

中心解題
辭學何幾續典

原著 助之龜澤長日本
編譯 耀載吳 炯德薛

上海新亞書店印行

心中解題
典辭學何幾續

日本 長澤龜之助 原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海新亞書店印行

本書經呈請內政部註冊執有警字 8313 號執照

版權所有
翻印必究

中華民國二十五年四月初版
中華民國二十八年四月再版

題解中心

續幾何學辭典

另附索引一冊

精裝本實價國幣四元

普及本實價國幣二元二角

(外埠酌加運費匯費)

原	著	者	長	澤	龜	之	助
編	譯	者	薛	吳	德	炯	耀
發	行	人	陳	邦	載	楨	
印	刷	者	新	亞	書	店	
發	行	所	新	亞	書	店	

上海河南路一五九號

貴陽重慶梧州
長沙成都廣州
漢口昆明柳

(Bo076)

編 譯 者 言

余等自拋棄教書生涯，廁身於出版界，環顧同業現況，小說出品，車載斗量，科學書籍，寥若晨星，深感無以應國人之所需要，頗思有所貢獻。祇以自身對於科學，亦止淺嘗，何敢高鶩；力短心長，不僅余等已也！

二十一年夏，新亞書店以編譯日本長澤氏所著算學辭典相囑，當以茲事體大，未敢輕於嘗試，擱置者半年。翌年春，新亞又重申前議，竊思事在人為，雖不無荆棘當前，祇在吾人能鼓勇猛晉，自有成功希望；因即由戴燾編譯初稿，德炯加以修訂，閱時一載，積稿盈尺。於是即開始製版，除由呂君憲章、韓君寅生襄助繪圖，史君炳坤襄助校對外，余等復始終自任覆校，明知魯魚亥豕，在所不免，祇期能減少萬一，以稍輕余等之罪過已耳。

茲值發行將始，例須於卷首有言，爰就編校上之所感，縷述於下，以誌完成是書之經過。

1. 是書原以問題解法某某辭典分名各冊，而其內容於辭典之通行體裁，頗有出入之處，本擬更名曰辭典式算學題庫，卒以特種關係採用今名，非始願也。

2. 原書疊經修訂，新增之題別列於補遺之部，茲則為之分門別類，納入本文；幾費經營，旨在一貫。中間或尚有未盡善處，祇以時間、精力，兩不我許，未及充分編配，引以為憾。

3. 原書名詞之部依照假名順序編排，茲則改用筆畫順序。我國算學名詞，至不統一，最近國立編譯館正在釐訂而尚未公布，友人中頗有以出書未及其時，將來須經改訂手續為余等惜者，際會如此，又何能已！

4. 排校算學書籍，難於普通書籍者奚啻倍蓰，稍一不慎，錯誤隨之。本書於算式之地位，尤加注意，絕不任其無理割裂。排校之時往往因算式之短長，牽涉行間之中斷，不得不設法添削字句，以資銜接；故為解決此項問題，無形之中費却不少時間，不少精力，於字裏行間。即此可知一書之編著與排校，莫妙於出自一手。坊間發行之算學書，對於算式之地位，支離割裂，目滿瘡痍者，所在都有；此種過誤，編著者自應負相當責任，不能盡誣之於排校者也。

5. 排校算學書籍，成本之重，遠超於普通書籍，商人於利薄事業而顧斥重資者，什不獲一，此關於算學之刊物，數量上所以稀少之主因也。余等之於是書，實有賴於資方之促成，否則以全書五百萬言之巨，而竭我倆之棉薄欲印以行世，縱不望而却走，亦必有所戒懼也。

6. 是書校印將半，知友見之者，獎借備至，殊滋惶愧！余等自知此書之性質，僅屬一種便於翻檢之類書，與所謂‘題庫’者正相若，非比涵義宏大，理論精嚴之皇然巨著。故於編譯之時，僅懸‘信’‘達’二字為的，而忽於文字之工拙。原書之誤點，亦僅就所發覺者加以訂正，未遑一一檢算也。特恐來日多方責難，用敢附明於此，尚希邦人君子有以諒之！

中華民國二十四年四月

薛德炯 吳載驥

幾何學公式集

設長 L 為長度之單位,

- (I) 以小字母 $a, b, c, \dots$ 表任意之某長, 以 R, r 表半徑之長.
 (II) 以大字母 $S, S_1, S_2, \dots$ 表任意之某面積. 但面積單位乃以長度單位 L 為一邊之正方形面積.
 (III) 以 $V, V_1, V_2, \dots$ 表任意之某體積.

長度公式 平面之部

【不等式的關係】 1. 設三角形之三邊為 a, b, c , 則 $a < b + c, b < c + a, c < a + b$, 從而 $a \sim b < c, b \sim c < a, c \sim a < b$.

2. 設二圓之半徑為 r, r' , 其中心距離為 d , 則兩圓相交時, $r + r' > d > r \sim r'$; 互在外部, 而不相交時, $r + r' < d$; 其一完全在他一之內部, 而不相交時, $r - r' > d$.

【等式的關係】 1. 設半徑為 r, r' 之二圓, 其中心距離為 d , 則兩圓外切時, $r + r' = d$; 內切時, $r \sim r' = d$.

2. 設三角形 ABC 之三邊為 a, b, c , 命 $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$.

(I) 命由 A, B, C 至內切圓切點之距離, 分別為 A_i, B_i, C_i ; 由 A, B, C 至其對應傍切圓與邊 $(b, c), (c, a), (a, b)$ 延線之切點之距離為 A_e, B_e, C_e ; 由 A, B, C 至傍切圓與邊 $(b, c), (c, a), (a, b)$ 之切點之距離分別為 $(A_b, A_c), (B_c, B_a), (C_a, C_b)$, 則

$$A_e = B_e = C_e = s.$$

$$A_i = B_i = C_i = s - a.$$

$$B_i = C_i = A_i = s - b.$$

$$C_i = A_i = B_i = s - c.$$

(II) 命內切圓之半徑為 r , 面積為 S , 外心至內心之距離為 d , 則

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{S}{s} = \frac{R^2 - d^2}{R}.$$

(III) 命角 BAC 內之傍切圓半徑為 r_1 , 則

$$r_1 = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = \frac{S}{s-a}.$$

(IV) 命外接圓之半徑為 R , 則

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{4S} = \frac{bc}{2h_a}.$$

但 h_a 為由 A 至邊 a 所引之高.

(V) 命由 A 至邊 a 之高為 h_a , 則

$$h_a = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}/a.$$

(VI) 命由 A 至邊 a 之中線之長爲 m_a ,

$$\text{則 } m_a = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2)}.$$

(VII) 命角 A 之二等分線由 A 至邊 a 之長爲 w_a , 則

$$w_a = 2\sqrt{bcs(s-a)/(b+c)}.$$

(VIII) 命垂足三角形之三邊爲 a', b', c' ,

$$\text{則 } a' + b' + c' = \frac{2S}{R} = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

但 a', b', c' 中, 若有對原三角形之鈍角者, 則其值爲負.

3. 將所設有限直線 a 分於中末比, 命其較大部分爲 x , 則

$$(I) \text{ 內分時. } x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1).$$

$$(II) \text{ 外分時. } x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1).$$

4. 梯形 ABCD 中, 命平行邊 AB, CD 爲 a , b ; 他二邊 BC, DA 爲 c , d , 則

$$BD = \sqrt{a(c^2 - b^2) + b(a^2 - d^2)} / \sqrt{(a-b)}.$$

$$AC = \sqrt{a(d^2 - b^2) + b(a^2 - c^2)} / \sqrt{(a-b)}.$$

5. 設圓之內接四邊形 ABCD 中, 邊 AB, BC, CD, DA 分別表以 a, b, c, d , 對角線 AC, BD 分別表以 λ, μ , 則

$$\lambda = \sqrt{(ac+bd)(ad+bc)} / \sqrt{(ab+cd)}.$$

$$\mu = \sqrt{(ac+bd)(ab+cd)} / \sqrt{(ad+bc)}.$$

6. 直角三角形中, 設二邊爲 x, y , 斜邊爲 z , 則 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7. 半徑爲 R 之圓中, 其內接

$$(I) \text{ 正三角形之一邊} = R\sqrt{3}.$$

$$(II) \text{ 正方形之一邊} = R\sqrt{2}.$$

$$(III) \text{ 凸正五角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

$$(IV) \text{ 星形正五角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$(V) \text{ 凸正六角形之一邊} = R.$$

$$(VI) \text{ 凸正八角形之一邊} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$(VII) \text{ 星形正八角形之一邊}$$

$$= R\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$(VIII) \text{ 凸正十角形之一邊} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1).$$

$$(IX) \text{ 星形正十角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1).$$

$$(X) \text{ 凸正十二角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{2}R(\sqrt{3}-1).$$

$$(XI) \text{ 星形正十二角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{2}R(\sqrt{3}+1).$$

$$(XII) \text{ 凸正十五角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{4}R\{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3(\sqrt{5}-1)}\}.$$

$$(XIII) \text{ 第一星形正十五角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{4}R\{\sqrt{3(\sqrt{5}+1)} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}.$$

$$(XIV) \text{ 第二星形正十五角形之一邊}$$

$$= \frac{1}{4}R\{\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3(\sqrt{5}-1)}\}.$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623 \quad \log 2 = 0.3010300$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508075 \quad \log 3 = 0.4771213$$

$$\sqrt{5} = 2.236079774 \quad \log 5 = 0.6989700$$

8. 反之, 設各邊爲 a 之正多角形, 其邊數如 7 中所示, 則此多角形之外接圓, 半徑 R 易由 7 求得之.

9. 設各邊爲 a 之正多角形, 其外接圓之半徑爲 R , 內切圓之半徑爲 r , 則 $R^2 - r^2 = \frac{1}{4}a^2$. 故正多角形之邊數, 若如 7 中所示, 則由關係 7, 8 及上式, 得從 R, r, a 中之任一量, 以求得他二量. 例如以 r_n 表凸正 n 角形之內切圓半徑, 而列記 r_n 與 a 及 R 間之關係如下:

$$(I) \quad r_3 = \sqrt{3}a/6 = \frac{1}{2}R.$$

$$(II) \quad r_4 = a/2 = \sqrt{2}R/2$$

$$\text{(III)} \quad r_5 = a\sqrt{25+10\sqrt{5}}/10 \\ = R(1+\sqrt{5})/4.$$

$$(IV) \quad r_6 = a\sqrt{3/2} = R\sqrt{3/2}.$$

$$(V) \quad r_8 = a(\sqrt{2} + 1)/2 = R\sqrt{2} + \sqrt{2}/2.$$

$$\begin{aligned} \text{(VI)} \quad \tau_{10} &= a\sqrt{5+2\sqrt{5}}/2 \\ &= R\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4. \end{aligned}$$

• • • • •

10. 半徑爲 r 之圓中，設其內接及外切正 n 角形之各邊長 p, q ，又設其邊數爲二倍之內接及外切正 $2n$ 角形之各邊長 p', q' ，則

$$(I) \quad p' = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - p^2})}.$$

$$(II) \quad q' = 2pq/(p+q).$$

$$(III) \quad p' = \sqrt{q'p}.$$

依據公式 (II), (III), 計算圖之內接及外切正多角形之周, 則得下表:

邊數	外切多角形 之周圍	內接多角形 之周圍
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

11. 圓周之長 = $2\pi r$. 但 r 爲圓之半徑.

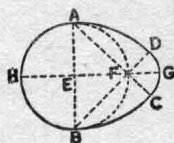
$$\pi = 3.1415926535 \dots$$

12. α 度之角所對之圓弧 $= \pi r \alpha / 180$.

$$a \text{ 直角所對之圓弧} = \pi r a / 2.$$

13. 面積爲 a^2 之圓之半徑 $= a/\sqrt{\pi}$.

14. 卵形之周。卵形之簡單者，如圖所示，



其作法如下, AFBH 爲

中心 E 之圓, 弧 AD, BC

分別以 B, A 為中心,

弧 DGC 以 F 爲中心.

今設圓 $AFBH$ 之半徑

爲 r ，則周之長 $= \pi r \left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ 。

長度公式 立體之部

1. 設四面體 $SABC$ 中, 棱 SA, SB, SC, AB, BC, CA 分別為 a', b', c', a, b, c , 由 S 所引之高為 h , 三角形 ABC 之面積為 T , 則

$$h = \sqrt{[16 T^2 c'^2 - b^2(a^2 + c'^2 - b'^2)^2 - a^2(b^2 - c'^2 - a'^2)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c'^2 - b'^2)(b^2 + c'^2 - a'^2)] \div 16 T^2}.$$

2. 設正四面體中,各棱爲 a , 高爲 h , 則

$$h = a\sqrt{2}/\sqrt{3}.$$

3. 設直角體之三元爲 x, y, z , 對角線爲 u , 則

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4. 設立方體之各棱爲 a , 對角線爲 m , 則

$$m = a\sqrt{3}.$$

5. 設正八面體之各棱爲 a , 對角線爲 m , 則

$$m = a\sqrt{2}.$$

6. 設球之面積爲 a^2 , 半徑爲 r , 則

$$\tau = a/(2\sqrt{\pi}).$$

面積公式 平面之部

以 S 表面積,

1. 直角三角形中,設二邊爲 a, b , 則

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

2. 三角形中, 設底爲 a , 高爲 h , 則

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

3. 三角形中, 設三邊爲 a, b, c , 則

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\text{但 } s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

$$\text{又 } S = rs = abc/(4R) = (s-a)r_1.$$

但 r 爲內切圓半徑, R 爲外接圓半徑, r_1 爲對邊 a 之傍切圓半徑.

4. 設矩形之二邊爲 a, b , 則 $S = ab$.

5. 設梯形之高爲 h , 平行二邊爲 a, b , 則

$$S = \frac{1}{2}h(a+b).$$

6. 設梯形之平行二邊爲 a, b , 他二邊爲 c, d , 則

$$S = (a+b)\sqrt{(s-a)(s-b)(s-b-c)(s-b-d)} / (a-b). \text{ 但 } s = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

7. 設四邊形 $ABCD$ 中, 順次各邊之長爲 a, b, c, d , 對角線 AC, BD 爲 m, n , 則

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2) \times (2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)\}}.$$

8. 圓之內接四邊形中, 設四邊爲 a, b, c, d , 則

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

$$\text{但 } s = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

9. 設圓之半徑爲 r , 其外切多角形之周爲 p , 則

$$S = \frac{1}{2}pr.$$

10. 設圓之半徑爲 r , 則其內接

$$(I) \text{ 正三角形中, } S = 3r^2\sqrt{3}/4.$$

$$(II) \text{ 正方形中, } S = 2r^2.$$

$$(III) \text{ 凸正五邊形中,}$$

$$S = 5r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}/8.$$

$$(IV) \text{ 凸正六角形中, } S = 3r^2\sqrt{3}/2.$$

$$(V) \text{ 凸正八角形中, } S = 2r^2\sqrt{2}.$$

- (VI) 凸正十邊形中,

$$S = \frac{5}{2}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

- (VII) 凸正十二邊形中, $S = 3r^2$.

11. 相似形之面積比例於其對應邊之平方.

12. 半徑 r 之圓中, $S = \pi r^2$.

13. α 度之角所對之扇形中,

$$S = \pi r^2 \alpha / 360.$$

14. 設弓形弧之長爲 l , 弦爲 k , 矢爲 h , 則弓形之面積

$$S = \left\{ \frac{1}{4}k^2(l-k) + h^2(l+k) \right\} / (4h).$$

15. 卵形之面積 $= \{\pi(3-\sqrt{2})-1\}r^2$.

16. 橢圓之面積 $= \pi ab$. 但 a, b 爲長短半徑.

17. 拋物線爲弦所截取之面積爲 $\frac{2}{3}ab$, 但 a 爲弦, b 爲此弦之徑.

面積公式 立體之部

1. 設角柱之直角截面之周爲 a , 側棱爲 h , 則 側面積 $S = ah$.

2. 設直角體之三元爲 a, b, c , 則 面積 $S = 2(ab+bc+ca)$.

3. 設正角錐底之周爲 a , 斜高爲 h , 則 側面積 $S = \frac{1}{2}ah$.

4. 設正角臺兩底之周爲 a, b , 斜高爲 h , 則 側面積 $S = \frac{1}{2}h(a+b)$.

又設距二底等遠之截面, 其周爲 a' , 則

$$S = ha'.$$

5. 兩相似形之面積, 比例於其對應棱之平方.

6. 設直圓柱底之半徑爲 r , 母線爲 h , 則 側面積 $S = 2\pi rh$.

全面積 $S' = 2\pi r(r+h)$.

7. 設直圓錐底之半徑為 r , 母線為 h , 則

側面積 $S = \pi rh$.

全面積 $S' = \pi r(r+h)$.

8. 設正圓臺底之半徑為 r, r' , 斜高為 h , 則

側面積 $S = \pi(r+r')h$.

9. 半徑為 r 之球面積 $S = 4\pi r^2$.

10. 半徑為 r 之球中, 高為 h 之球帶側面積 $S = 2\pi rh$.

11. 有 α 度角之月形面積 $S = \text{球面} \times \alpha / 360$.

12. 半徑為 r 之球中, 球面三角形之面積 $S = \pi r^2 \times \alpha / 180$.

但 α 為此球面三角形之球面過剩.

13. [Guldin 或 Pappus 氏定理]. 一封閉平面曲線, 以其平面上且不與其相交之直線為軸而迴轉, 則其所生之面積, 等於此曲線之全長, 與其重心所作圓周之乘積.

體 積 公 式

1. 設角柱之底面積為 S , 高為 h , 則

體積 $V = Sh$.

設直角截口之面積為 S' , 側棱為 l , 則

體積 $V = S'l$.

2. 三元為 a, b, c 之直角體中,

體積 $V = abc$.

3. 下底為 S 之斜三角柱中, 設由上底之重心至下底之距離為 h , 則

體積 $V = Sh$.

4. 設斜角柱之直角截口為 S' , 兩底之重心距離為 l , 則

體積 $V = S'l$.

5. 設角錐之底為 S , 高為 h , 則

體積 $V = \frac{1}{3}Sh$.

6. 設角臺之兩底為 B, B' , 高為 h , 則

體積 $V = \frac{1}{3}h(B+B'+\sqrt{BB'})$.

7. 若第二種角臺之兩底為 B, B' , 高為 h , 則

體積 $V = \frac{1}{3}h(B+B'-\sqrt{BB'})$.

8. 設楔之背為 L , 闊為 b , 長為 l , 高為 h , 則

體積 $V = \frac{1}{6}bh(2L+l)$.

9. 設矩角臺之高為 h , 上底之二邊為 s ,

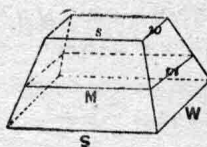
w , 下底之對應二

邊為 S, W , 距上

下兩底等遠截面

之對應二邊為 $M,$

m , 則



體積 $V = \frac{1}{6}h(Ws + ws + 4Mm)$.

10. 設三角傍面

臺之二底面積為

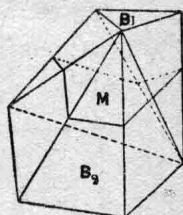
B_1, B_2 , 中央之截

面積為 M , 高為

h , 則

體積 $V = \frac{1}{6}h(B_1$

$+ 4M + B_2)$.



11. 設四面體之對棱分別為 $a, a'; b, b';$

c, c' ; 其中 a', b', c' 係由同頂點出發者,

則體積 $V^2 = \frac{1}{144} \{ (b^2 + c^2 - a^2 + b'^2 + c'^2$

$- a'^2) a^2 a'^2 + (c^2 + a^2 - b^2 + c'^2$

$+ a'^2 - b'^2) b^2 b'^2 + (a^2 + b^2 - c^2$

$+ a'^2 + b'^2 - c'^2) c^2 c'^2 - (a^2 b^2 c^2$

$+ a^2 b'^2 c'^2 + b^2 c'^2 a'^2 + c^2 a'^2 b'^2) \}$.

12. 以 a 表正多面體之一棱.

(I) 正四面體之體積 $V = \sqrt{2}a^3/12$.

(II) 正六面體即立方體之體積 $V = a^3$.

(III) 正八面體之體積 $V = \sqrt{2}a^3/3$.

(IV) 正十二面體之體積 $V = \frac{1}{4}a^3(15 - 7\sqrt{5})$.

(V) 正二十面體之體積 $V = \frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$.

13. 設圓柱之底及高為 S 及 h , 則體積 $V = Sh$. 設底之半徑為 r , 則 $V = \pi r^2 h$.

14. 設圓錐之底及高為 S 及 h , 則體積 $V = \frac{1}{3}Sh$. 設底之半徑為 r , 則 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

15. 設圓臺之底及高為 S, S' , 及 h , 則體積 $V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'})$.

若底之半徑分別為 r, r' , 則

$$\text{體積 } V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr').$$

16. 第二種圓臺中, 設兩底之半徑分別為 r, r' , 高為 h , 則

$$\text{體積 } V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 - rr').$$

17. 設球之半徑為 r , 則體積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

18. 半徑為 r 之球中, 設球狀楔有 α 度

之角, 則

$$\text{體積 } V = \alpha \pi r^3 / 270.$$

19. 半徑為 r 之球中, 球面三角錐之體積 $V = \alpha \pi r^3 / 540$.

但 α 為其底, 即球面三角形之球面過剩.

20. 兩底之半徑為 r', r'' , 高為 h 之球缺中,

$$\text{體積 } V = \pi \left(r'^2 \frac{h}{2} + r''^2 \frac{h}{2} + \frac{1}{6} h^3 \right).$$

21. 僅有一底, 且其半徑為 r , 高為 h 之球缺中,

$$\text{體積 } V = \pi \left(r^2 \frac{h}{2} + \frac{1}{6} h^3 \right).$$

22. [Guldin 或 Pappus 氏定理] 一封閉平面曲線, 若以其平面上且不與之相交之一直線為軸而迴轉時, 其所生之體積等於其面積與其重心所作圓周之乘積.

23. 旋轉體 正多角形以其一邊為軸而迴轉時, 其所生體之體積如下表. 但 R 為外接圓之半徑, c 為一邊.

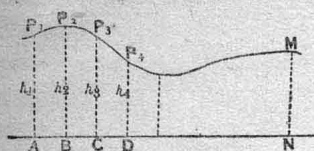
三 角 形	$\frac{3}{4}\pi R^3 \sqrt{3}$	$\frac{1}{4}\pi c^3$
四 角 形	$2\pi R^3 \sqrt{2}$	πc^3
五 角 形	$\frac{5}{4}\pi R^3 \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$
六 角 形	$\frac{9}{8}\pi R^3$	$\frac{9}{8}\pi c^3$
八 角 形	$2\pi R^3 \sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$2\pi c^3(3+2\sqrt{2})$
十 角 形	$\frac{5}{8}\pi R^3 \sqrt{5}$	$\frac{5}{8}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$
十二角形	$\frac{3}{2}\pi R^3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$3\pi c^3(7+4\sqrt{3})$

A. 弓形面積之近似數

圓之弓形中, 設其弦為 k , 矢為 h , 則其面積之近似值 $S' = \frac{1}{2}kh$.

B. Simpson 氏近似法

Simpson 氏近似法, 乃求不規則曲線所圍面積之方法, 其用至廣.



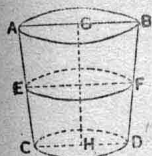
欲求曲線 $P_1P_2\cdots M$ 所圍之面積[圖所示者,可視作曲線之一部分],可適當採取直線 AN ,而求 P_1ANM 之面積.將如是之許多面積相加,則得全曲線之面積.將 AN 分成若干等部,由點 $A, B, C, D, \cdots$ 引 AN 之垂線 $AP_1, BP_2, CP_3, \cdots$,令交曲線於點 $P_1, P_2, P_3, \cdots$.又命 $AB=BC=CD=\cdots=x$,命 $AP_1=h_1, BP_2=h_2, CP_3=h_3, \cdots$,則面積 $P_1ANM=P_1ABP_2+P_2BCP_3+P_3CDP_4+\cdots$
 $\cdots=\frac{1}{2}x(h_1+h_2)+\frac{1}{2}x(h_2+h_3)+\frac{1}{2}x(h_3+h_4)+\cdots$
 $=x\{\frac{1}{2}(h_1+h_n)+h_2+h_3+\cdots+h_{n-1}\}$.由是得次之法則:

【法則】兩外垂線和之半,加中間諸垂線,乘其和以隣接二垂線間之距離[此距離對於各隣接垂線皆同].

C. 桶之容量

1. 造酒桶類之丈量法,完全以求截頭圓錐體積之公式為基礎.

圖中 AB 曰口徑, CD 曰底徑, EF 曰脬徑,



GH 曰深度.又此桶在脬徑之上及下之兩部分,皆約略成截頭圓錐,故設 $AB=d, CD=d_1, EF=d_2, GH=h$, 則

$$\text{桶之體積} = \frac{\pi}{3} \times \frac{h}{2} \times \frac{d^2 + dd_2 + d_2^2}{4}$$

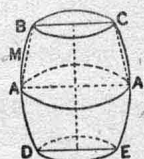
$$\begin{aligned} & + \frac{\pi}{3} \times \frac{h}{2} \times \frac{d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2}{4} \\ & = \frac{h}{2} \{ (d+d_2)^2 + (d_2+d_1)^2 \\ & \quad - (d+d_1)d_2 \} \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

由是得算法如下:

【算則】命口徑脬徑和二乘幂為甲,脬徑底徑和二乘幂為乙,口徑底徑和與脬徑之乘積為丙,由甲乙之和減丙,以深度之半分與 $\pi/12$ 之積乘所得差,即得桶之體積,再依 1 升 = 27 立方寸計之,即得容量.

2. 西式桶之體積之求法,亦以截頭圓錐之公式為基礎.

圖中最大截面之直徑 AA' , 設為 $2R$, 命其兩端之直徑 BC, DE 皆為 $2r$, 高為 h , 則桶之體積約等於截頭圓錐 $AA'CB$ 之二倍,因



此,其體積約為 $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2) \cdots (1)$.但此式係將 AMB 所生一小部分之體積棄去而得者,故較實際之體積略

小.若上之公式中, Rr 代以 R^2 , 則得 $\frac{1}{3}\pi h \times (2R^2 + r^2) \cdots (2)$.由此公式所求得之體積,較實際之體積略大.

D. 正多角形

表 I 所示者,乃正多角形之一邊為 1 時,表其半徑,邊心距,面積之數,表 II 所示者,乃正多角形之半徑為 1,或邊心距為 1,或面積為 1 時,表其一邊之數.

多角形 之邊數	I. 邊 $c=1$			II 依下列已知件而得之 c 值		
	半徑	邊心距	面積	半徑=1	邊心距=1	面積=1
3	0.577350	0.288675	0.433013	1.732050	3.464101	1.519671
4	0.707107	0.500000	1.000000	1.414214	2.000000	1.000000
5	0.850651	0.688191	1.720477	1.175570	1.453085	0.762387
6	1.000000	0.866025	2.598076	1.000000	1.154701	0.620403
7	1.152382	1.038261	3.633912	0.867767	0.963149	0.524581
8	1.306563	1.207107	3.828428	0.765367	0.828427	0.455090
9	1.461902	1.373739	6.181823	0.684040	0.727940	0.402200
10	1.618034	1.538842	7.694207	0.618034	0.649839	0.390511
11	1.774732	1.702844	9.365640	0.563465	0.587253	0.326762
12	1.931852	1.866025	11.196150	0.517638	0.535898	0.298858
15	2.404867	2.352315	17.642360	0.415823	0.425113	0.238079
18	2.879385	2.835641	25.520770	0.347296	0.352654	0.197949
20	3.196227	3.156876	31.568760	0.312869	0.316769	0.177980

但邊變時，半徑及邊心距以同比而變，面積從邊之平方而變。例如欲作深 3 尺，容 36.75 立方尺之正八角柱器，則因底面積為 $36.75 \div 3 = 12.25$ 平方尺，故由表 II，知 $c^2:0.45509 = 12.25:1$ ， $\therefore c=1.592815$ 。

E. 圓 周 率

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ \dots$$

$$\log \pi = 0.4971499, \log \pi^2 = 0.9942997, \log \pi^3 = 1.4914496, \log \sqrt{\pi} = 0.2485749,$$

$$\log \sqrt[3]{\pi} = 0.165166, \log \frac{1}{\pi} = 1.5028501, \log \frac{1}{\pi^2} = 1.0057003, \log \frac{1}{\pi^3} = 2.5085504,$$

$$\log \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1.7514251, \log \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 1.8342834.$$

π		π^2		π^3		$\sqrt{\pi}$		$\sqrt[3]{\pi}$	
1	3.1415927	1	9.8696044	1	31.0062767	1	1.7724539	1	1.4645919
2	6.2831853	2	19.7392088	2	62.0125534	2	3.5449077	2	2.9291838
3	9.4247780	3	29.6088132	3	93.0188300	3	5.3173616	3	4.3937756
4	12.5663706	4	39.4784176	4	124.0251067	4	7.0898154	4	5.8583675
5	15.7079633	5	49.3480220	5	155.0313834	5	8.8622693	5	7.3229594
6	18.8495559	6	59.2176264	6	186.0376601	6	10.6347231	6	8.7875513
7	21.9911486	7	69.0872308	7	217.0439368	7	12.4071770	7	10.2521432
8	25.1327412	8	78.9568352	8	248.0502134	8	14.1796308	8	11.7167351
9	28.2743339	9	88.8264396	9	279.0564901	9	15.9520847	9	13.1813269

$\frac{1}{\pi}$		$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{1}{\pi^3}$		$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$		$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	
1	0.3183099	1	0.1013210	1	0.0322515	1	0.5641896	1	0.6827841
2	0.6366198	2	0.2026420	2	0.0645030	2	1.1283792	2	1.3655681
3	0.9549297	3	0.3039631	3	0.0967545	3	1.6925688	3	2.0483522
4	1.2732395	4	0.4052841	4	0.1290060	4	2.2367583	4	2.7311363
5	1.5915494	5	0.5066051	5	0.1612575	5	2.8209479	5	3.4139203
6	1.9098593	6	0.6079261	6	0.1935090	6	3.3851375	6	4.0967044
7	2.2281692	7	0.7092471	7	0.2257605	7	3.9493271	7	4.7794885
8	2.5464791	8	0.8105682	8	0.2580120	8	4.5135167	8	5.4622725
9	2.8647890	9	0.9118892	9	0.2902635	9	5.0777063	9	6.1450566

是等之表，在求圓及球之面積體積，及計算其逆問題時，有極大之幫助。

F. 弧 之 長

下表示半徑為 1 之圓弧之長，至小數第十二位，先以度，分，秒，次以法度。

弧 之 長		弧 之 長		弧 之 長		弧 之 長	
1°	0.017453292520	1'	0.000290888209	1''	0.000004848137	1 ^{gr}	0.015707963268
2	0.034906585040	2	0.000581776417	2	0.000009696274	2	0.031415926536
3	0.052359877560	3	0.000872664626	3	0.000014544410	3	0.047123889804
4	0.069813170080	4	0.001163552835	4	0.000019392547	4	0.062831853072
5	0.087266462600	5	0.001454441043	5	0.000024240684	5	0.078539816340
6	0.104719755120	6	0.001745329252	6	0.000029088821	6	0.094247779608
7	0.122173047640	7	0.002036217461	7	0.000033936958	7	0.109955742876
8	0.139626340160	8	0.002327105669	8	0.000038785094	8	0.125663706144
9	0.157079632679	9	0.002617993378	9	0.000043633231	9	0.141371669412

弧 之 長		弧 之 長	
1°	0.0174532925199432957692369	1''	0.0000048481368110953599359
1'	0.0002908882086657215961539	1 ^{gr}	0.0157079632679489661923133

G. 弦 及 弓 形

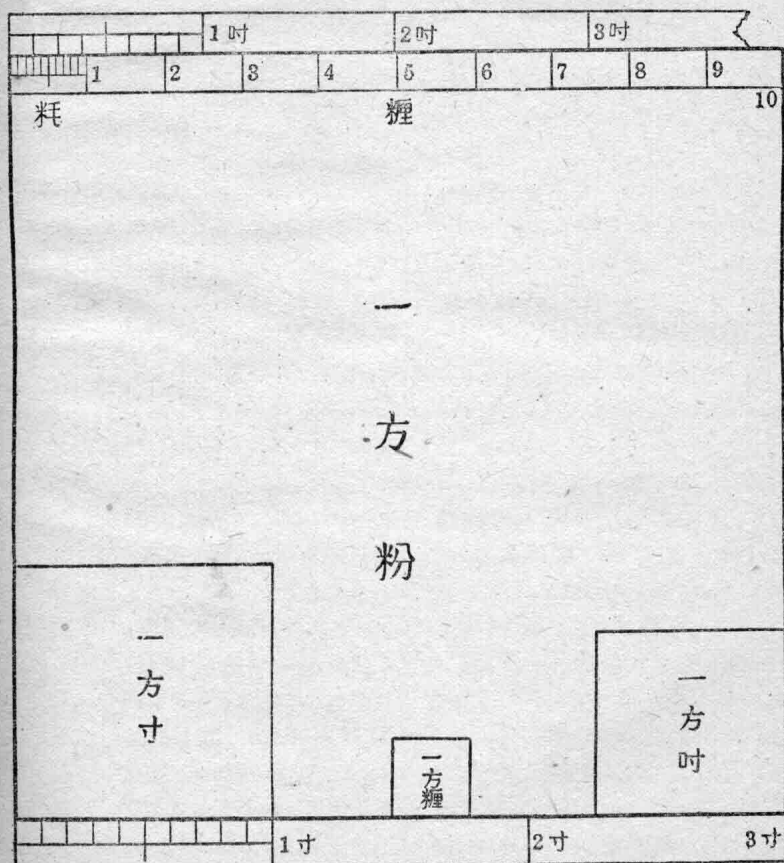
矢 [由弧之中點至弦所引之垂線] 長爲 1 時之弦長, 弧長, 弓形面積.

弦	弧	弓 形	弦	弧	弓 形	弦	弧	弓 形
2.00	3.1416	1.5708	4.80	5.337	3.3085	8.50	8.810	5.7289
2.01	3.146	1.5764	4.90	5.427	3.3730	8.60	8.903	5.7947
2.02	3.152	1.5821	5.00	5.517	3.4377	8.70	9.003	5.8606
2.03	3.158	1.5879	5.10	5.608	3.5024	8.80	9.100	5.9266
2.04	3.164	1.5936	5.20	5.698	3.5672	8.90	9.196	5.9927
2.05	3.170	1.5993	5.30	5.789	3.6320	9.00	9.293	6.0587
2.06	3.176	1.6051	5.40	5.881	3.6969	9.10	9.390	6.1248
2.07	3.182	1.6108	5.50	5.973	3.7618	9.20	9.487	6.1909
2.08	3.187	1.6166	5.60	6.065	3.8269	9.30	9.584	6.2570
2.09	3.193	1.6224	5.70	6.157	3.8919	9.40	9.681	6.3230
2.10	3.199	1.6282	5.80	6.249	3.9571	9.50	9.778	6.3890
2.20	3.261	1.6863	5.90	6.342	4.0222	9.60	9.875	6.4551
2.30	3.324	1.7449	6.00	6.435	4.0874	9.70	9.972	6.5212
2.40	3.390	1.8041	6.10	6.528	4.1527	9.80	10.069	6.5873
2.50	3.458	1.8637	6.20	6.621	4.2182	9.90	10.167	6.6533
2.60	3.527	1.9238	6.30	6.715	4.2835	10.00	10.264	6.7194
2.70	3.599	1.9843	6.40	6.809	4.3489	10.10	10.362	6.7854
2.80	3.672	2.0452	6.50	6.903	4.4142	10.20	10.459	6.8515
2.90	3.746	2.1064	6.60	6.997	4.4797	10.30	10.557	6.9176
3.00	3.822	2.1679	6.70	7.091	4.5452	10.40	10.654	6.9837
3.10	3.899	2.2297	6.80	7.185	4.6107	10.50	10.752	7.0498
3.20	3.977	2.2917	6.90	7.280	4.6763	10.60	10.849	7.1160
3.30	4.056	2.3540	7.00	7.375	4.7420	10.70	10.947	7.1822
3.40	4.137	2.4165	7.10	7.470	4.8076	10.80	11.045	7.2484
3.50	4.218	2.4793	7.20	7.565	4.8732	10.90	11.143	7.3146
3.60	4.300	2.5422	7.30	7.660	4.9389	11.00	11.240	7.3809
3.70	4.383	2.6053	7.40	7.755	5.0047	11.10	11.338	7.4471
3.80	4.467	2.6686	7.50	7.850	5.0705	11.20	11.436	7.5133
3.90	4.551	2.7320	7.60	7.946	5.1363	11.30	11.534	7.5795
4.00	4.636	2.7956	7.70	8.042	5.2020	11.40	11.632	7.6457
4.10	4.722	2.8593	7.80	8.137	5.2678	11.50	11.730	7.7119
4.20	4.808	2.9231	7.90	8.233	5.3336	11.60	11.828	7.7781
4.30	4.895	2.9871	8.00	8.329	5.3994	11.70	11.926	7.8444
4.40	4.983	3.0512	8.10	8.425	5.4653	11.80	12.024	7.9107
4.50	5.071	3.1154	8.20	8.521	5.5312	11.90	12.122	7.9770
4.60	5.159	3.1796	8.30	8.617	5.5971	12.00	12.220	8.0433
4.70	5.248	3.2440	8.40	8.714	5.6630			

H. 正 多 面 體

下表示正多面體之面數, 及棱爲 1 時, 表其面積及體積之數.

正多面體	面	面積	體積
正四面體.....	4個三角形	1.732051	0.117851
正六面體[立方體]	6個正方形	6.000000	1.000000
正八面體.....	8個三角形	3.464102	0.471404
正十二面體.....	12個五边形	20.645779	7.663119
正二十面體.....	20個三角形	8.660254	2.181695



目次

卷首	I—XI
第一門 立體幾何學解法之部	1—255
第一節 平面,垂線,斜線	1—9
第二節 平行直線,平行平面	9—24
第三節 二面角	24—45
第四節 多面角	46—59
第五節 多面體,角柱	59—75
第六節 角錐	74—102
第七節	
I. 相似形	102—108
II. 對稱	108—115
III. 正多面體	115—124
IV. 多面體之雜定理	124—129
第八節 圓柱及圓錐	129—139
第九節	
I. 球	139—157
II. 球面三角形	157—173
第十節 旋轉體之面積及體積	
I. 圓柱	173—177
II. 圓錐及圓臺	177—182
III. 球	182—192
IV. 雜題	192—202
第十一節 軌跡	203—221
第十二節 作圖題	
I. 平面	221—239
II. 曲面	239—255
第二門 平面幾何學補遺之部	257—335
第一節 定理及計算問題	257—269
第二節 軌跡及交跡	269—274
第三節 作圖題	
I. 求點之問題	274—282
II. 引直線之問題	282—293
III. 引弦之問題	293—297
IV. 引切線之問題	297—300
V. 作三角形之問題	300—309
VI. 作四邊形之問題	309—317
VII. 作梯形之問題	317—319
VIII. 作平行四邊形之問題	319—322

IX. 作矩形之問題	322—323
X. 作菱形之問題	323—324
XI. 作正方形之問題	324—325
XII. 作多角形之問題	325—328
XIII. 作圓之問題	328—335
第三門 近世幾何解法之部	337—433
第一節 極大極小	337—341
第二節 平均中心	341—346
第三節 共點性共線性	346—359
第四節 相似中心	359—365
第五節 同軸圓	365—373
第六節 相切	373—376
第七節 倒形法	376—390
第八節 調和點列	391—397
第九節 極及極線	397—410
第十節 三角形之最近幾何學	410—433
第四門 常用曲線解法之部	435—450
第一節 橢圓	435—440
第二節 雙曲線	440—443
第三節 拋物線	443—447
第四節 螺線	447—448
第五節 圓錐截面	448—450
第五門 名詞之部	451—482
附錄 英漢名詞對照表	483—495
第六門 幾何學小史之部	497—531
埃及古代及當時之幾何學	497—499
希臘古代之幾何學	499—519
純正幾何學之復興	519—528
近世幾何學之創設	528—530
近世幾何學	530—531
附錄 諸表	533—536
直三角角形	533—534
斜三角角形	534—936

題解中心 續幾何學辭典

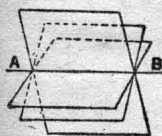
第一門 立體幾何解法之部

第一節

平面 垂線 斜線

1. 過一任意定直線，得作無數平面

圖 過定直線 AB ，得作無數平面。何則，



設任意取一平面，在其上任意引一直線，將此平面移動，令所引直線與定直線 AB 相合，以 AB 為軸，將此平面旋

轉，於是在一切位置中所得之平面，皆過直線 AB 故也。

2. 在以下各款中，得決定一平面。(I) 一直線與此線外之一點。(II) 相交之二直線。(III) 不在一直線上之三點。(IV) 平行之二直線。

圖 (I) 命 AB 為所設直線， C 為此直線外



之一點；求證直線 AB 與點 C 決定一平面。過 AB 之平面有無數 [1 題]，取其任一，以 AB 為軸而旋轉之，令過點 C ，命

此位置為 M ，於是 M 為過 AB 及 C 之平面。次，仍以 AB 為軸，而依任意方向將此

平面旋轉，則旋轉之度雖至微，而平面已不過 C 矣。故過此直線與定點之平面唯一。是以一直線與此線外之一點，決定一平面。

(II) 設相交之二直線為 AB, AC ；求證 AB, AC 決定一平面。命過直線 AC 上之任意點 C [點 A 以外者] 與直線 AB 之平面為 M 。於是因直線 AC 上之二點 A 與 C 在平面 M 上，故直線 AC 在此平面上 [平面之定義]。因此過直線 AB 與點 C 之平面含二直線 AB, AC 。故相交之二直線決定一平面 [本題 (I)]。

(III) 設 A, B, C 為不在一直線上之三點；求證 A, B, C 決定一平面。今在此三點中，聯結其任意二點 [例如 A, B]，則直線 AB 與點 C 所定之平面過三點 A, B, C 。故不在一直線上之三點，決定一平面。

(IV) 設 AB, CD 為平行之二直線；求證 $A \quad B$ AB, CD 決定一平面。由平行直線之定義，平行之二直線 AB, CD 必在同一平面上；而過 AB, CD 之平面唯一。何則，過直線 AB, CD 之平面，過 AB 及 CD 上之任