



国防特色教材·控制科学与工程

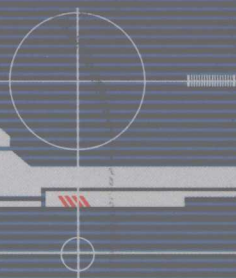
National Defense  
TEXTBOOK



# 非线性控制系统

FEIXIANXING KONGZHI XITONG

李殿璞 编著



西北工业大学出版社

北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社

哈尔滨工业大学出版社

哈尔滨工程大学出版社



国防特色教材 · 控制科学与工程

# 非线性控制系统

李殿璞 编著

西北工业大学出版社

北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社

哈尔滨工业大学出版社

哈尔滨工程大学出版社

## 内容简介

本书是控制科学与工程和电气工程等学科的一门专业基础课教材,主要面向控制科学与工程和电气工程等学科专业的硕士和博士研究生,系统地讲述非线性控制系统的基础理论和方法。本教材在理论和定理的阐述上由浅入深,文字顺畅,便于读者阅读理解,很适于作为自学、自修提高的教材。此外,本教材所提供的一些典型国防工程应用实例和基础模型,可供硕士和博士研究生撰写论文时和从事实际工作时借鉴。

本书适合作为博士研究生和硕士研究生的学位课、指定选修课或一般选修课教材,也可作为高年级本科生的辅助教材,同时可供相关专业方向的科技人员和管理人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统/李殿璞编著. —西安:西北工业大学出版社,2009.12  
ISBN 978-7-5612-2671-1

I. ①非… II. ①李… III. ①非线性控制系统—教材 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 242726 号

非线性控制系统

李殿璞 编著

责任编辑 何格夫

\*

西北工业大学出版社出版发行

西安市友谊西路 127 号(710072) 发行部电话:029-88493844 传真:029-88491147

<http://www.nwpu.com> E-mail: fxb@nwpu.com

陕西向阳印务有限公司印装 各地书店经销

\*

开本:787 mm×960 mm 1/16 印张:41.125 字数:879 千字

2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷 印数:2 000 册

ISBN 978-7-5612-2671-1 定价:72.00 元

# 前 言

本教材主要面向控制科学与工程学科专业以及其他相关学科专业的硕士和博士研究生以及高年级的本科生,系统地讲述了非线性控制系统的基础理论和方法,旨在通过学习,使读者了解和掌握非线性系统的一些基本和主要的分析方法和综合设计方法,了解非线性控制系统理论近年来的新发展,为进一步深入研究和提高提供理论基础。

为实现上述目标,本教材在内容选择上,把重点放在两个方面。一方面,加强基础理论教学,使学生扎实地、系统地学习基本理论,掌握最必要的非线性控制系统的基本概念和理论知识,能灵活地运用主要定理和结论;另一方面,抓设计方法教学,既可掌握系统的设计知识,受到初步工程设计训练,尽快完成从控制理论学习到工程应用的认识过渡,又可增强基础理论教学的目的性,避免学习的盲目性。两方面都不可偏废。两方面的内容配合设置,将显著提高教学质量。

本教材在注重基础理论知识传授的同时,在内容上也注意介绍非线性控制系统在国防领域的技术应用实例,把为国防服务和具有国防科技特色作为重要方面。这是由本教材适用对象的不同所决定的,也决定了本教材在内容取舍和侧重点上与同类教材有较大的不同。通过学习本教材,可接触到很多典型工程应用中的基础模型及其应用实例。这些基础模型和应用实例将有助于研究生撰写论文和进行课题研究,也可供他们在未来工程、科研工作中借鉴。

为保持教材内容的先进性和新颖性,紧跟国际同类教材新水平和时代步伐,反映近年在非线性控制科学研究领域的一些有实用价值的新内容,本教材以国际现流行的教材包括参考文献[1],[4],[6],[9],[10],[11]等作为参照,并力求综合近年有经典意义教材中的基础内容。本教材是以参考文献[1],即Hassan K. K. 撰写的 *Nonlinear Systems* 一书的第3版为主要参照框架编写的。该教材曾获IFAC控制工程教材奖,在国际上有很高评价,其材料很适合用于基本教学。同时,特别是本教材的后半部分,更侧重采用了参考文献[4],[9],[10]和[11]的基础性内容,使材料更加全面、丰富和接近工程实际。可以说,本教材已综合、涵盖和反映了当前国际流行非线性系统最有经典意义教材中的几乎所有基础性内容。顺便指出,对涉及参考文献[1]的内容,本教材已根据由互联网下载的原教材勘误表进行了



全面、仔细的校核和更正。

笔者在编写时,主要遵循了以下原则,这些原则的执行体现了本教材的创造性工作。首先,力求保留原教材相关章节的主体内容。但这绝不是简单地移植和组合,而是在融会贯通的基础上进行全面改写,提取其精华,去除枝节和非基础内容,并补充部分内容,以尽量简练、通畅和较易理解的语言,以切近学生实际学科基础的水平,重新加以表述。其次,为符合国防特色学科专业教材的要求,对内容作了较大的扩充和拆解。再次,从教学实际需要出发,同时为适当缩减篇幅,省略了部分非主要定理的证明,而只注明原证明的出处。实际上,这不会影响本教材的严谨性和完整性。在必要时读者可以很容易地按所指明的出处查到原证明,当然,最好是查原版书或其影印版(电子工业出版社已出版),也可查其译著。应当说,本教材的严谨性和完整性是在以原教材作为补充的条件下得以保证的。最后,本教材重视基本概念的阐释,对概念性定义,一般都后附相关的说明。

本教材在理论、定理、用例等阐述上都努力保持很好的和顺畅的可读性,直接的理由是为更便于理解,同时也为更便于读者自学,因为多数情况下,控制理论的教学更适于在有启发、引导的情况下,以自主、自我钻研的方式进行学习。在此意义上,本教材同时也是最适合的自学教材。为使读者每时每刻都握有主动权,不致盲无头绪和迷失方向,几乎在每个章节都增列了若干个二级标题和三级标题,在定理证明、举例分析中,也增列了多个二级标题,用以指明思路走向,使阅读省时省力,事半功倍。在每个定理和例题的开头还以括弧形式概述定理和例题的意义和用途,读者不必自己去费力归纳,以免浪费时间且可能不得要领。

本教材的公式、符号体系和形式遵照国际控制理论界流行形式。其特点是更强调单变量和多变量,或标量和向量在形式上的统一表达。因此,本教材对标量和向量也不在形式上加以区分,不特别以黑体字表示向量。应当认为,取国际控制理论界流行形式既是国际科学发展不可抗拒的潮流,同时也是努力维护国际科技语言统一的一个组成部分。

本书内容大体上可分为两个部分。第1章至第8章为基础理论部分,或称分析部分;第9章至第15章为设计部分,或称综合部分。这种划分并不严格,实际上分析和设计的内容互有穿插。应特别提请注意的是,因为各章都有较强的独立性,所以一般不必过于拘泥章节前后的自然排列次序,完全可以按学科、专业需要自行选择和组织内容,可以跳跃地只选取部分章节,灵活地进行教学。本教材可适应教材自组织这一要求,使其适应的学科、专业面大大加宽。此外,在各章后附

有习题,可供课后做练习。附录 A 给出了几种常用模型推导,附录 B 提供了部分有关的数学基础知识。本书最后面的索引会为读者检索带来方便。

本书特色和总的客观评价不妨引用两位院士评审专家的部分评语来表述,“该教材内容丰富、新颖,原创性含量大,体系结构合理,系统性好,逻辑性强,很好地体现了国防科技的特色。该教材在理论和定理的阐述上做到了由浅入深,便于读者阅读理解;在习题和举例上具有启发性和实际参考价值。”“该教材是我所见到的非线性控制系统课程教材中最为优秀的教材。”该教材“在科学水平、教学水平以及文字水平等方面质量高,具有国防特色,既反映了当代控制科学前沿,又体现了教育教学发展规律与经验,可读性好,可用性好。”“理论性强,系统地阐述了非线性控制理论方法,学术立论与论证正确;思想观点与方法科学,利于培养创新意识与创新能力”,“整体水平与质量高”。

审稿专家,中国工程院院士、哈尔滨工业大学王子才教授,中国工程院院士、装甲兵工程学院臧克茂教授分别对本书原稿进行了认真的审阅,并给予了高度评价,同时提出了一些很有价值和切实的改进意见,在此表示最由衷的和最深切的谢意。本书的出版自始至终是在工业和信息化部国防科工局领导和“十一五”国防特色学科专业组的有力领导、组织、协调和支持下进行的,谨此表示感谢。西北工业大学出版社雷军同志和何格夫同志为本书策划、编辑做了卓有成效的工作,为本书增色,在此一并致谢。同时也感谢孙玉兰和李效峰为打字和校对所付出的辛劳。

由于编著者的学识所限,写作时间紧迫,难免有差错和不当之处,尚请读者批评指正。

解的存在性和唯一性	79
3.2 解对初始条件和系统参数的连续依赖性	82
3.3 利用灵敏度方程求有参数扰动非线性方程近似解	85
3.4 比较原理	85
3.5 习题	92
第 4 章 Lyapunov 稳定性	94
4.1 自治系统的 Lyapunov 稳定性	94
4.2 LaSalle 不变性原理	107
4.3 线性系统原点稳定性和线性化方法	114
4.4 比较函数	121
4.5 时变系统的 Lyapunov 稳定性	123

编著者

2009年3月

# 目 录

第 1 章 非线性现象和典型非线性系统 .....	1
1.1 非线性模型和非线性现象 .....	1
1.2 典型非线性举例 .....	4
1.3 工程中的典型非线性举例 .....	16
1.4 习题 .....	35
第 2 章 二阶系统 .....	39
2.1 相平面和相图 .....	39
2.2 二阶线性系统的相平面分析 .....	40
2.3 多平衡点举例 .....	52
2.4 非线性系统近平衡点处的性质 .....	54
2.5 极限环 .....	56
2.6 画相图 .....	60
2.7 周期轨道的存在性 .....	61
2.8 分岔 .....	67
2.9 习题 .....	76
第 3 章 微分方程解的基本性质 .....	79
3.1 解的存在性和唯一性 .....	79
3.2 解对初始条件和系统参数的连续依赖性 .....	82
3.3 利用灵敏度方程求有参数摄动非线性方程近似解 .....	85
3.4 比较原理 .....	88
3.5 习题 .....	92
第 4 章 Lyapunov 稳定性 .....	94
4.1 自治系统的 Lyapunov 稳定性 .....	94
4.2 LaSalle 不变性原理 .....	107
4.3 线性系统原点稳定性和线性化方法 .....	114
4.4 比较函数 .....	121
4.5 时变系统的 Lyapunov 稳定性 .....	123

4.6	线性时变系统和非线性时变系统的线性化方法 .....	135
4.7	逆定理——Lyapunov 函数存在条件 .....	138
4.8	有界性和最终有界性 .....	140
4.9	输入-状态稳定性 .....	144
4.10	习题 .....	149
<b>第 5 章</b>	<b>输入-输出稳定性 .....</b>	<b>153</b>
5.1	$\mathcal{L}$ 稳定性 .....	153
5.2	状态模型的 $\mathcal{L}$ 稳定性 .....	159
5.3	$\mathcal{L}_2$ 增益 .....	165
5.4	反馈互联系统和小增益定理 .....	171
5.5	习题 .....	175
<b>第 6 章</b>	<b>无源性 .....</b>	<b>177</b>
6.1	无记忆函数 .....	177
6.2	状态模型表示的动力学系统的无源性 .....	184
6.3	从线性系统的正实性到无源性 .....	187
6.4	以无源性条件表示的 $\mathcal{L}_2$ 稳定性和 Lyapunov 稳定性 .....	194
6.5	分析反馈互联系统 $\mathcal{L}_2$ 稳定性和 Lyapunov 稳定性的无源性方法 .....	198
6.6	反馈互联系统作无源性分析时的回路变换 .....	208
6.7	习题 .....	212
<b>第 7 章</b>	<b>反馈系统的频域分析 .....</b>	<b>215</b>
7.1	Nyquist 判据、复阵奇异值和 $G(s)$ 的扇形变换 .....	215
7.2	绝对稳定性的定义 .....	220
7.3	绝对稳定性的圆判据 .....	221
7.4	绝对稳定性的 Popov 判据 .....	230
7.5	描述函数法 .....	236
7.6	习题 .....	252
<b>第 8 章</b>	<b>受扰系统的稳定性 .....</b>	<b>253</b>
8.1	受扰系统 .....	253
8.2	回零扰动 .....	254
8.3	不回零扰动 .....	261
8.4	时变扰动上界和比较法 .....	264



8.5	任意时间段上估计扰动导致的解偏差 .....	271
8.6	复杂互联系统的稳定性 .....	272
8.7	输入慢变系统 .....	278
8.8	习题 .....	284
<b>第 9 章</b>	<b>非线性控制综述和经典设计方法 .....</b>	<b>287</b>
9.1	非线性控制问题的主要类型 .....	289
9.2	局部线性化法镇定非线性系统 .....	295
9.3	积分控制用于非线性系统 .....	297
9.4	基于线性化方法的积分控制 .....	300
9.5	增益切换 .....	305
9.6	习题 .....	319
<b>第 10 章</b>	<b>微分几何方法和反馈线性化 .....</b>	<b>321</b>
10.1	微分几何基础 .....	321
10.2	非线性系统反馈线性化概念 .....	331
10.3	坐标变换和输入-输出线性化 .....	335
10.4	状态反馈线性化及实例 .....	355
10.5	状态反馈控制 .....	376
10.6	习题 .....	389
<b>第 11 章</b>	<b>滑模变结构控制 .....</b>	<b>392</b>
11.1	滑模控制 .....	392
11.2	滑模鲁棒镇定问题 .....	404
11.3	滑模鲁棒跟踪和调节问题 .....	412
11.4	习题 .....	419
<b>第 12 章</b>	<b>非线性设计工具 .....</b>	<b>422</b>
12.1	Lyapunov 再设计 .....	422
12.2	反步法 .....	436
12.3	基于无源性的控制 .....	451
12.4	可用于非线性系统的高增益鲁棒观测器 .....	462
12.5	习题 .....	480

<b>第 13 章 多入多出系统反馈线性化</b> .....	484
13.1 $m$ 入 $m$ 出系统的相对阶和坐标变换映射 .....	484
13.2 坐标变换为正则形式和准正则形式 .....	489
13.3 $m$ 入 $m$ 出系统的状态反馈 .....	492
13.4 全状态反馈线性化问题可解的充要条件 .....	494
13.5 相对阶 $\rho=n$ 系统的全状态反馈线性化 .....	501
13.6 相对阶 $\rho<n$ 系统的输入-输出线性化 .....	506
13.7 $m$ 入 $m$ 出系统的解耦 .....	508
13.8 一些工程用例 .....	510
13.9 习题 .....	529
<b>第 14 章 动态反馈与相对阶</b> .....	531
14.1 动态反馈控制 .....	531
14.2 动态扩充算法 .....	534
14.3 动态扩充的阶段分解定理 .....	537
14.4 动态扩充算法举例——飞行器控制 .....	539
14.5 动态扩充算法举例——多连杆机械手 .....	554
<b>第 15 章 鲁棒反馈线性化和自适应反馈线性化</b> .....	565
15.1 自适应控制设计工具 .....	565
15.2 受扰系统的等价系统 .....	571
15.3 受扰系统的静态状态反馈鲁棒镇定 .....	579
15.4 用自校正调节器的自适应反馈线性化 .....	586
15.5 用参考模型的自适应反馈线性化 .....	593
15.6 向多输入系统的推广 .....	604
15.7 工程应用举例 .....	605
15.8 习题 .....	615
<b>附录 A 工程常用模型推导</b> .....	617
A.1 感应电动机 .....	617
A.2 两连杆机械手 .....	619
A.3 同步发电机 .....	623

附录 B 数学基础 .....	629
B.1 向量和矩阵的范数 .....	629
B.2 基本的集合概念 .....	631
B.3 Lipschitz 条件 .....	632
B.4 斜对称阵 .....	636
参考文献 .....	638
索引 .....	641

## 1.1 非线性模型和非线性现象

### 1.1.1 非线性系统模型

#### 1. 一般形式

非线性系统,作为一个动力学系统,其模型通常可用几个相互有耦合关系的一阶常微分方程来描述,可表示为

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$$

其中  $x_1, \dots, x_n$  —— 状态变量,表示动力学系统对其过去状态的记忆;

$u_1, \dots, u_p$  —— 输入变量。

为便于式(1.1)的非线性系统模型常写成向量形式,即令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

于是将式(1.1)的一阶常微分方程写成一个  $n$  维一阶向量微分方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.2)$$

其中  $\mathbf{x}$  是  $n$  维输出变量,  $t=0, \dots, T$  和对应的输出函数,  $\mathbf{u}$  是  $p$  维输入变量。

# 第 1 章 非线性现象和典型非线性系统

分析和设计非线性系统离不开非线性分析和设计工具,本书将介绍这些工具。本章作为全书第一章和全书绪论,将从建立非线性系统的一些基本概念讲起。1.1 节介绍一般非线性模型和一些本质上属于非线性的现象。1.2 节具体介绍几种一般性的典型非线性,为每种典型非线性建立数学模型,后续各章在举例时将常常会以它们为例。1.3 节转而介绍在工程中常见的一些典型非线性,将给出多种实用模型和介绍模型推导过程。对其中几种推导较为复杂的模型,为免冗长,其部分推导被放在本书后面的附录 A 中,用到时请查阅。初学者如觉得 1.3 节读起来有些费力,也可先跳过 1.3 节,直接进入下一章的学习。

## 1.1 非线性模型和非线性现象

### 一、非线性系统模型

#### 1. 一般形式

非线性系统,作为一个动力学系统,其模型常可用几个相互有耦合关系的一阶常微分方程来描述,可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned}$$

式中  $x_i, i=1, \dots, n$  —— 状态变量,表示动力学系统对其过去状态的记忆;

$u_j, j=1, \dots, p$  —— 输入变量。

为使形式紧凑,非线性系统模型常写成向量形式,即令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

于是可把  $n$  个一阶微分方程写成一个  $n$  维一阶向量微分方程

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.1)$$

有时还定义  $q$  个输出变量  $y_k, k=1, \dots, q$  和对应的输出函数



$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ y_q &= h_q(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned}$$

如令

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(t, x, u) \\ \vdots \\ h_q(t, x, u) \end{bmatrix}$$

则  $q$  个输出函数可写成一个向量函数

$$y = h(t, x, u) \quad (1.2)$$

式(1.1)称为状态方程,  $x$  称为状态,  $u$  称为输入。式(1.2)称为输出方程,  $y$  称为输出。式(1.1)和式(1.2)一起称为状态空间模型(state-space model), 或简称状态模型(state model)。

常微分方程与偏微分方程相对应, 常微分方程右端可表示为唯一自变量的函数。在式(1.1)和式(1.2)中,  $x, u, y$  都是时间  $t$  的函数。

## 2. 其他形式

(1)  $u$  不出现的形式。

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.3)$$

称为非强迫状态方程(unforced state equation)。注意这不一定说明输入为零, 可能是以下情况导致的: ①  $u$  是已知的时间函数  $u = u(t)$ ; ②  $u$  是已知的状态反馈函数  $u = u(x)$ ; ③  $u$  是已知函数  $u = u(t, x)$ 。三种情况都可能导致式(1.1)不出现  $u$ 。

(2)  $t$  不出现的形式。

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{或} \quad \dot{x} = f(x, u) \quad (1.4)$$

称为自治的(autonomous)或时不变的(time invariant), 否则称为非自治的(nonautonomous)或时变的(time varying)。自治的或时不变系统的一个性质是在做变量代换  $t \rightarrow \tau = t - a$  时

$$f(t) = f(\tau + a) = f(\tau)$$

右端函数形式不发生改变。

## 3. 平衡点

**定义 1.1** 由  $x = x^*$  出发, 如果在后续时间里一直保持在  $x^*$ , 则称  $x^*$  为平衡点(equilibrium point)。

按定义, 对非线性系统  $\dot{x} = f(x)$  来说, 满足  $f(x) = 0$  的实根是平衡点。对线性系统  $\dot{x} = Ax$  来说,  $Ax = 0$  的实根是平衡点。要注意, 这不说明原点一定是平衡点, 也不说明平衡点只是一

点,倒很可能是一个连续的平衡点集。例如

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

满足  $x_2 = 0$  的所有点都是平衡点,构成平衡点集。

## 二、非线性现象

分析线性系统有多种工具可用,比如分析状态模型式(1.1)、式(1.2)的一般时变形式线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

可用的有力工具之一是叠加原理。可是对分析非线性系统来说,这些工具大多不再能用,比如叠加原理就不再能用,因此必须为分析非线性系统寻求更适当的工具。

因为我们对分析线性系统的工具十分熟悉,所以作为开辟非线性系统研究方法的第一步,如果可能,可以采用线性化研究方法。也就是在某工作点附近,作 Taylor 级数展开以后,分析线性模型。这是工程上常用的一种方法。但是,只靠局部线性化方法是远不够的,因为它受到两种基本限制:其一是在工作点附近的线性化是近似的,不能推算全局行为;其二是线性化以后会丢掉一些本质上的非线性现象,使分析背离客观真实。实际上,包罗万象和丰富多彩的非线性世界,其中还包含一些“本质非线性”,这些非线性从根本上说就不可能用线性模型描述和预测,只有在非线性条件下才能发生。下面就是一些有本质非线性的现象和例子。

### 1. 有限逃逸时间 (finite escape time)

线性系统发散时其状态趋于无穷势必要花费无穷多的时间,然而一个非线性系统的状态趋于无穷却可能只花费有限的时间。

### 2. 多个孤立平衡点 (multiple isolated equilibria)

线性系统可能有孤立平衡点和连续集平衡点,但不能有多个孤立平衡点。只有非线性系统可有多个孤立平衡点。当系统只有一个孤立平衡点时,有唯一的稳态工作点,不论初始状态如何都趋于同一稳定点。当系统有多个孤立平衡点时,到底收敛到哪个平衡点则与初始状态有关。

### 3. 极限环 (limit cycle)

在理论上,线性系统在虚轴上有一对特征根时会发生振荡,但不可能是一个稳定的振荡。一旦受到一微小的扰动,就会失去稳定性。即使线性系统不受扰,能保持稳定,其振幅也与初始状态有关。所以用线性系统不可能构成实用的振荡器。现实中的振荡器必须靠非线性系统

构成。非线性系统能产生幅值、频率固定的振荡,振幅与初始状态无关,此种振荡称为极限环。

#### 4. 分数谐波、倍数谐波和准周期振荡(subharmonic, harmonic, or almost-periodic oscillations)

线性系统接受单一频率周期输入只能产生同频输出。因此线性系统不能用于变频。而非线性系统可变频,可产生分数谐波或倍数谐波,甚至产生准周期振荡。后者是指频率相互没有倍数关系的一些周期振荡所合成的近似周期振荡。

#### 5. 混沌(chaos)

混沌是一种非线性系统特有的复杂稳态行为,其特点是无平衡点,无周期性,既不是周期振荡,也不是准周期振荡,而是一个貌似随机的、实际为确定的无休止的演化过程。混沌是有界的,运动轨迹始终局限于一确定区域,称为混沌吸引域。因为无论混沌在局部上是多么不稳定,其轨迹都不会走出混沌吸引域,所以,从总体上说混沌是稳定的。混沌在其吸引域内是各态历经的,有遍历性,即混沌轨道可在有限的时间内多次经过混沌区内每一个状态点。混沌对初值有敏感性,不论距离多么近的相邻轨道都会逐渐分离,渐行渐远。混沌对初值有敏感性造成了其内随机性。一个可以用微分方程表示的混沌系统,在无外扰的情况下本来是可以预测的运动状态却表现为随机性,即有长期的不可预测性。混沌在大尺度上表现为无序状态,但在小尺度上却表现为无序中的有序,可在小尺度的混沌区内看到其有序的运动花样。混沌的性质是源于混沌吸引子的特殊结构。因为混沌吸引子的有界性决定轨道不能运动到无穷远处,轨道又不能相交,所以显然只能靠在一有限区域内由反复折叠结构来达到。

#### 6. 特性的多模式(multiple modes of behavior)

同一非线性系统可表现出两种甚至多种模式是很平常的。比如一个非强迫系统有不止一个极限环;一个有周期性输入的非线性系统,随输入的大小和频率改变,可能表现出时而倍频、时而分频或更复杂的稳态行为,甚至行为模式发生不连续的跳变。

因篇幅所限,本书只讨论前三种现象,其他内容请参阅有关文献。

## 1.2 典型非线性举例

### 一、摆方程

#### 1. 无转矩控制的摆(pendulum)

考虑固定于无质量杆末端的小球的运动(见图 1.1)。由牛顿第二定律,摆在切向的力平

衡关系为

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin\theta$$

再考虑摩擦力, 设摩擦力正比于摆切向速度, 即

$$F_f = -kl\dot{\theta}$$

式中  $l$ ——摆长;

$k$ ——摩擦系数。

得摆切向运动方程

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin\theta - kl\dot{\theta}$$

取状态变量  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ , 得到状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(1.5)

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

(1.6)

求平衡点, 取  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ , 得

$$0 = x_2$$

$$0 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

物理上, 摆有两个平衡位置:  $(0, 0)$  和  $(\pi, 0)$ 。忽略摩擦时,  $k=0$ , 得到摆幅不衰减的系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(1.7)

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1$$

(1.8)

## 2. 有转矩控制的摆

有转矩控制输入  $T$  的摆, 具有形式

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(1.9)

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T$$

(1.10)

## 二、隧道二极管电路

考虑隧道二极管电路。隧道二极管特性  $i_R = h(v_R)$  如图 1.2 所示。电路各器件的方程为

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_R = h(v_R)$$

节点电流方程为

$$i_C + i_R - i_L = 0$$

回路方程为

$$v_C = v_R, \quad E = Ri_L + v_L + v_C$$

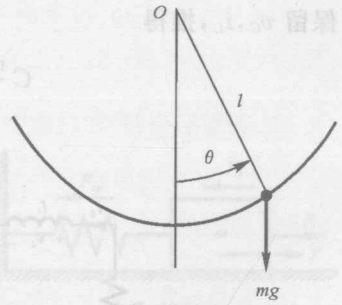


图 1.1 摆



保留  $v_C, i_L$ , 推得

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L - i_R = i_L - h(v_R) = i_L - h(v_C)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_C - Ri_L + E$$

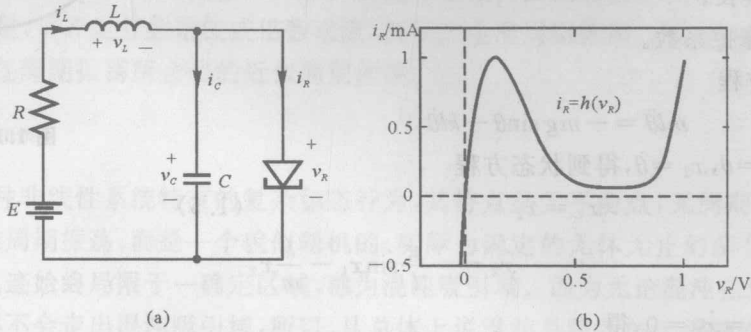


图 1.2 隧道二极管电路及其伏安特性

如取  $x_1 = v_C, x_2 = i_L, u = E$ , 则得状态方程

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2] \quad (1.11)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u] \quad (1.12)$$

求平衡点, 取  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ , 得

$$0 = -h(x_1) + x_2$$

$$0 = -x_1 - Rx_2 + u$$

得平衡关系(见图 1.3)

$$h(x_1) = \frac{u}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

对给定  $u, R$  值, 有 3 个平衡点。但随  $u, R$  值的改变, 图中直线移动, 有可能只剩下  $Q_1$  或  $Q_3$ 。

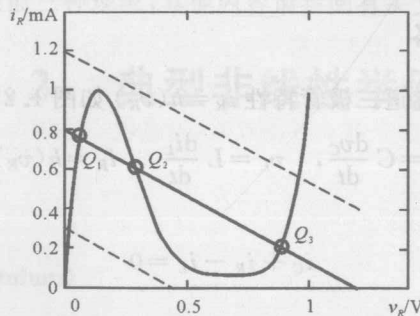


图 1.3 隧道二极管电路的平衡点