼 葛 根 竺致文	287
单辊驱动平整机水平颤振速度对垂直振动的影响及数值仿真	曾 春 熊智强	294
关于离心场中振动系统动特性的科氏效应	刘占芳 张 凯 颜世军	301
建筑结构变形的地震驱动机制探讨	肖建华	308
考虑梁柱作用的混凝土空心砌块墙振动模态特性分析		

..... 王少杰 孙 勇 张 鹏 刘潇璐 刘福胜	316
Tonpilz 型换能器的匹配层技术研究	张 恺 王万研 322
机室开有通风口的离心机的风阻功率	
..... 尹益辉 余绍蓉 冯晓军 黄 鹏 王新伦 赵玉虎	330
计及动态失速效应的 Darrieus 型风力机气动性能评价模型	
..... 刘占芳 颜世军 张 凯	337
圆柱壳在冲击载荷下的失效模式变迁 马 利 胡 洋 郑津洋 邓贵德 陈勇军	344
平面冲击压缩下氧化铝陶瓷的二次压缩现象	刘占芳 冯晓伟 349
磁场中脆性裂纹的形成	刘兆龙 胡海云 范天佑 354
Progressive Failure Investigation of Post-buckling Performance of AGS Composite panel	
..... Man Wang, Ruixiang Bai, Cheng Yan	360
材料衍生比例定律在应变疲劳寿命预测中的应用	熊志鑫 佟福山 冯 亮 367
多钉连接件的疲劳寿命预估及优化	李宝珠 张 铮 374
异型柔性系杆拱桥健康监测系统设计研究 孙传智 李爱群 缪长青 焦常科	379
建筑物混合被动控制系统的参数研究	张新中 韩爱红 武宗良 385
高强钢刻痕杆低温断裂试验	王万祯 苏仁权 王 凤 王新堂 392
高应力三维度下的结构钢断裂试验	王万祯 刘五峰 林 云 王天宏 398
铝合金缺口板低温断裂试验	王万祯 纪海涛 王新堂 林 云 王天宏 404
焊管成型过程的有限元分析	孙德洋 叶金铎 梁 林 王秀华 410
电厂钢-混凝土结构局部沉降有限元分析	姚泽良 党发宁 白国良 414
柔性剪力板连接火灾下的破坏模式	郝淑英 荆 刚 刘海英 420
钢化玻璃的动态力学性能研究	李 磊 安二峰 杨 军 425
纸浆板粉碎机刀片主轴临界转速的计算	王秀华 叶金铎 梁 林 王志芹 434
幕律流体环空流动的速度场与温度场的耦合计算	王冠华 李兆敏 周阴国 438
含圆管方腔内自然对流的数值研究	刘平安 郜 冶 米海荣 邹剑锋 443
原始及开缝 RAF-6E 翼型正、反向吹风特性的数值实验研究	
..... 陈更林 王利军 闫小康 闫照粉	451
基于 CFD 优选空钻注入压力	朱红钧 林元华 李 强 才 科 李福利 461
爆炸焊接界面温升组成理论分析	于 江 熊炎飞 王从银 夏长富 467
基于 Monte-Carlo 法工字型木梁的可靠性分析	赵 东 陶嗣巍 赵家琪 474
变工况条件下万向铰驱动轴的运动特性分析	冯昌林 王德石 朱拥勇 479
RAMAN 光谱方法测定碳纤维应力 · 刘汉臣 王秋萍 王 晶 张英堂 唐远河	485
神经元放电节律转迁的动力学规律 · 张 磊 袁 岚 杨明浩 古华光 任 维	491

物理学与高新技术

超高速发射技术研究进展	徐坤博 龚自正 499
多孔金属材料冲击响应动力学	许爱国 张广财 应阳君 朱建士 521
新 Agegraphic 暗能量模型的演化及其几何诊断法	

..... 吴亚波 王 颀 苏洋洋 赵月月 李 键	538
TM 光束在单层弱吸收 II 型界面上反射时的纵向位移 ... 张培琨 何庆声 张纪岳	543
双原子准分子解离动力学的研究 朱长军 翟学军 薛 兵	548
富勒烯 C ₂₀ 分子的几何结构和性能的理论研究 张秀荣 康张李 段 利	554
易轴型体单轴各向异性对量子自旋波本征值的影响 侯小娟 云国宏 白宇浩 白那日苏 周文平 武晓霞	560
表面场对球状三嵌段共聚物薄膜的影响 谭红革 高文芳 杨新环 宋庆功 康建海	565
有序 α -(Al _{1/4} Cr _{3/4}) ₂ O ₃ 的结构及其稳定性研究 宋庆功 褚 勇 王艳波 耿德平 郭艳蕊	571
The Calculation of The Tetraquark ($Q\bar{q}_1q_2\bar{q}_3$) Masses Tian Yimin	576
The Computation of The Tetraquark ($q_1q_2\bar{q}_3\bar{q}_4$) Masses with Positive Parity Zhang Ao	581
晶体和准晶物理性质关于 C _n 轴的任意旋转不变性 王红利 江少林 刘艳辉	586
Onset of gravitactic thermo-bioconvection in a porous layer using a thermal non-equilibrium model Wei Qi	591
分数阶傅里叶变换域上信号的分段采样与重构 陈之兵 郝 磊	600
横截面为任意直角三角形波导中传播电磁波模式的表示及内壁电荷电流密度分布的分析 赵立强	604
磁场线的曲率半径 徐劳立	610
互动式探究型教学模式在大学物理教学中的实践 丁晓红 原安娟 刘凤艳 刘宇星	613

空天科学技术

弹丸形状效应数值仿真研究 徐坤博 龚自正 侯明强 代 福 郑建东	619
一种基于约束力的编队卫星构形非线性控制方法研究 杏建军 雷勇军 程文科 唐国金	646
振动力学中的多点基础激励问题 张新华	654
深弹空中弹道计算与动力学分析 周奇郑 任 斌 王德石	659

生命科学与基础科学

神经放电不连续映射中的加周期分岔 莫 娟 李玉叶 王 栋 古华光 任 维	669
具有铁电行为的随机生物系统动力学行为分析 马少娟 张春雨	674
心肌细胞搏动的同步化节律 袁 岚 张 宁 魏春玲 杨明浩 古华光 任 维	680
具有时滞的捕食系统的 Hopf 分支的频域分析 徐昌进	685

金融量化分析与计算

我国沪深 300 指数波动率结构突变的检验 王一鸣 赵 华	693
-------------------------------------	-----

金融中的规范对称性和微分几何建模	周石鹏 肖柳青	700
金融量化分析与计算研究中的一些值得关注的问题	毛二万 彭 龙	706
人民币利率互换定价的实证研究	朱世武 许 丹 赵丽娜	713
Analysis of the roots of Lundberg's fundamental equation		
..... Ji Lanpeng, Zhang Chunsheng		718
基于 ARMA 模型的人民币汇率的预测与研究	栗永星 吴润衡	723
对我国股票型开放式基金收益率波动性的一点浅析	魏小波 吴润衡	728
基于博弈理论的供应链-逆向供应链定价策略分析	丁 靖 刘喜波	733
金融行业分析型 CRM 应用研究	杨纪成	739
分数布朗运动环境下几何平均亚式期权定价模型	薛 红 孙玉东	746
专家信息对竞争市场的作用	顾国庆 许 晨	752

数 学

A Spine Approach to the Many-to-One Formula for Continuous Time Multitype Branching Processes	Yang Ting, Ren Yanxia	759
The Stability of Jump-Diffusion Model	Wang Lasheng, Li Yanwei, Huang bin	764
双曲方程的半离散 Legendre 拟谱方法及其并行算法 ...	刘 播 王 勋 黄冬冬	773
多变量向量函数空间上的连续小波变换		
..... 张 志 屈汉章 杨 静 赵 国 李昌兴		778
Comparison results between Jacobi with AOR and GSOR iterative methods		
..... Zhou Ting, Guo Wen-bin, Zhang Shi-guang		784
关于非负曲率凯勒流形单值化定理的一个注记	焦振华 邓 琴	789
乘积季节模型在气温及降水时间序列分析中的应用	石昱馨 刘喜波	792
Matrix Parameterization Method for Solving Ill-conditioned Problem of Gauss-Markov Model	Jiang Minwei	798
The Solution of Nonconsistent F.L.S Based On LR Fuzzy Number		
..... Zhang Yi, Liu xiaoji		804
逐步增加 II 型截尾下 Pareto 分布的参数估计	李 凤	809
广义实正定矩阵的研究	刘晓冀 涂 强	815
“物体通过直角拐角过道”问题的微分方程解法	赵临龙	819
一个矩阵求逆的并行算法	刘桂清	824
The Generalized Inverse for Sums of Matrices	Wang Hongxing, Wei Musheng	829
数学在旅游环境复杂系统中的应用	任崇勋	833
台阶筛法及其应用	许作铭	837
装药对地下结构爆炸毁伤数值模拟	梁 斌 钱立新 陈忠富	842
A new generalized Laguerre function-generalized Hermite function mixed approximation and its application	Zhang Xiao-yong, Jiang jiao, Sui Jiang Hua	848
Periodic Solution of Class of Nonlinear Functional Differential Equations ·	Wu xiaofei	857

数学力学与数学物理

Noether 理论和 Lagrange 力学逆问题

丁光涛¹

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖, 241000)

摘要 研究力学系统 Noether 理论在 Lagrange 力学逆问题中的应用, 提出一类新型的 Noether 理论逆问题, 得到直接从已知的第一积分构造 Lagrange 函数的方法。举例说明所得结果的应用。

关键词: Noether 理论, Lagrange 力学逆问题, 对称性, 第一积分, Lagrange 函数

当代动力学中逆问题已成为众多力学分支和工程科学领域中的重要问题^[1-7]。Lagrange 力学逆问题研究微分方程系统是否存在和如何求出对应的 Lagrange 函数, 以将微分方程表示成 Lagrange 方程形式, 文献[5]将此问题拓展到从第一积分构造对应的 Lagrange 函数, 但方法是先从第一积分导出运动微分方程, 再将方程化成自伴随形式而计算函数 L。一般说来, 将微分方程化成自伴随形式是困难的一环。本文研究利用 Noether 理论来求解 Lagrange 力学逆问题, 直接从第一积分导出 Lagrange 函数。对称性原理是物理学中高层次的法则, Noether 理论将系统的特征动力学函数、对称变换以及第一积分(守恒量)三者联系起来, 理论的直接应用是由对称性导出守恒量, 而通常的逆定理则从第一积分确定对称变换^[8-14]。本文讨论的问题, 既是对 Lagrange 力学逆问题的新拓展, 又是对 Noether 理论应用的新探索。最后, 举例说明得到结果的应用。

1. Noether 理论在 Lagrange 力学逆问题中的应用

Lagrange 系统

$$L = L(t, q, \dot{q}) \quad (1)$$

变量作无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, q, \dot{q})$$

$$q_i^* = q_i + \varepsilon \xi_i(t, q, \dot{q}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_i 为无限小变换生成元。如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, q, \dot{q})$, 使 ξ_0, ξ_i 满足如下 Noether 等式

作者简介: 丁光涛(1941-), 男, 安徽师范大学教授, 一般力学, 相对论。

¹ 通讯地址: 芜湖市 安徽师范大学物理与电子信息学院, 241000; E-mail: dgt695@sina.com

$$L\dot{\xi}_o + X^{(1)}(L) + \dot{G}_N = 0 \quad (3)$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_o \frac{\partial}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial}{\partial q_i} + (\dot{\xi}_i - \dot{q}_i \dot{\xi}_o) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \quad (4)$$

则这种不变性为系统的 Noether 对称性, 由此直接导出 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_o + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\xi_i - \dot{q}_i \xi_o) + G_N = \text{const} \quad (5)$$

判断 Noether 对称性的另一方法是以下 Killing 方程有解

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial t} \xi_o + \frac{\partial L}{\partial q_i} \xi_i + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k) (\frac{\partial \xi_o}{\partial t} + \frac{\partial \xi_o}{\partial q_i} \dot{q}_i) \\ & + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \dot{q}_k) = -\frac{\partial G_N}{\partial t} - \frac{\partial G_N}{\partial q_i} \dot{q}_i, \\ & (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k) \frac{\partial \xi_o}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_i} \quad (i, k = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (6)$$

本文以下讨论中不区分对称性和准对称性, 把严格意义上的对称性视作 $G_N = 0$ 的情形。

与通常的已知守恒量求对称变换不同, 下面研究 Noether 理论一类新型的逆问题, 也就是研究从给定 Lagrange 系统的第一积分(守恒量), 求出系统的 Lagrange 函数的问题。讨论由简到繁分成以下三种情形。

(i) 给定一个第一积分以及相应的 Noether 对称变换, 构造系统的 Lagrange 函数。这是后续讨论的基础。设第一积分为

$$I_N = I_N(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (7)$$

以及对应的对称变换

$$\xi_o = \xi_o(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \xi_i = \xi_i(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (8)$$

代入式(5), 得到确定函数 L 和 G_N 的方程, 求得的 L 和 G_N 应代入 Noether 等式(3)验证。若式(3)满足, 则此函数 L 是一个待求的 Lagrange 函数; 若式(3)不能成立, 则应弃去求得的 L 及 G_N 。从式(5)求出并能满足式(3)的 L 往往不是唯一的, 而是一组, 但是难于求出所有满足式(3)和(5)的函数 L 。

(ii) 给定一个第一积分构造函数 L 。联立式(5)和(3), 或联立式(5)和 Killing 方程(6),

求出函数 L 以及相应的变换生成元 ξ_o , ξ_i 和规范函数 G_N 。求出的解通常也不是唯一的, 求解过程中可以根据给定第一积分的特点, 设定对称变换的类型, 而试探求解。

(iii) 给定一组第一积分

$$I_N^\alpha = I_N^\alpha(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, r) \quad (9)$$

导出系统的 Lagrange 函数。可能给出与全部或部分第一积分对应的对称变换

$$\xi_o^\alpha = \xi_o^\alpha(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \xi_i^\alpha = \xi_i^\alpha(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (\alpha = 1, \dots, s, 0 \leq s \leq r) \quad (10)$$

也有可能对全部积分均未给出对应的对称变换。此时, 应分别按情形(i)或情形(ii)中的方法步骤, 对每一个第一积分 I^α , 求出对应的 Lagrange 函数 L^α 的集合, 如果 r 个 L^α 的集合中存在共同的函数 L (可以是一个或多个), 那就是系统待求的 Lagrange 函数。由于对每一个 I^α , 难于求得 L^α 的完全集合, 故即使 r 个 L^α 的集合中未发现共同的函数 L , 也不能轻易断言问题无解。

2. 算例

例 1 一维阻尼运动的第一积分为

$$I_N = e^{rt} \dot{q} \quad (r \text{ 为正的常数}) \quad (11)$$

利用 Noether 理论求阻尼运动的 Lagrange 函数

将第一积分(11)代入式(5), 得

$$e^{rt} \dot{q} = L \xi_o + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\xi - \dot{q} \xi_o) + G_N \quad (12)$$

对上述结构比较简单的方程, 可以得出很多解

$$L = \frac{1}{2} e^{rt} \dot{q}^2, \xi_o = 0, \xi = 1, G_N = 0; \quad (13)$$

$$L = \frac{1}{2} e^{rt} \dot{q}^2, \xi_o = \frac{1}{\dot{q}}, \xi = 1, G_N = \frac{1}{2} e^{rt} \dot{q}; \quad (14)$$

$$L' = \dot{q} \ln \dot{q} - \dot{q} - r q, \xi_o = -e^{rt}, \xi = 0, G_N = -r q e^{rt}; \quad (15)$$

$$L' = \dot{q} \ln \dot{q} - \dot{q} - r q, \xi_o = 0, \xi = 1, G_N = e^{rt} \dot{q} - \ln \dot{q}; \quad (16)$$

$$L'' = \frac{1}{2} \dot{q}^2, \xi_o = 0, \xi = e^{rt}, G_N = 0; \quad (17)$$

$$L''' = \dot{q} \ln \dot{q} - \dot{q}, \xi_o = 0, \xi = 1, G_N = e^{rt} \dot{q} - \ln \dot{q}; \quad (18)$$

等等。将(13)-(18)共 6 个解, 分别代入 Noether 等式(3)验证, 即代入

$$L\dot{\xi}_o + \xi_o \frac{\partial L}{\partial t} + \xi \frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_o) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{G}_N = 0 \quad (19)$$

解(13)和(15)满足式(19), 而解(14)、(16)和 (18)不能满足式(19)。故待求的阻尼运动 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} e^{rt} \dot{q}^2 \quad (20)$$

$$L' = \dot{q} \ln \dot{q} - \dot{q} - rq \quad (21)$$

L 和 L' 为同位等效的 Lagrange 函数, 同时得到了对应的对称变换。应当指出, 函数 L'' 和 L''' 实际上是自由质点一维运动的 Lagrange 函数, 这就说明了 Noether 等式验证的必要性。

例 2 已知二维运动的两个第一积分为

$$I = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2) + \frac{\mu}{q_1} \quad (22)$$

$$I' = q_1^2 \dot{q}_2 \quad (23)$$

利用 Noether 理论求系统的 Lagrange 函数。

将 I 和 I' 分别代入式(5)和式(3), 得

$$L\dot{\xi}_o + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} (\xi_1 - \dot{q}_1 \xi_o) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} (\xi_2 - \dot{q}_2 \xi_o) + G_N = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2) + \frac{\mu}{q_1} \quad (24)$$

$$L\dot{\xi}_o' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} (\xi_1' - \dot{q}_1 \xi_o') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} (\xi_2' - \dot{q}_2 \xi_o') + G_N' = q_1^2 \dot{q}_2 \quad (25)$$

$$L\dot{\xi}_o + \xi_o \frac{\partial L}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial L}{\partial q_1} + \xi_2 \frac{\partial L}{\partial q_2} + (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \dot{\xi}_o) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \dot{\xi}_o) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} + \dot{G}_N = 0 \quad (26)$$

$$L\dot{\xi}_o' + \xi_o' \frac{\partial L}{\partial t} + \xi_1' \frac{\partial L}{\partial q_1} + \xi_2' \frac{\partial L}{\partial q_2} + (\dot{\xi}_1' - \dot{q}_1 \dot{\xi}_o') \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + (\dot{\xi}_2' - \dot{q}_2 \dot{\xi}_o') \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} + \dot{G}_N' = 0 \quad (27)$$

显然, 直接求解上述方程组是困难的。若将式(26)和(27)更换成对应的 Killing 方程,