文都教育

2007
考研数学
复习大全

经济类

主编：蔡子华

现代出版社

文都教育

2007

考研数学复习大全

经济类

主　编：蔡子华
副主编：曾祥金　蒋志刚　韩於羹

现代出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习大全 经济类/蔡子华编. —北京：
现代出版社，2004.2
(学习战略丛书)
ISBN 7-80188-214-8

Ⅰ.考… Ⅱ.蔡… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 008110 号

编　　者:蔡子华
责任编辑:张俊国
策划编辑:王兴旺
出版发行:现代出版社
地　　址:北京市安定门外华安里 504 号
邮政编码:100011
销售电话:010—88422102 转 831,832
电子邮箱:xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷:北京市燕鑫印刷厂
开　　本:787×1092 毫米 1/16
印　　张:25.5
版　　本:2004 年 2 月第 1 版　　2006 年 2 月第 3 次修订　　2006 年 2 月第 3 次印刷
书　　号:ISBN 7-80188-214-8
定　　价:38.00 元

前　言

考研数学试题的命题原则之一是:试题以考查考生对数学的基本概念、基本原理和基本方法的理解和掌握程度为主,并在此基础上加强对考生的运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力的考查。因此,既重视“三基”(如上所述),又不是重复数学教材对数学理论的系统详尽论述,而是侧重于加深对教材中给出的数学理论的理解,并对照考试大纲规定对教材中欠缺的内容作出补充,正确引导考生根据考研试题的难度对有关解题方法进行归纳总结和拓展的复习指导书,对考生备考至关重要。本书即为满足该需求,帮助考生掌握正确复习方法、提高复习效率、增强应试信心而编写。

本书结构及特点:

一、全书分为高等数学、线性代数、概率与数理统计、综合题解四部分,内容完全按全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的要求编写,无超纲内容。

二、前三部分基本上以数学教材划分的章为单位,依内容提要、重点内容、典型例题解析、练习题、练习题答案及提示的顺序编写。

内容提要中简述考纲考试内容要求的概念、定理、方法等,以及理解概念和掌握方法应注意的问题。旨在扫清考生掌握数学知识中的盲点,以便融会贯通。

重点内容根据近年来考研真题的特点及规律归纳而成。考生应在全面复习的基础上对该部分指出的内容重点复习。

典型例题解析中历年考研真题占有一定比例。例题由易到难排列,对各类基本解题方法都有系统总结;部分较难题例前有分析后有总结;重要类型题都作了系统归纳,有些还给出了独特解法。考生可在这些例题的引导下深刻理解概念、掌握正确的解题方法,以达举一反三、突破难点。

三、各章都配有适量练习题,解答题给出了答案或提示,便于考生检验自己解题是否正确。由于客观题知识点覆盖率高且解法独特,笔者编有《考研数学必做客观题1500题精析》帮助考生集中解决这方面的问题。作为对典型例题中很少列出客观题例解的补充,练习题中的所有选择题及填空题均给出了详解。

四、全书遴选例题内容全面,具有广泛的代表性,摒弃偏题怪题,难度与历年

考题相当。书中选有大量应用题帮助考生掌握建立数学模型的基本方法，提高解决实际问题的能力。为沟通各学科之间的联系，本书在第四部分安排了综合题解，以提高考生求解综合题的能力。

五、本书选材精当，语言精练，力求以不太大的篇幅让使用该书的读者收效最大化。

六、对数学四不要求的考试内容，书中都标有“*”号，方便选考数学四卷种的考生复习。

本书属提高型指导书，最适合强化阶段使用。冲刺阶段笔者另编著有《考研数学全真模拟试卷及精析》等供选用。

在基础复习阶段，建议使用下列教材：

经济数学《微积分》(吴传生等　高等教育出版社)

《线性代数》(吴传生等　高等教育出版社)

《概率论与数理统计》(吴传生等　高等教育出版社)

《概率论与数理统计》(浙江大学盛骤等　高等教育出版社)

自2003年考试科目调整后，数学学科成绩对总分提高及影响再次凸现。这不仅因为数学学科的特点，更因为数学教育本质上是一种素质教育，它最符合目前硕士研究生入学考试的选拔要求。希望广大考研学子首先明白这点，及早准备，在复习过程中踏踏实实、循序渐进、心态平和、力戒浮躁，取得成功。

在本书编写过程中，文都考研信息中心的同志做了大量有益工作，在此一并表示感谢。

书中的不足和错误之处，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

编 者

2006年2月

目　　录

第一部分 高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率与数理统计

第四部分　综合题解

第一部分　高等数学

第一章　函数　极限　连续性

⇨ 内容提要

(一) 主要内容

1. 函数

(1) 函数的定义及定义域

① 函数的定义:设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数.

② 函数的定义域:使函数 y 有意义的自变量 x 取值的集合.

③ 函数相同的条件:a. 定义域相同;b. 对应法则相同.

(2) 复合函数的定义:由 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 而成的函数 $y = f[\varphi(x)]$ 称为由此二函数复合而成的复合函数.

掌握复合函数必须掌握以下四点:

① 要使 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 能复合成 $y = f[\varphi(x)]$,必须 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集不是空集;

② 给出函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 会将其复合,特别是当 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 都是分段函数时求复合函数是难点,要尽力突破;

③ 会将复合函数分解成多个简单函数的复合;

④ 会求复合函数的定义域.

(3) 反函数:若由函数 $y = f(x)$ 得到 $x = \varphi(y)$ 则称 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数,也可将 $x = \varphi(y)$ 记为 $y = f^{-1}(x)$.

应注意的是:单值、单调的函数 $y = f(x)$ 一定有反函数,且其反函数也一定是单值、单调的.

(4) 基本初等函数,称:

① 幂函数　$y = x^{\mu}$　(μ 是常数)

② 指数函数　$y = a^{x}$　(a 是常数　$a > 0, a \neq 1$)

③ 对数函数　$y = \log_a x$(a 是常数　$a > 0, a \neq 1$)

④ 三角函数　$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 等

⑤ 反三角函数　$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \mathrm{arccot} x$(反三角函数的主值) 为基本初等函数.

(5) 初等函数:由常数和五类基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

应注意的是:由于分段函数一般不能用一个式子表示,故分段函数一般不是初等函数.

(6) 双曲函数和反双曲函数

① 双曲函数

双曲正弦:$\mathrm{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$　　双曲余弦:$\mathrm{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

双曲正切:$\mathrm{th} x = \dfrac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

② 反双曲函数

反双曲正弦：$\operatorname{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$　　　反双曲余弦：$\operatorname{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

反双曲正切：$\operatorname{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

(7) 函数的特性

① 有界性

a. 定义：对一切 $x \in D$，若存在正数 M，使 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

b. 应注意的问题：函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界，其导函数与原函数在 D 上都不一定有界

如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $[-1,1]$ 上有界，但其导函数 $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 在 $[-1,1]$ 上无界.

又如 $y = 1 + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，但其原函数 $F(x) = x - \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

② 单调性

a. 定义：设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D. 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2 且 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

b. 应注意的问题：单调函数的原函数和导函数都不一定单调．如 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加．但其导函数 $y' = 3x^2$ 和原函数 $F(x) = \frac{x^4}{4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内都不单调.

③ 奇偶性

a. 定义：$f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对一切 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数．若对一切 $x \in D$，$f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

b. 奇、偶函数的性质

奇函数 + 奇函数 = 奇函数　　　偶函数 + 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 偶函数 = 奇函数　　　偶函数 × 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 奇函数 = 偶函数

任一个以关于原点对称的区间为定义域的函数 = 奇函数 + 偶函数.

即

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{(偶函数)}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{(奇函数)}}$$

c. 导函数与原函数的奇偶性

可导偶函数的导函数是奇函数　　　可导奇函数的导函数是偶函数

连续奇函数的原函数是偶函数　　　连续偶函数的原函数中有一个是奇函数

④ 周期性

a. 定义：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 T，使对一切 $x \in D(x \pm T \in D)$，$f(x+T) = f(x)$ 恒成立．则称 $f(x)$ 为周期函数，最小的正数 T 称作其周期.

b. 导函数的周期性：可导周期函数的导函数一定是周期函数.

c. 应注意的问题：周期函数的原函数不一定是周期函数．如 $f(x) = 1 + \cos x$ 是以 2π 为周期的函数，但其原函数 $F(x) = x + \sin x$ 不是周期函数．而 $f(x) = \cos x$. 则 $F(x) = \sin x$ 又是周期函数.

2. 极限的概念及运算性质

(1) 极限的定义：

① 数列的极限的定义：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，使当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 是 $n \to \infty$ 时数列 x_n 的极限．记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

② $x \to \infty$ 时函数极限的定义：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正数 X，使当 $|x| > X$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限．记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

③$x \to x_0$ 时函数的极限的定义：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限．记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

④$x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左、右极限

a. 定义：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的右极限．记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的左极限．记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

b. $x \to x_0$ 时极限存在的充要条件

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

(2) 极限的四则运算法则

① 法则：若 $\lim f(x) = A$　　$\lim g(x) = B$.

则　$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$　　$\lim[f(x) \cdot g(x)] = AB$　　$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$　$(B \neq 0)$

② 应注意的问题：

a. 只有当各极限存在时才能运用极限的四则运算法则.

b. 函数的和、差、积、商的极限存在不能保证各自的极限存在.

$$\text{如}\quad \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{2}$$

函数的乘积的极限存在，但 $\lim\limits_{x \to +\infty} x$ 不存在.

(3) 复合函数的极限运算法则

设函数 $u = \varphi(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在且等于 a，但在 x_0 点的某去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$，又 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u \to a} f(u) = A$.

3. 无穷小量

(1) 无穷小量的定义：以零为极限的变量叫无穷小量.

(2) 无穷小的运算性质

① 有限个无穷小之和为无穷小；

② 有界函数与无穷小的积为无穷小；

③ 极限与无穷小的关系：

$\lim y = A \quad \Leftrightarrow \quad y = A + \alpha$，其中 α 为在自变量的相同变化趋势下的无穷小量.

(3) 无穷小的比较

① 定义：设 α 和 β 是在自变量的相同变化趋势下的无穷小量

若　$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$ 时，则称 α 较 β 高阶，记为 $\alpha = o(\beta)$

$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$ 时，则称 α 较 β 低阶

$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$ 时，则称 α 与 β 同阶　当 $c = 1$ 时，则 α 与 β 等价．记为 $\alpha \sim \beta$

② 等价无穷小替换定理

若　$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$　　则　$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$

4. 无穷大

(1) 定义：$\forall M > 0, \exists \delta > 0$（或 $X > 0$）使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > X$）时 $|f(x)| > M$，则称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大.

(2) 无穷大与无穷小的关系：倒数关系

即 若 $f(x)\to 0(f(x)\neq 0)$ 则 $\dfrac{1}{f(x)}\to\infty$ 若 $f(x)\to\infty$ 则 $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$

(3) 无穷大与函数无界的关系：

若 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，$f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 必在 x_0 点的某邻域(或 $|x|>X$) 无界．但 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域(或 $|x|>X$ 时) 无界，而 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，$f(x)$ 不一定是无穷大．如 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点的任一邻域内无界．但当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

5. 极限存在的准则

(1) 准则 Ⅰ：

① 若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

② 若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

(2) 准则 Ⅱ：

① 单调有界数列必存在极限

② 若 $|x|>X$ 时 $f(x)$ 单调且有界，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在.

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ (2) $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$.

7. 有关极限的重要定理

(1) 惟一性：若变量 y 的极限存在，则必惟一.

(2) 有界性：

① 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 则必 $\exists M>0$，使 $|x_n|\leqslant M$.

② 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 则必 $\exists M>0$ 和 $\delta>0(X>0)$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$) 时，$|f(x)|\leqslant M$.

(3) 保号性：

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$，则必 $\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0(<0)$.

② 若 $f(x)>0(<0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

8. 罗必塔法则

条件：

① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0(\infty)$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=0(\infty)$

② $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 点的某邻域(x_0 点可除外) 或 $|x|>X$ 时都可导，且 $g'(x)\neq 0$

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty)$

结论：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

9. 函数的连续性

(1) 函数连续性的定义

① 在 x_0 点连续的定义：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

(或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$)，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

② 在开区间 (a,b) 内连续的定义：

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续.

③ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的定义：

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 间断点及其分类

① 间断点的定义：函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

② 间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\begin{array}{c}\text{第一类间断点}\\ \text{(左、右极限都存在)}\end{array} & \begin{cases}\text{可去间断点(左极限}=\text{右极限)}\\ \text{跳跃间断点(左极限}\neq\text{右极限)}\end{cases}\\ \text{第二类间断点} & \text{除第一类间断点外的间断点}\end{cases}$$

(3) 连续函数的运算性质

① 连续函数的和、差、积、商及复合函数连续.

② 若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单值单调且连续，则 $y=f^{-1}(x)$ 在相应区间 (α,β) 内单值单调且连续.

(4) 初等函数的连续性

① 一切基本初等函数在其定义域内连续

② 一切初等函数在其定义区间内连续

(5) 在闭区间上连续函数的性质

① 定理 1(最大、最小值定理)：在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值

② 定理 2(有界性定理)：在闭区间上连续的函数一定在此区间上有界

③ 定理 3(介值定理)：

a. 介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且在这区间的端点取不同的函数值，$f(a)=A$，$f(b)=B$. 那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

b. 零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

④ 定理 4：在闭区间上连续的函数必取得介于最小值 m 和最大值 M 之间的一切数值.

(二) 重要公式及结论

1. 重要公式

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(0<a)$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\quad|q|<1$

(4) 若 $a_0\neq0,b_0\neq0$，则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

注意：极限的四则运算法则及两个重要极限前面已列出.

2. 重要结论

常用的等价无穷小

当 $u\to0$ 时

$\sin u\sim u$　　$\tan u\sim u$　　$\arcsin u\sim u$　　$\arctan u\sim u$

$\ln(1+u)\sim u$　　$e^u-1\sim u$　　$1-\cos u\sim\dfrac{u^2}{2}$　　$(1+u)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{u}{n}$

⇨ 重点内容

函数的概念与特性　　极限的概念

无穷小的定义、运算性质及无穷小的比较

极限存在的准则、两个重要极限　　极限的求法

函数连续性的定义及间断点的分类　　在闭区间上连续函数的性质

典型例题解析

(一)函　数

【例 1】 判断下列各对函数是否相同

(1)$y=\sin(\arcsin x)$ 与 $y=x$　　(2)$y=\sqrt{\sin^2 x}$ 与 $y=\sin x$

(3)$y=\cos^2 t+\sin^2 t+t$ 与 $y=1+x$

分析　判断两个函数是否相同,要看(1)定义域是否相同;(2)对应法则是否相同.所谓对应法则相同即对定义域内任取一自变量的值两个函数的函数值相等.

【解】 (1)是一对不相同的函数.因前者定义域为 $|x|\leqslant 1$,而后者为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2)是一对不相同的函数.因为对应法则不相同.如在定义域内取 $x=\frac{5}{4}\pi$,前者的函数值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,而后者的函数值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)是一对相同的函数.因它们的定义域都是全体实数,且对任意实数 t,$\cos^2 t+\sin^2 t=1$,∴ 前者实为 $y=1+t$ 与后者的对应法则相同.至于用何字母表示自变量与函数是否相同无关.

【例 2】 求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

【解】
$$\begin{aligned}y^3&=x+\sqrt{1+x^2}+3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right)^2\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)\\&\quad+3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)^2+x-\sqrt{1+x^2}\\&=2x+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}\cdot\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)\\&=2x+3(-1)\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)=2x-3y\end{aligned}$$

∴$x=\frac{1}{2}(y^3+3y)$　即所求反函数为 $y=\frac{1}{2}(x^3+3x)$

【例 3】 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$,求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

【解】 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2(1-\sin^2\frac{x}{2})$

设　$u=\sin\frac{x}{2}$　　则 $f(u)=2(1-u^2)$

∴　$f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=2-(1+\cos x)=1-\cos x$

【例 4】 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,且 $x\neq 0$,求 $f[\frac{1}{f(x)}]$ 及 $f[f(x)]$

【解】 $\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x}$

则
$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{(x-1)/x}{(x-1)/x-1}=1-x$$
$$f[f(x)]=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{x/(x-1)}{x/(x-1)-1}=x$$

【例 5】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant 1\\ x & |x|>1\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$　求 $f[g(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2 & |g(x)|\leqslant 1\\ g(x) & |g(x)|>1\end{cases}$

$$=\begin{cases}(2-x^2)^2 & |2-x^2|\leqslant 1 \text{且} |x|\leqslant 1\\ 2-x^2 & |2-x^2|>1\text{且}|x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases} = \begin{cases}1 & |x|=1\\ 2-x^2 & |x|<1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$$

【例 6】 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2 & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2} & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

【解】 当 $-1\leqslant x<0$ 时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}(2t+\frac{3}{2}t^2)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac{t^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^3}{2}+x^2-\frac{1}{2}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=(t^2+\frac{t^3}{2})\Big|_{-1}^{0}+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x t\mathrm{d}(\frac{1}{e^t+1})=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{e^t+1}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{\mathrm{d}(e^t)}{e^t(e^t+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^t}{e^t+1}\Big|_0^x=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2$$

$$\therefore\quad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2}+x^2-\dfrac{1}{2} & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{xe^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)+\ln 2-\dfrac{1}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

（二）极限的求法

1. 初等变换

【例 7】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]$

【解】 $\because$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$$

【例 8】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\quad |a|<1.$

【解】

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}\qquad(\because\ |a|<1,\lim_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0)$$

$$=\frac{1}{1-a}$$

2. 重要极限

【例 9】 求 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^m$

【解】

$$\text{原式}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}\cdot(-\frac{n^2}{m^2})\cdot m}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}(-\frac{n^2}{m})}=e^0=1$$

【例 10】 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+C}{x-C}\right)^x=\int_{-\infty}^{C}te^{2t}\mathrm{d}t$,求 C.

【解】 左边 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+C}{x-C}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+C/x)^x}{(1-C/x)^x}=\frac{e^C}{e^{-C}}=e^{2C}$

右边 $=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{C} t\mathrm{d}e^{2t}=\frac{1}{2}[te^{2t}\Big|_{-\infty}^{C}-\int_{-\infty}^{C}e^{2t}\mathrm{d}t]=\frac{1}{2}Ce^{2C}-\frac{1}{4}e^{2C}=e^{2C}(\frac{C}{2}-\frac{1}{4})$

由 $e^{2C}=e^{2C}(\frac{C}{2}-\frac{1}{4})$　　得　$C=\frac{5}{2}$

3. 无穷小的运算性质

【例 11】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

∵ 当 $x\to+\infty$ 时，$\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ 为无穷小量，且 $\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$ 有界

∴ 原式 $=0$

4. 无穷小量分出法

【例 12】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{20}(3x+4)^{30}}{(4x-3)^{50}}$

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-\frac{1}{x})^{20}(3+\frac{4}{x})^{30}}{(4-\frac{3}{x})^{50}}=\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{4^{50}}=\frac{3^{30}}{4^{40}}$

【例 13】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(\sqrt{n^2+a^2}-n)}$

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\frac{(\sqrt{n^2+a^2}-n)(\sqrt{n^2+a^2}+n)}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln a^2-\ln n-\ln(1+\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\ln a^2}{\ln n}-1-\frac{\ln\left(\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}+1\right)}{\ln n}}=-1$$

> 注　对 $x\to\infty$ 或 $n\to\infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式应首先采用无穷小量分出法.

5. 罗必塔法则

【例 14】 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

> 分析　当 $x\to 0^+$ 时 $(\cos\sqrt{x})\to 1$，而 $\frac{1}{x}\to+\infty$，故原式是 1^∞ 未定式，可用重要极限或罗必塔法则求解.

【解法 1】
$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[1-(1-\cos\sqrt{x})\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\cdot 4}=e^{-\frac{1}{2}}$$

【解法 2】 设 $y=\sqrt{x}$

则　原式 $=\lim\limits_{y\to 0^+}(\cos y)^{1/y^2}=\exp\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\ln(\cos y)}{y^2}=\exp\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{-(\sin y/\cos y)}{2y}$

$$=\exp\lim_{y\to 0^+}-\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{2\cos y}=e^{-\frac{1}{2}}$$

【例 15】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\right]$

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})}-1}{1/x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\left[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})\right]^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{[(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})]'}{(1/x)'}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}[a(1+\frac{b}{x})(1+\frac{c}{x})+b(1+\frac{c}{x})(1+\frac{a}{x})+c(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})]$$

$$=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

【例 16】 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0,f'(0)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}f(\sqrt{t})\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

【解】 原式$\xlongequal{(0/0)}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)\cdot 2x}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2f(x)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2f'(x)}{3f(x)+xf'(x)}=\infty$$

6. 等价无穷小替换

【例 17】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\dfrac{x}{e^x-1}\right)$

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^3}\cdot\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^3}{x^3}\cdot\frac{e^x-1-x}{x^2}\quad(x\to 0\text{ 时},\tan 2x\sim 2x\quad e^x-1\sim x)$$

$$=8\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=8\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=4$$

【例 18】 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^x(e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^x)\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3}$

$$=-\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[1+(\frac{\sin x}{x}-1)]}{x^2}=-\exp\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-(1/x^2)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}$$

$$=-e^0\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x^2/2)}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

7. 利用导数的定义

【例 19】 设 $f(u)$ 为可微函数，且 $f(0)=0$，求

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi t^3}$$

【解】 原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{\pi t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\pi tf(t)}{3\pi t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{[f(t)-f(0)]}{t}=\dfrac{2}{3}f'(0)$

8. 利用中值定理

【例 20】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}$

【解】 ∵ $\sin(\sin x)-\sin x=(\sin x-x)\cos[\theta(x-\sin x)+x]\quad(0<\theta<1)$

∴ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos[\theta(x-\sin x)+x](\sin x-x)}{x^3}=\cos 0\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$

9. 用准则

【例 21】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\right)$

【解】 设 $x_n=\dfrac{1^2}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}$ 　　则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}{n^3+n}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}{n^3+1}$

∴
$$\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1}$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1}=\frac{1}{3}$$

∴
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}$$

【例 22】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x$

【解】 ∵ $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}$ 　　而 $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$

∴
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x=0$$

【例 23】 设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\displaystyle\int_a^bf(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t=0$

【证明】 $\displaystyle\int_a^bf(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t=\int_a^bf(t)\mathrm{d}(-\frac{\cos\lambda t}{\lambda})=-\frac{1}{\lambda}f(t)\cos\lambda t\Big|_a^b+\int_a^b\frac{\cos\lambda t}{\lambda}f'(t)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{\lambda}[f(b)\cos\lambda b-f(a)\cos\lambda a]+\frac{1}{\lambda}\int_a^bf'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t \qquad ①$$

式 ① 中第一项当 $\lambda\to\infty$ 时趋于 0，而

$$0\leqslant\left|\int_a^bf'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t$$

∴
$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_a^bf'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^bf(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t=0$$

【例 24】 已知 $x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\ (n=1,2,\cdots)$，$x_0=0$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

【证明】 ∵
$$x_1=\frac{1+2x_0}{1+x_0}=1>x_0=0$$

(1) 设 $x_k>0$ 　　则 $x_{k+1}=\dfrac{1+2x_k}{1+x_k}=1+\dfrac{x_k}{1+x_k}>0$

由数学归纳法知 　$x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$

(2) 设 $x_k>x_{k-1}$

则
$$x_{k+1}-x_k=\frac{1+2x_k}{1+x_k}-\frac{1+2x_{k-1}}{1+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0$$

由数学归纳法知 　$x_n<x_{n+1}$，即 　x_n 单调增加

又
$$x_n=\frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<2$$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 　　由 $x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 　　得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$