21世纪高等学校研究生教材

第八届全国优秀科技图书一等奖

数学学科硕士研究生系列教材　（第3版）

随机过程通论

SUIJI GUOCHENG TONGLUN

北京师范大学数学科学学院　组　编　（下卷）

王梓坤　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高等学校研究

第八届全国优秀科技图书一等奖

数学学科硕士研究生系列教材　（第3版）

随机过程通论

SUIJI GUOCHENG TONGLUN

北京师范大学数学科学学院　组　编　（下卷）

王梓坤　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机过程通论（第3版）（下卷）／王梓坤著.—北京：北京师范大学出版社，2010.2重印
（21世纪高等学校研究生教材）
ISBN 978-7-303-03631-8

Ⅰ.随… Ⅱ.王… Ⅲ.随机过程－概论 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(1996)第01744号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京联兴盛业印刷股份有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：21.25
字　　数：359千字
版　　次：2010年2月第3版
印　　次：2010年2月第1次印刷
定　　价：32.00元

策划编辑：岳昌庆　王松浦　　责任编辑：岳昌庆　刘　平
美术编辑：高　霞　　装帧设计：高　霞
责任校对：李　菡　　责任印制：李　丽

第 3 版前言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据．纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1953 年至 1960 年是我院研究生教育初创时期，招生为代数、分析、几何等方向的 10 个研究生班；1962 年至 1965 年改为招收少量的硕士研究生；1966 年至 1976 年“文化大革命”时期，研究生停止招生．1978 年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课．每年导师根据招生情况，分别制订每个研究生的培养计划．从 1982 年开始，首次开展制定攻读硕士学位研究生培养方案的工作．为拓宽研究生的知识面，对每届研究生开设 5 门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选 3 门；从 1983 年起，增加代数拓扑，共 6 门基础理论课，安排有经验的教师讲课且相对固定，考试要求严格，使研究生受到正规的训练．由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距，经过这个阶段的学习后，基本上达到了一个相同的水平，为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障．1992 学年起，改为开设 8 门基础课，增加概率论基础和计

算机基础. 从1997学年开始，规定研究生每人至少选4门. 从2000学年起，改为开设12门基础课，增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程. 从2007学年起，去掉计算机基础，改为开设15门基础课，增加高等统计学、最优化理论与算法、非线性泛函分析、动力系统基础，规定研究生每人至少选5门. 经过30多年系统的研究生培养工作，研究生教育正在逐步走向正规. 在此期间，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的.

随着研究生的扩招，招收研究生的数量越来越大，再加上培养方案的改革，出版研究生系列教材已经提到议事日程上来. 在20世纪90年代，北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材：《泛函分析》《实分析》《随机过程通论》等，但未系统策划出版系列教材. 2005年5月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，由我院组编（李仲来负责），准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后出版第2版或第3版，进一步再用几年时间，出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材.

教材的建设是长期的、艰苦的任务，每一位教师在教学中要自主地开发教学资源，创造性地编写和使用教材. 学院建议：在安排教学时，应考虑同一教师在3年至5年里能够稳定地上同一门课，并参与到教材的编写或修订工作中去. 在学院从事教学的大多数教师，应该在一生的教学生涯中至少以自己为主，编写或修订一种本科生或研究生教材作为己任，并注意适时地修订或更新教材. 我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论（数学）等硕士研究生使用和参考.（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

2009年4月20日

第 2 版下卷作者的话

本卷的目的在于叙述布朗运动与位势、生灭过程与马尔可夫链（Birth-death Processes and Markov Chains）的基本理论，并介绍近年来的一些研究进展．所谓马尔可夫链是指时间连续、状态可列、时齐的马尔可夫过程．这种链之所以重要，一是由于它的理论比较完整深入，可以作为一般马尔可夫过程及其他随机过程的借鉴，二是它在自然科学和许多实际问题（例如物理、生物、化学、规划论、排队论等）中有着越来越多的应用．

生灭过程是一种特殊的马尔可夫链，虽然有关的资料已相当丰富，但迄今国内外似乎还没有一本系统的专著来阐述它们．一些著名的学者如 D. G. Kendall，G. E. H. Reuter，W. Feller，特别是 S. Karlin，J. McGregor 等人，在这方面做过许多深入而重要的研究，他们用的大都是分析数学的方法，作者深愧未能遍尝百味之鲜．我们用的主要是概率方法，即从考察运动的轨道出发，提取直观形象，然后辅以数学计算和测度论的严格证明．此法的优点是概率意义比较清楚，但可能失之于冗长．

现代概率论的重要进展之一是发现了马尔可夫过程（简称马氏过程）与位势理论（简称势论）之间的深刻联系．这一发现使势论中许多概念和结论获得了明确的概率意义，同时也使马氏过程有了新的分析工具，因而两者相互促进，丰富了彼此的内容．本书试图通过比较简单的马氏过程，即布朗运动，以及与它相对应的古典位势（牛顿位势与对数位势），来对一

般理论作一前导.

第 11，12 章讨论布朗运动与古典位势，第 13，14 章讨论马尔可夫链的分析性质与轨道行为，第 15 章讲一些专题，第 16，17 章讲生灭过程. 这后三章基本上是国内近年来的一些研究成果. 详见下卷关于各节内容的历史的注.

第 11 章与第 12 章（布朗运动与牛顿位势）承科学出版社于 1983 年出版单行本；后五章（生灭过程与马尔可夫链）也曾由科学出版社于 1980 年出版. 后由作者与杨向群教授合作，扩充了内容，由 Springer-Verlag 与 Science Press 出版了英文本，书名仍为《Birth and Death Processes and Markov Chains》，1992.

超过程是当今国际概率界关注的一个新的发展方向. 附录 2 是关于超过程的一篇综合报告，它是钱敏平教授建议作者写作的.

作者衷心感谢吴荣、杨向群、刘文、杨振明、钱敏平等教授，他们仔细阅读了底稿并提出了许多改进意见.

1995 年 8 月 15 日

目 录

下卷 布朗运动、生灭过程与马尔可夫链

第 11 章 高维布朗运动与牛顿位势/2

§11.1 势论大意 /3

§11.2 布朗运动略述 /7

§11.3 首中时与首中点 /14

§11.4 调和函数 /21

§11.5 Dirichlet 问题 /26

§11.6 禁止概率与常返集 /31

§11.7 测度的势与 Balayage 问题 /36

§11.8 平衡测度 /40

§11.9 容度 /46

§11.10 暂留集的平衡测度 /49

§11.11 极集 /53

§11.12 末遇分布 /57

§11.13 格林（Green）函数 /64

第 12 章 二维布朗运动与对数位势/69

§ 12. 1 对数位势的基本公式 /71

§ 12. 2 平面 Green 函数 /77

§ 12. 3 对数势 /79

§ 12. 4 平面上的容度 /82

§ 12. 5 补充 /87

参考文献 /88

第 13 章 马尔可夫链的解析理论/91

§ 13. 1 可测转移矩阵的一般性质 /93

§ 13. 2 标准转移矩阵的可微性 /104

§ 13. 3 向前与向后微分方程组 /118

第 14 章 样本函数的性质/129

§ 14. 1 常值集与常值区间 /131

§ 14. 2 右下半连续性；典范链 /136

§ 14. 3 强马尔可夫性 /141

第 15 章 马尔可夫链中的几个问题/151

§ 15. 1 0-1 律 /153

§ 15. 2 常返性与过份函数 /160

§ 15. 3 积分型随机泛函的分布 /166

§ 15. 4 嵌入问题 /176

第 16 章　生灭过程的基本理论/183

§16. 1　数字特征的概率意义 /185

§16. 2　向上的积分型随机泛函 /192

§16. 3　最初到达时间与逗留时间 /204

§16. 4　向下的积分型随机泛函 /212

§16. 5　几类 Колмогоров 方程的解与平稳分布 /219

§16. 6　生灭过程的若干应用 /229

第 17 章　生灭过程的构造理论/233

§17. 1　Doob 过程的变换 /235

§17. 2　连续流入不可能的充要条件 /242

§17. 3　一般 Q 过程变换为 Doob 过程 /245

§17. 4　$S<\infty$时 Q 过程的构造 /249

§17. 5　特征数列与生灭过程的分类 /258

§17. 6　基本定理 /267

§17. 7　$S=\infty$时 Q 过程的另一种构造 /270

§17. 8　遍历性与 0-1 律 /273

附录/277

附录 1　时间离散的马尔可夫链的过份函数 /279

§1　势与过份函数 /279

§2　过份函数的极限定理 /287

附录 2　超过程的若干新进展/298

§1　引言 /298

§2 超过程的定义 /298

§3 直观意义 /300

§4 超过程的存在与性质 /301

§5 矩问题 /302

§6 超过程的变换 /303

§7 超对称稳定过程的支集 /304

§8 超布朗运动的支集 /305

§9 击中概率、k-重点与极集 /307

§10 非线性偏微分方程解的概率表示 /308

§11 弱极集与可去奇点 /309

§12 极限定理 /310

结束语 /312

参考文献 /312

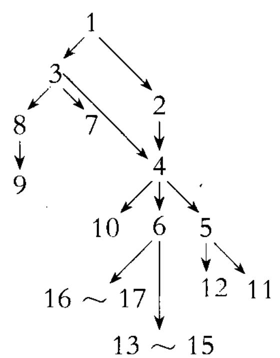
下卷各节内容的历史的注 /315

关于生灭过程与马尔可夫链的参考文献 /318

新参考书目/324

下卷名词索引/327

各章间关系图



下 卷

布朗运动、生灭过程与马尔可夫链

第 11 章

高维布朗运动与牛顿位势

现代概率论的重要进展之一是发现了马尔可夫过程与位势理论(简称势论)之间的深刻联系. 这一发现使势论中许多概念和结论获得了明确的概率意义,同时也使马氏过程有了新的分析工具,因而两者相互促进,丰富了彼此的内容. 这种联系的萌芽初见于 S. Kakutani[13]及 J. L. Doob[7]①,前者证明了:平面上 Dirichlet 问题的解可以通过二维布朗运动的某些概率特征来表达. Doob 等人的大量工作发展了这方面的研究;而把这种联系推广到相当一般的马氏过程,则主要是 G. A. Hunt 的贡献. 近年来这方面的文献很多,但由于理论日益抽象化而使初学者不易了解它们的背景和实质.

本章及下章试图通过比较简单的马氏过程,即布朗运动,以及与它相对应的古典位势(牛顿位势与对数位势),来对一般理论作一前导. 布朗运动与古典位势不仅比较简单,而且是一般理论的思想泉源,因此,这样也许有助于对后者的理解. 由于布朗运动与古典位势的内容都很丰富,我们不可能深入到各自的专题领域中去,而只能把重点放在二者的联系上,同时也叙述一些近期发表的新结果. 这种联系反映在 Dirichlet 问题的解、平衡势、Green 函数等问题上.

除少数结果只指出参考文献外,书中所述的定理基本上都给出了详细的证明.

随着布朗运动所在的相空间 $\mathbf{R}^n$(n 维欧氏空间)的维数 n 不同,概率性质也有显著差异. 以后会看到,当 $n\leqslant 2$ 时,布朗运动是常返的,对应于对数位势;当$n\geqslant 3$时,它是暂留的,对应于牛顿位势.

---

① 第 11 章、第 12 章所引文献见第 12 章后.

§11.1 势论大意

(一)势论的物理背景 古典势论起源于物理,后来抽象成为数学的一分支.根据电学中的库仑定律,两个异性电荷互相吸引,引力方向在其连线上,力的大小为

$$F=c\cdot\frac{Qq}{r^2},$$

其中 Q 与 q 分别为二电荷的数量,r 为二者在 R^3 中的距离,c 为某常数,与单位有关.为了研究引力,最好引进势的概念.设在 x_0 处有一电荷 q_0,它在任一点 $x(x\neq x_0)$处所产生的势,等于把一单位电荷从无穷远移到点 x 处所作的功.势与此电荷在到达 x 以前所走的路径无关.势的值为

$$\frac{1}{2\pi}\frac{q_0}{|x-x_0|}\tag{1}$$

常数 $1/2\pi$ 依赖于单位的选择,并非本质.

今设有 m 个电荷 q_i,分别位于点 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$,可视

$$\begin{pmatrix}x_1,x_2,\cdots,x_m\\ q_1,q_2,\cdots,q_m\end{pmatrix}\tag{2}$$

为一离散的电荷分布.这组电荷在点 $x(x\neq x_i)$处所产生的势仍定义为把单位电荷自无穷远处移到 x 所作的功.由于力和功都是可加的,故此势为

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i}{|x-x_i|}.\tag{3}$$

现在假设电荷按照测度 μ 分布.由上式的启发,自然称由 μ 所产生的在 x 点的势为

$$G\mu(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\mu(\mathrm{d}y)}{|x-y|}.\tag{4}$$

以后会证明,如 $\mu(\mathbf{R}^3)<\infty$,则关于勒贝格测度 L,对几乎一切 x,$G\mu(x)<\infty$(见引理 3).

(4)式定义一积分变换 G,它把测度 μ 变为函数 $G\mu$.下面会看到,变换的核 $1/2\pi|x-y|$ 恰好等于三维布朗运动转移密度对时间 t 的积分.这正是把布朗运动与牛顿位势联系起来的桥梁之一.

在物理中,势论所研究的,主要是电荷分布 μ、势以及借助于它们而定义的各种量间的关系.作为这种量的例,可举出电荷分布 μ 的能 I_μ(energy),它是势对此 μ 的积分,即

$$I_\mu \equiv \int_{\mathbf{R}^3} G\mu(x)\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mu(\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}x)}{|x-y|} \tag{5}$$

电荷分布的全电荷是 $Q\equiv\mu(\mathbf{R}^3)$. 如果把全部电荷 Q 散布在某导体上,它们便会重新分布,使得在此导体所占的集 A 上,势是一常数. 记此新分布为 μ_0,它具有下列能的极小性:

$$I_{\mu_0}=\min_\mu(I_\mu:\mu(\mathbf{R}^3)=Q,\mathrm{supp}\ \mu\subset A),$$

其中 supp μ 表 μ 的支集(support),它是一切使 $\mu(U)=0$ 的开集 U 的和的补集. μ_0 所决定的分布形态,在物理中称为平衡态. 对紧集 $E(\subset\mathbf{R}^3)$,如存在 μ 使supp $\mu\subset E$,而且 $G\mu(x)=1,(\forall x\in E)$,则称 $G\mu$ 为 E 的平衡势;具有平衡势的集称为平衡集;而 $\mu(E)$则称为 E 的容度,记为 $C(E)$. 因此,导体 E 的容度,是为了在此导体上产生单位势的全电荷. 以上诸概念来自物理,以后还要从数学上重新定义. 下面简述古典势论中的一些结果,其中有些以后会用概率方法加以证明. 下设 μ 为有穷测度.

电荷分布的唯一性:势 $G\mu$ 唯一决定 μ.

势的决定:$G\mu$ 被它在 supp μ 上的值所决定.

平衡势唯一:一集最多有一平衡势.

平衡势的刻画:设平衡集 E 的平衡势为 $G\mu_0$,则

$$G\mu_0(x)=\inf(G\mu(x):G\mu(x)\geqslant 1,\forall x\in E). \tag{6}$$

平衡势的能:如平衡集 E 的能有穷,则在所有支集含于 E、全电荷等于 E 的容度的电荷分布 μ 所对应的势中,平衡势 $G\mu_0$ 的能 $I\mu_0$ 极小;即

$$I\mu_0 \equiv \int_{\mathbf{R}^3}(G\mu_0)\mathrm{d}\mu_0 = \min_{G_\mu}\Big(\int_{\mathbf{R}^3}(G\mu)\mathrm{d}\mu:\mathrm{supp}\ \mu\subset E,\mu(E)=C(E)\Big). \tag{7}$$

控制原理　对于二势 $h=G\mu,\bar{h}=G\bar{\mu}$,如处处有 $h\geqslant\bar{h}$,则 $\mu(\mathbf{R}^3)\geqslant\bar{\mu}(\mathbf{R}^3)$.

投影(Balayage)原理　设已给势 $h=G\mu$ 及闭集 E,则存在势 $\bar{h}=G\bar{\mu}$,满足

$$\bar{h}(x)=h(x),(\forall x\in E);\bar{h}(x)\leqslant h(x),(\forall x\in\mathbf{R}^3); \tag{8}$$

$$\mathrm{supp}\ \bar{u}\subset E;\bar{\mu}(\mathbf{R}^3)\leqslant\mu(\mathbf{R}^3). \tag{9}$$

此外,还满足:$\forall x$

$$\bar{h}(x)=\inf_v(Gv(x):Gv(x)\geqslant h(x),\forall x\in E;\mathrm{supp}\ v\subset E) \tag{10}$$

$$=\sup_v(Gv(x):Gv(x)\leqslant h(x),\forall x\in E;\mathrm{supp}\ v\subset E). \tag{11}$$

称 $\bar{h}$ 为 h 的投影势(Balayage potential).

下包络原理　诸势的逐点下确界也是势.

(二)若干引理　考虑 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$,其中的点记为 $x=(x_1,x_2,\cdots,$

x_n)，它与原点的距离为$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. 对 $r>0$，记

$$B_r \equiv (x:|x| \leqslant r);\ \mathring{B}_r \equiv (x:|x|<r);$$
$$S_r \equiv (x:|x|=r).$$

它们分别是以原点为中心、r 为半径的球，开球和球面.

引理 1 设 $f(y)$为一元函数，$y \geqslant 0$，如下式左方积分存在，则

$$\int_{B_r} f(|x|)\mathrm{d}x = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^r s^{n-1} f(x)\mathrm{d}s. \tag{12}$$

其中 Γ 表 Gamma 函数.

证 为计算

$$\int_{B_r} f(|x|)\mathrm{d}x = \underset{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2}{\int \cdots \int} f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

引进极坐标

$$x_1 = s\cos\varphi_1,\ x_2 = s\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ \cdots,$$
$$x_n = s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$
$$\int_{B_r} f(|x|)\mathrm{d}x = \int_0^r s^{n-1} f(s)\mathrm{d}s \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 \cdot \cdots \cdot$$
$$\int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3} \cdot \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_{n-1}.$$

利用公式

$$\int_0^\pi \sin^{a-1}\varphi \mathrm{d}\varphi = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right),$$

化简后即得(12). □

在(12)中取 $f=1$，并利用公式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{13}$$

即得球 B_r 的体积$|B_r|$为

$$|B_r| = \pi^{n/2} r^n / \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right). \tag{14}$$

对 r 微分，得球面 S_r 的面积$|S_r|$为

$$|S_r| = 2\pi^{n/2} r^{n-1} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \tag{15}$$

球面 S_r 上的勒贝格测度记为 $L_{n-1}(\mathrm{d}x)$. 以 $U_r(\mathrm{d}x)$表 S_r 上的均匀分布，即

$$U_r(\mathrm{d}x)=L_{n-1}(\mathrm{d}x)/|S_r|. \tag{16}$$

□

系　设函数 $K(x)(x\in\mathbf{R}^n)$ 的积分有意义，则

$$\int_{\mathbf{R}^n}K(x)\mathrm{d}x=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\infty\left[\int_{S_r}K(x)U_r(\mathrm{d}x)\right]r^{n-1}\mathrm{d}r. \tag{17}$$

证　左方积分等于

$$\int_0^\infty\int_{S_r}K(x)L_{n-1}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}r=\int_0^\infty\left[\int_{S_r}K(x)U_r(\mathrm{d}x)\right]|S_r|\mathrm{d}r,$$

以(15)代入即得(17). □

引理 2　下列积分是 y 的有界函数

$$A(y)=\int_{B_r}\frac{\mathrm{d}x}{|x-y|^{n-2}}\qquad(n\geqslant 2). \tag{18}$$

证　以 $\chi_D(x)$ 表集 D 的示性函数，它等于 1 或 0，视 $x\in D$ 或 $x\overline{\in}D$ 而定. 则对任意 $\delta>0$，有

$$A(y)=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\chi_{B_r}(x)}{|x-y|^{n-2}}\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^{n-2}}+\int_{|x|>\delta}\frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}\mathrm{d}x.$$

由(12)，右方第一积分等于 $\pi^{n/2}\delta^2/\Gamma(n/2)$；第二积分不大于

$$\frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{|x|>\delta}\chi_{B_r}(x+y)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{\mathbf{R}^n}\chi_{B_r}(x+y)\mathrm{d}x=\frac{|B_r|}{\delta^{n-2}}.$$ □

注　其实，易见 $A(y)$ 的上确界在 $y=0$ 达到.

以"v-a. e."表"关于测度 v 几乎处处"；以 $\mathcal{B}^n$ 表 $\mathbf{R}^n$ 中全体 Borel 集所成的 σ 代数；$(\mathbf{R}^n,\mathcal{B}^n)$ 上的勒贝格测度记为 L.

引理 3　设 μ 为 $(\mathbf{R}^n,\mathcal{B}^n)$ 上有穷测度，$n\geqslant 2$，则

$$\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\mu(\mathrm{d}x)}{|x-y|^{n-2}}<\infty\qquad(L\text{-a. e.}). \tag{19}$$

证　以 K 表(18)中 $A(y)$ 的一上界，有

$$\int_{B_r}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\mu(\mathrm{d}x)}{|x-y|^{n-2}}\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{B_r}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-2}}\right)\mu(\mathrm{d}x)\leqslant K\mu(\mathbf{R}^n)<\infty.$$

故(19)中积分在 B_r 上有穷(L-a. e.)，再由 $\mathbf{R}^n=\bigcup\limits_{r=1}^\infty B_r$($r$ 为正整数)，即得证(19). □

以 C_0 表 $\mathbf{R}^n$ 上全体连续且满足 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 的函数 $f(x)$ 的集.

引理 4　设 $f\in C_0$ 而且 L-可积，则当 $n\geqslant 3$，有