数学分析

题解

（下册）

泰安师专数学系主编

前　　言

这本《习题解答》是泰安、临沂、济宁、昌潍、青岛、台、枣庄、荷泽、聊城、德州、淄博等师范专科学校和昌教师进修学院所编写的《数学分析》上、中、下三册的习解答，在解答过程中，叙述比较详细，可供使用《数学分》者参考，也可供中等学校的数学教师参考。本《习题解》分上、下两册装订。

参加《习题解答》下册编演、绘图、审稿工作的有泰安师范专科学校王成新、刘宅城同志，参加编演工作的还有济宁师范专科学校侯宪章等同志。由于我们水平有限，书中错误和不妥之处定然不少，请读者批评指正。

——编 演 者

一九八一年九月

目　　录

第四篇　无穷级数

第五篇　多元函数微积分、广义积分与含参变量积分

第四篇　无穷级数

第八章　数项级数

习　题　一

1　根据级数收敛、发散的定义，判断下列级数哪些收敛？哪些发散？如果收敛，和等于多少？

（1）　$1-1+1-1+1-1+\cdots$

（2）　$\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$

（3）　$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots$

$$+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

（4）　$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$

（5）　$1+\ln 3+\ln^2 3+\cdots+\ln^{n-1}3+\cdots$

解　（1）　因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 的前n项部分和

$$s_n=\begin{cases}0, & \text{当}n\text{为偶数},\\ 1, & \text{当}n\text{为奇数},\end{cases}$$

所以S_n不存在极限，即此级数发散。

(2) $\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$

由 $s_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$

$=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$

$=\ln(n+1)$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$，所以此级数发散。

(3) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots$

$+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$

由 $s_n=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots$

$+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$,

所以此级数收敛，且和$s=\frac{1}{5}$

(4) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$

因为 $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right| = \frac{3}{2}$,

所以此级数收敛，且和 $s = \frac{3}{2}$

（5） $1 + \ln 3 + \ln^2 3 + \cdots + \ln^{n-1} 3 + \cdots$

因为 $s_n = 1 + \ln 3 + \ln^2 3 + \cdots + \ln^{n-1} 3$

$$= \frac{1 - (\ln 3)^n}{1 - \ln 3}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - (\ln 3)^n}{1 - \ln 3} = \infty$,所以此级数发散。

2 求下列级数的和

（1） $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots$

（2） $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$

（3） $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$

解 （1） 因为

$$s_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

所以$s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right]=\frac{3}{2}$

（2） 因为

设$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$，从而

$$1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

由此可得$A=\frac{1}{2}$，$B=-1$，$C=\frac{1}{2}$，所以

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$$

于是

$$s_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2K}-\frac{1}{K+1}+\frac{1}{2K(+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{K}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{K+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{K+2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{K}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{K+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{K+2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

所以

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}$$

（3） 因为 $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$，则

$$s_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K-2}-\frac{1}{3K+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

所以

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

3 研究下列级数的敛、散性：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ （2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$

（3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$

（4） $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$

解 （1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

因为$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$，当$n=2K$时，则

$$\lim_{K\to\infty} u_{2k}=\lim_{K\to\infty}\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt[2k]{2K}}=1$$

当 $n=2K+1$ 时，则

$$\lim_{K\to\infty} u_{2k+4}=\lim_{K\to\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{\sqrt[2k+1]{2K+1}}=-1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$$

根据定理 1，故所给级数发散。

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$

解 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

由级数收敛的柯西准则知：对于任给定的$\varepsilon>0$，总存在自然数N，当$n>N$时，对任意自然数p，则有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{2^k}\right|<\varepsilon.$$

但

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos K}{2^k}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\cos K}{2^k}\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{2^k}<\varepsilon.$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$收敛。

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$

解 因为 $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{K(K+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{K+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛。由级数收敛的柯西准则知：对于

任给定的$\varepsilon>0$，总有自然数N，当 $n>N$时，对任意自然数p，则有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{K(K+1)}\right|<\varepsilon .$$

但

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin K}{K(K+1)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\sin K}{K(K+1)}\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{K(K+1)}<\varepsilon。$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$收敛。

（4） $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$

解 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

则

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{3K-2}+\frac{1}{3K-1}-\frac{1}{3K}\right)>$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{3K}-\frac{1}{3K}\right)=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{3K}=\frac{1}{3}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}$$

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，所以对于任给定的$\varepsilon>0$，则不论$N$取得如何大，当$n>N$时，对于任意自然数$p$，

有$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{K}>3\varepsilon$，即有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{3K-2}+\frac{1}{3K-1}-\frac{1}{3K}\right)>\varepsilon$$

根据级数收敛的柯西准则，所以所给级数不收敛。

习　题　二

1　运用比较、比值、根值和积分判别法，研究下列级数的敛、散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}(r>0)$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n}$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ (12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ (14) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

因为对所有的 n，$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$。已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散，由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

因为 $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(n=1,2,\cdots)$，已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left(P=\frac{3}{2}>1\right)$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ 收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$

因为当 n 足够大时，$\left|\sin\frac{\pi}{2^n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2^n}$，已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}(r>0)$

分两种情况来讨论：

1° 当$0<r\leqslant1$时，则$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{1+r^n}\neq0$，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}(0<r\leqslant1)$发散；

2° 当$r>1$时，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+r^{n+1}}}{\frac{1}{1+r^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n}{1+r^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}+1}{\frac{1}{r^n}+r}=\frac{1}{r}<1,$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}(r>1)$收敛。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

由$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$收敛。

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$$\text{由}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=e>1$$

可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$发散。

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

$$\text{由}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim\frac{2n^n}{(n+1)^n}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$=\frac{2}{e}<1$$

可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛。

·(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

由 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1$$

可知级数$\sum_{n=1}\frac{3^n n!}{n^n}$发散。

(9) $\sum_{n=1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

由 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}<1$$

可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$收敛。