

開明青年叢書

數學的園地

劉薰宇著



開明書店

數學的園地

劉薰宇著



開明書店

開

明

書

店

書

畫

數學的圖地

民國二十二年九月月初版

民國三十三年七月特一版

每冊定價國幣一元五角

印刷者

開明書店

發行者

上海福州路
開明書店
代表人范洗人

著作者

劉薰宇

有著作權 * 不准翻印

目次

一	開場話	一
二	第一步	九
三	速度	一四
四	函數和變數	二五
五	無限小的變數——誘導函數	三五
六	誘導函數的幾何的表示法	四九
七	無限小的量	七三
八	二次誘導函數——加速度——高次誘導函數	八一

九	局部誘導函數和全部的變化·····	九二
一〇	積分學·····	九七
一一	面積的計算·····	一〇九
一二	微分方程式·····	一二七
一三	數學究竟是什麼·····	一二三
一四	總集論·····	一三二

一 開場話

我在中學三年級學物理的時候，曾經碰過一次物理教員的釘子，現在只要一想到，額上好像都還有餘痛。詳細的情形已不大記得清楚了，大概是這樣的：爲了什麼一個公式，我不知道牠的來源，便很愚笨地向了那位教員追問。起初他很和善，雖然已有點不高興，他說：「你記住好了，怎樣來的，說來你這時不會懂。」在我那時的呆板而幼稚的心，無論如何不承認真有說來不會懂的這末一回事，仍舊不知趣地這樣請求：「先生說說看吧！」他真懊惱了，這一點我記得非常明白，他的臉，發一陣紅又發一陣青，他氣忿忿地，呼吸很促，手也顫抖了，從桌子上拿起一支粉筆使勁在黑板上寫了這樣幾個字（後來我知道這只是記號，不好單看成幾個字）眼睛瞪着我，幾乎想要將我吞到他的

肚裏才甘心似的，「這你懂嗎？」我嚇得不敢出聲，心裏暗自想：「真是不懂！」

從那一次起，雖則我已嚇得自己只好承認不懂，然而總也不大甘心，常常想從什麼書上去找。這幾個奇怪字看，可惜得很，一直過了三年才遇見了牠，才算「懂其所懂」地懂了一點；真的，第一次知道牠的意義的時候，心裏感到無限的喜悅！

不管怎樣，馬馬虎虎，我總算懂了，然而我的年齡也大起來了，我已經踏進了被人追問的領域了！「代數，幾何，學過了學些什麼呢？」微積分是怎樣的東西呢？「這類的問題，常常被比我年紀小些的朋友們問到，我總記起我碰釘子時的苦悶，不忍心讓他們也在我的面前碰，常常想些似是而非的解說，使他們不全然失望。不過，總覺得這也於心不安，我相信一定可以簡單地來牠們的大意說明的，只是我不曾仔細去思索過。新近偶然從書坊店看見一本兩小時的數學 (Deux Heures de Mathématique)，書名很奇特，便買了來。翻讀一過，覺得牠很夠替我來解答前面的問題，因此就依據牠，寫成這篇東西，算是了卻一樁心願。我常常這樣想，數學和辣椒很有些相同，沒有喫過的人，初次喫到，免不

了要叫要哭，但真喫慣了，不喫卻過不得；不只這樣，就是喫到滿頭是汗，兩眼淚流，身體上固然夠苦，精神上卻愈加舒暢。話雖如此，這裏卻不是真要把這惡辣的東西硬叫許多人流一通大汗，實在還沒有喫生葱那樣的辣。

有一點卻得先聲明，數學的階段是很緊嚴的，只好一步一步地走上去，要跳，那簡直是妄想，結果只有跌了下來。因此，這裏雖然竭力避去繁重的說明，但也是對於曾經學過初等的算術，代數，幾何，而沒有全部忘掉的人說的。因此先來簡單地說幾句關於算術，代數，幾何的話。

算 術

無論哪一個人要走進數學的園地裏去遊覽一番，一進門就碰到的是算術，這是因為牠比較容易也比較簡單，所以易於親近的緣故。話雖這樣講，真在數學的園地裏遊個盡興，到後來你要碰到的卻又是牠了，「整數的理論」就是數學中最難的部分。

你在算術中，經過了加，減，乘，除四道正門，就可以看到一座大廳，門上橫着一塊大大的匾，寫的是「整數的性質」五個大字。已經走進這大廳，而且很快地就走了出來，由那裏轉到分數的庭院去，你當然很高興。但是我問你：你在那大廳裏究竟得到了什麼呢？裏面最重要的不是質數嗎？ $1, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$ ：：：你都知道牠們是質數了吧！然而，這就夠了嗎？隨便給你一個數，比如 103 ，你能夠用比較牠小的質數一個一個地去除牠，除到後來，得數比除數小了還除不盡，你就決定牠是質數。這個法子，是很靠得住的，一點不會欺騙你。然而牠只是一個小聰明的玩意兒，真要把牠正正經經地來用，那就叫你不得不搖頭了。倘若我給你的不是 103 ，而是一個有一百零三位的整數，你還能呆板板地照老法子去決定牠是不是質數嗎？人壽幾何，一個不湊巧，恐怕你還沒有試到一半，已經天昏地暗了。那末，有沒有別的法子可以決定一個數是不是質數呢？對不起得很，真要問，多請些人到這座大廳裏去轉去。

在「整數的理論」中，問題很多，得了別的一部分數學的幫助，也解決過一些，所以

算術自己也是在牠的領域內常常增加新的建築和點綴的，不過不及別的部分來得快罷了。

代 數

走到代數的殿上，你知道解一次方程式和二次方程式，自然這是再快樂沒有了，算術碰見了要弄得焦頭爛額的四則問題，只要用一兩個羅馬字母去代替那所求的數，依着題目已說明白的條件，立起一個方程式，這就死板板地照法則可以求出答數來，真是又輕巧又明白。代數比算術真有趣得多，容易得多！但是，這也只是在那殿裏隨便玩玩就走了出來的說法，若留連在裏面，又將看出許多困難了，一次兩次方程式，總算可以解了，一般的方程式怎樣呢？

幾 何

幾何的這座院子，裏面本來是陳列着些直線和曲線的圖形的，所以你初走進去的時候，立刻會感到一種特別風味，好像牠在數學的園地裏，儼然是別有天地。但從笛卡特（Descartes）發現了牠和代數的院落的通路，這座院子也就不孤另另的了。牠的內部更加充實富麗起來。萊布利茲（Leibnitz）用解析的方法也增加了牠的滋長繁榮的力量不少的。確的，用二元一次方程式， $y = mx + c$ 表示直線，用二元二次方程式， $x^2 + y^2 = c^2$ 和 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 相應地表示圓和橢圓，實在便利不少。這條路，一經發現，來往行人都可通過，並不是只許進不許出，所以解析數學和幾何就手挽手地互相扶助着向前發展。

還有，這條路發現以後，也不是因為牠比較便利，幾何的院子獨自的出路，便懸上一塊「路不通行，游人止步」的牌；牠自己獨立地進展，也一樣地沒有停息。即如李曼（Biemann）就是走老路。題着「位置分析」（Analysis Situs）又題着「形學」（Topologie）的那間亭子，也就是後來新造的，在裏面使你可以看見空間的性質，幾何的連續，質的純

粹的性相，你只須用到那「量度」的抽象觀念就夠了。

總 集 論 (Théorie des Ensembles)

在物理學的園地裏面，有着恩斯坦 (Einstein) 的相對性原理的新建築，牠所陳列的，是通過性慧由敏感而發明的新定理；像這種性質的寶貨，數學的園地當中，也可以找得出嗎？在數學的園地裏，走來走去，所能夠見到的，都只是些老花樣，舊古董，不過和遊賞一所傾頹的古剎一樣嗎？

不，絕不！那些古老參天的樹幹，那些質樸的從幾千百年遺留下來的亭臺樓閣，在這園地裏，固然是占重要的地位，極容易映到遊人的眼裏。但倘使你看到了這些還不滿足，你慢慢地走進去，就可以看出古樹林中還有鮮豔的花草，亭樓裏面，更有新奇的裝飾；這些增加這園地的美感，充實了這園地的生命。由牠們，就可以使你知道了，數學的園地從開闢到現在，沒有一天停止過墾殖。在別的各种園地裏，可以看見燦爛耀目的新點綴，但也

常常可以見到那舊建築傾跌以後殘留的破磚爛瓦，在數學的園地裏，卻只有欣欣向榮的盛觀；這殘敗的使人感到淒涼的遺蹟，卻非常稀少，牠裏面的一切建築裝飾，都有着很牢固的根底的呀！

數學的園地裏，有一種使人感到不可思議的寶物叫做「無限」(L'infini mathématique)，牠常常都是一樣的嗎？牠裏面究竟包含着些什麼，我們能夠說明嗎？牠的意義必須確定嗎？

遊到了數學的園地當中的一個新的院落，牆門上寫着「總集論」三字的，那裏面就可以給你看這些問題的解答了。這裏面是極有趣味的，用一面大的反射鏡，可以叫你看這全個園地和幽邃的哲學的花園的關聯以及牠倆的通路。三十年來，康脫 (Cantor) 將超限數 (Des nombres transfinis) 的意義導出，和那物理的園地中可驚的新建築，一般的重要而且可驚異！在本文的最後，就要說到牠。

二 第一步

我們來開始講正文吧，先從一個極平常的例說起。

假如，我和你兩個人同乘一列火車去旅行，在車裏非常寂寞，不湊巧我們既不是詩人，不能從那些經過車窗往後飛奔的田野樹木吸取什麼「煙土披里純」；我們又不是畫家，能夠在剎那間感到什麼自然界的色相的美；我們只有枯坐了，我們會覺得那車子走得很慢，真到不耐煩的時候，也許竟會感到牠比我們自己步行還慢；但這全是主觀的，就是同樣地以為牠走得太慢，我們所感到的慢的程度就不一定相等。我們只管詛咒車子跑得不快，車子，牠一定不肯甘休，要問我們拿出證據來，這一下子，有事做了，我們兩個人就來測量牠的速度。

你立在車窗前數那鐵路旁邊的電線桿——假定牠們每兩根的距離是相等的，而且我們已經知道了——我看着我的錶。當你看見第一根電線桿的時候，你立刻叫出「一」來，我就注意我的錶上的秒針在什麼地方。你數到一個數目要停止的時候，又將那數叫出，我再看看我的錶上的秒針指什麼地方。這樣我們屈指一算，就可以得出這火車的速度。假如得出來的是一分鐘走一公里，那麼六十分鐘就是一小時，這火車要走六十公里；火車的速度就是每小時六十公里，我們無論怎樣，不好說牠太慢了。同樣地，若是我們知道：一個人十二秒鐘可以跑一百公尺，一匹馬半點鐘能跑十五公里，我們也可以將這人每秒鐘的或這馬每點鐘的速度算出來。

這你覺得很容易，是不是？但，你真要做得對，就是說，你真要得出那火車或人的精確的速度來，實際卻很難。比如你另換一個方法，先只注意火車或人從地上的某一點跑到某一點要多少時間，然後用捲尺去量那兩點的距離；再計算他們的速度，就多半不會恰好，火車每點鐘是走六十公里，人每十二秒鐘可跑一百公尺；也許火車走六十公里只要

59又 $\frac{3}{10}$ 分，人跑一百公尺不過11又 $\frac{3}{4}$ 秒。你只要真耐煩，你儘可以去測到幾十次或一百次，你一定可看出來，沒有幾次的得數是全然相同的。所以速度的測法，說起來很簡便，做起來，那就很不容易。你測了一百次，說不一定全沒有一次是對的。但這一點關係也沒有，即使一百次中有一次是對的，你也沒有法子知道究竟是哪一次。歸根結蒂，我們不得不穩妥地說，只能測到「相近」的數。

說到「相近」，也有程度的不同，用的器械——時錶，尺子——越精良，「相近」的程度越高，反過來差誤就越小。極精密的電時錶，測量時間，差誤可以小於百分之一秒，我們可以想像，假如再將牠弄得更精密，可以使差誤小於千分之一秒，或者還要小些；但是，無論怎樣小，要使這差誤沒有，卻難能了！

*

*

*

*

同樣地，我們對於一切運動的測量，也只能得相近的數。第一自然是要測運動，總得測那種運動所經過的距離和牠費去的時間；而這距離和時間的測量就只能得到相

近的數。還不只這樣，運動本身也就是變動的。

假定一列火車由一個速度變到另一個較大的速度，就是變得更快一些，牠決不能突然就由前一個跳到第二個。那末，在這兩個速度當中，有多少不同的中間速度呢？這個數目，老實不客氣，是無限的呀！而我們的測量的方法，卻只容許我們計算出一個有限的數來。我們計算的時候，時間的單位越取得小，所得的結果自然越和真實的速度相近，但無論用一秒鐘做單位或十分之一秒鐘做單位，在相鄰的兩秒鐘或兩個十分之一秒鐘的當中，常常總是有無限的中間速度。

能夠確切認知的速度原是抽象的！

這個抽象的速度只存在於我們的想像中。

這個抽象的速度，我們能夠理會，卻不能從經驗中得到。在我們所能測量得的一些速度當中，可以說，都有無限的中間速度存在。已經知道我們所測得的速度不精確，而又要用牠，這不是在自己騙自己嗎？