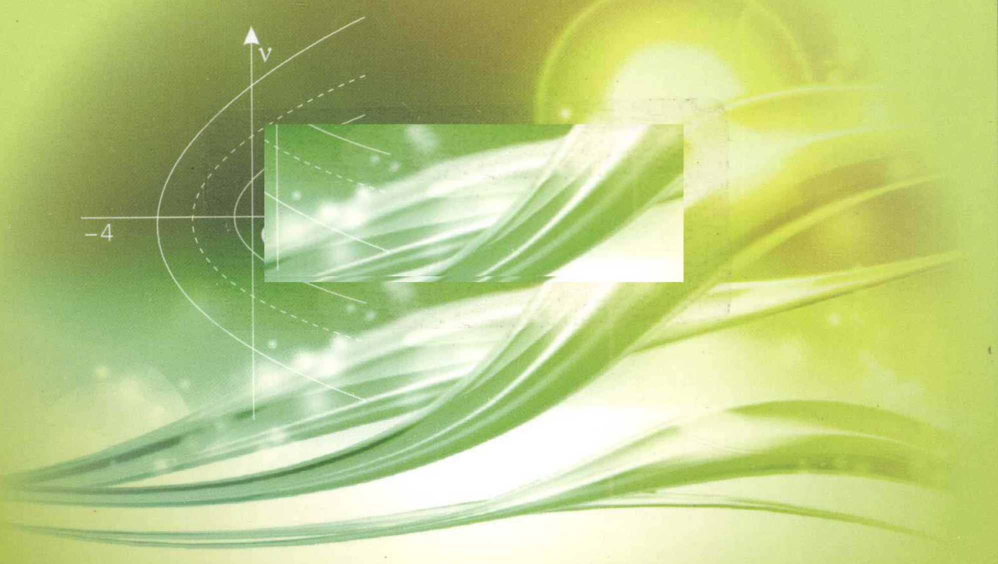
高等学校经典教材“三点”丛书

复变函数

（西交大·第四版）

重点 难点 考点辅导与精析

主编 李昌兴 史克岗



西北工業大學出版社

高等学校经典教材“三点”丛书

复变函数

（西交大·第四版）

重点　难点　考点　辅导与精析

主编　李昌兴　史克岗

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是与西安交通大学编写的《复变函数》(第四版)相配套的学习辅导书.按原教材各章的顺序,每章包括重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答四部分.本书重在通过对内容和方法进行归纳总结,把基本理论、基本方法融于典型范例中;注重分析解题思路,揭示解题规律,解决学习困难,引导读者思考,培养学习兴趣.

本书既可作为非数学类专业理工科本科生学习复变函数课程的参考书,也可作为从事复变函数教学工作者的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数重点难点考点辅导与精析/李昌兴,史克岗主编.—西安:西北工业大学出版社,2010.8

(高等学校经典教材"三点"丛书)

ISBN 978-7-5612-2869-2

Ⅰ.①复… Ⅱ.①李… ②史… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 158338 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号 **邮编**:710072
电　　话:(029)88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西丰源印务有限公司印刷
开　　本:727 mm×960 mm 1/16
印　　张:13
字　　数:220 千字
版　　次:2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷
定　　价:22.00 元

前　言

"复变函数"是高等学校理工科专业普遍开设的一门数学基础课，它是自然科学与工程技术中常用的数学工具，因而备受广大科技工作者的重视. 为了有效地帮助广大读者正确理解和掌握其理论和方法，解决学习过程中遇到的一些困难，根据多年的教学经验以及教育部组织制定的新《复变函数课程的教学基本要求》，我们编写了这本教学参考书.

本书每章分为重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答四部分. 重点及知识点辅导与精析部分简述了各章的基本概念、主要定理、性质及计算公式，指出了各章知识点的有机联系，使读者从整体上把握各章所涵盖的知识要点，使知识更加系统化、条理化. 难点及典型例题辅导与精析部分，精选了若干具有代表性的典型例题，力求做到选题全面，重点突出，解答详细，对部分题目指出了解题思路、解题方法，旨在帮助读者在解题过程中达到举一反三、触类旁通，化解学习难点. 考点及考研真题辅导与精析部分，收集并解答了国内许多知名院校期末考试题及部分考研试题，以使读者明确考点，做到心中有数、有的放矢，着重于明确解题思路，揭示解题规律. 课后习题解答部分，按照习题所在章节，提供了与教材内容相一致的解题方法，对于部分习题可能遇到的困难或一题多解的情形，尽可能地加以说明，以提高读者解题方法的多样性和灵活性.

本书编写力求做到层次分明、步骤清晰，书写格式规范，使读者通过学习，能够对"复变函数"的理论和方法有更深入的理解.

全书共分6章,第1章由李昌兴编写,第2章由焦烨编写,第3,4章由章虎冬编写,第5,6章由史克岗、雷飞燕编写,全书由李昌兴、史克岗统稿、定稿.

在本书的编写过程中,参阅了大量国内同类教材及相关辅导书,得到了启迪和教益,谨向有关作者深致谢意!

由于水平有限,疏漏、不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2010年4月

目　录

第1章

复数与复变函数

1.1 重点及知识点辅导与精析

1.1.1 复数及其代数运算

1. 复数的概念

对任意两个实数 x 和 y，称 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，x,y 分别称为 z 的实部与虚部，记作 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$.

(1) 两个复数相等，当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

(2) 一个复数 z 等于 0，当且仅当它的实部和虚部同时等于 0.

(3) 任意两个复数不能比较大小.

2. 复数的代数运算

(1) 四则运算. 两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法、减法及乘法规则如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

可推知

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

(2) 共轭复数及性质. 把实部相同而虚部绝对值相等，且符号相反的两个复数称为共轭复数. $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数记为 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

性质 1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$，$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；

2) $\bar{\bar{z}} = z$；

3) $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$；

4) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$，$z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

1.1.2 复数的几何表示

1. 复平面

(1) 复平面. 复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x, y) 唯一确定，即对于平面上给定的直角坐标系，复数的全体与该平面上的点构成一一对应关系，从而复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以用该平面上的点的坐标 (x, y) 来表示. x 称为实轴，y 称为虚轴，两坐标轴所在平面称为复平面.

(2) 复数的向量. 在复平面上，从原点到复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 对应的点 P 所引的向量 $\boldsymbol{OP}$ 与这个复数也构成一一对应关系，从而复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以用向量 $\boldsymbol{OP}$ 来表示. 这种对应关系使得复数加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.

(3) 复数的模与辐角.

定义 1 向量 $\boldsymbol{OP}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值，记作 $|z|$ 或 r，即

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

模的简单关系式

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$$

$$|z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

$$z\bar{z} = |z^2| = |z|^2, \; |z| = |\bar{z}|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

定义 2 当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示 z 的向量 $\boldsymbol{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为辐角，记作 $\mathrm{Arg}z$，并且 $\tan(\mathrm{Arg}z) = \frac{y}{x}$.

【注】 任何一个复数 $z(z \neq 0)$ 有无穷多个辐角，满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记作 $\theta_0 = \arg z$，同时 $\mathrm{Arg}z = 2k\pi + \arg z$，$k$ 为任意整数；复数 $z = 0$ 的辐角不确定. 另外，按下列关系式求辐角主值：

$$
\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一、四象限时}\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限时}\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限时}\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } z \text{ 在虚轴上时}\\ 0, & \text{当 } z \text{ 在负实轴上时}\end{cases}
$$

(4) 复数的三角表示式与指数表示式.

三角表示式为 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

指数表示式为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

2. 复球面

(1) 复球面.用以表示复数的球面称为复球面.

(2) 扩充复平面.包含无穷远点在内的复平面.

(3) 关于 ∞ 的四则运算的规定.

加法: $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty\quad(\alpha\neq\infty)$

减法: $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty\quad(\alpha\neq\infty)$

乘法: $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty\quad(\alpha\neq 0)$

除法: $\dfrac{\alpha}{\infty}=0,\quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty(\alpha\neq\infty),\quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty(\alpha\neq 0)$

1.1.3 复数的乘幂与方根

1. 积与商

定理 1 两个复数乘积的模等于它们模的乘积;两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理 2 两个复数商的模等于它们的模的商;两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$,$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,那么

$$
z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq 0)
$$

【注】 复数 z_1 乘以复数 z_2 在几何上相当于把向量 z_2 逆时针旋转一个角

度 $\text{Arg}z_1$，并把 z_2 的模伸缩了 $|z_1|$ 倍. 特别当 $|z_1|=1$ 时，乘法相当于将向量 z_2 旋转. 因此，在解决某些具体问题中需要对向量进行旋转，则可采用复数乘法的运算. 对于除法亦有类似的几何解释.

2. 幂与根

n 个相同的复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂. 若复数 w 的 n 次幂等于复数 z，则称 w 为 z 的 n 次方根.

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$$

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$.

1.1.4 区域

1. 区域的概念

(1) 邻域. 由不等式 $|z-z_0|<\delta(\delta>0)$ 所确定的复平面点集（简称点集），就是以 z_0 为原心，δ 为半径的圆的内部，称为点 z_0 的 δ-邻域. 如果 z_0 不属于其自身的 δ-邻域，则称该邻域为 z_0 的去心 δ-邻域.

(2) 内点、开集. 设 G 为一平面点集，z_0 为 G 中任意一点. 如果存在 z_0 的一个邻域，该邻域内的所有点都属于 G，那么称 z_0 为 G 的内点. 如果 G 内的每个点都是它的内点，那么称 G 为开集.

(3) 区域、边界. 平面上点集 D 称为一个区域，如果它满足下列两个条件：

1) D 是一个开集；

2) D 是连通的.

设 D 为复平面内一个区域，如果点 P 不属于 D，但在 P 的任意小的邻域内总包含有 D 中的点，那么称 P 为 D 的边界点. D 的所有边界点组成 D 的边界.

2. 单连通区域与多连通区域

复平面上的一个区域 B，如果在其中作任一条简单闭曲线①，而曲线的内部总属于 B，就称为单连通区域. 一个区域如果不是单连通区域，就称为多连

---

① 没有重点的连续曲线称为简单曲线，起点与终点重合的简单曲线称为简单闭曲线.

通区域.

1.1.5 复变函数

1. 复变函数的定义

设G是复数$z=x+\mathrm{i}y$的集合，如果有一个确定的法则，按照这个法则，对于集合G的每一个复数z，都有一个或几个复数$w=u+\mathrm{i}v$与之对应，那么称复数w是复数z的函数，也称为复变函数，记作$w=f(z)$.

2. 映射的概念

复变函数$w=f(z)$也可看成是z平面上的点集G到w平面上的点集$G^*=\{w \mid w=f(z), z\in G\}$的一种对应，把由$w=f(z)$所确定的这种对应称为映射. 具体地说，复变函数$w=f(z)$给出了从$z$平面上的点集$G$到$w$平面上的点集$G^*$间的一个对应关系. 与点$z\in G$对应的点$w=f(z)$称为点$z$的像，同时点$z$就为点$w=f(z)$的原像.

【注】 复变函数是高等数学中函数定义的推广，二者定义之间的表述没有本质区别，只要将定义中的“实数”换为“复数”. 但需要注意：① 高等数学中的函数通常是单值函数，而复变函数有单值函数与多值函数之分；② 在几何上，复变函数$w=f(z)$不仅可以把z平面上的点映射成w平面上的点，而且把z平面上的曲线或图形映射成w平面上的曲线或图形，实现两个不同平面上图形之间的转换，为研究或化简某些问题提供了可能；③ 复变函数对应着两个二元实函数，所以，可将对复变函数的研究转化为对两个二元实函数的研究.

1.1.6 复变函数的极限和连续性

1. 函数的极限

定义 3 设复变函数$w=f(z)$在z_0的去心邻域$0<|z-z_0|<\rho$内有定义，如果有一个确定的数A存在，对于任意给定的$\varepsilon>0$，相应地有一个正数$\delta(\varepsilon)(0<\delta\leqslant\rho)$，使得当$0<|z-z_0|<\delta$时，有$|f(z)-A|<\varepsilon$，那么称$A$为$f(z)$当$z$趋向于$z_0$时的极限，记作$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

定理 3 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，那么

$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$$

定理 4 如果$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,那么

1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$;

3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

【注】 复变函数的极限是一元实函数极限的定义的推广,定义表述形式相似. 因此,可以模仿高等数学中的方法证明复变函数极限的相关命题. 但是,复变函数极限定义从本质上比一元实函数极限定义要求苛刻得多. 在讨论一元实函数的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时,只要当 x 在 x 轴上沿 x_0 的左、右两侧以任意方式趋于 x_0 时,$f(x)$ 趋于同一个常数,那么极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$就存在且等于这个常数. 但是,在讨论复变函数$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$的极限时,则要求 z 在 z_0 的邻域内从任意方向以任何方式趋于 z_0 时,$f(z)$ 趋于同一个常数,这时才能说该极限存在. 因此,当 z 沿两条不同路径趋于 z_0 时,$f(z)$ 趋于两个不同的常数,那么该极限一定不存在. 这一点与高等数学中二元实函数的极限类似. 关于连续性的问题亦如此.

2. 函数的连续性

定义 4 如果$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,那么称 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续,那么称 $f(z)$ 在区域 D 内连续.

定理 5 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是:$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在(x_0,y_0)处连续.

定理 6 1) 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(分母在 z_0 不为零)在 z_0 处连续.

2) 如果函数 $h=g(z)$ 在点 z_0 处连续,函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 处连续,那么复合函数 $w=f[g(z)]$ 在点 z_0 处连续.

1.2 难点及典型例题辅导与精析

例1 试确定$\dfrac{z+2}{z-1}$的实部与虚部.

分析 考虑将$z=x+\mathrm{i}y$代入原式，且分子、分母同乘以分母的共轭复数.

解 设$z=x+\mathrm{i}y$，那么

$$\frac{z+2}{z-1}=\frac{(x+\mathrm{i}y)+2}{(x+\mathrm{i}y)-1}=\frac{[(x+2)+\mathrm{i}y][(x-1)-\mathrm{i}y]}{[(x-1)+\mathrm{i}y][(x-1)-\mathrm{i}y]}=$$

$$\frac{[(x+2)(x-1)+y^2]+[-(x+2)y+(x-1)y]\mathrm{i}}{(x-1)^2+y^2}=$$

$$\frac{x^2+x+y^2-2}{(x-1)^2+y^2}+\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}\mathrm{i}$$

所以

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{x^2+x+y^2-2}{(x-1)^2+y^2},\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

例2 求下列复数的模与辐角.

(1)$z=\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$；　　(2)$z=\dfrac{1+\mathrm{i}\tan x}{1-\mathrm{i}\tan x}\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

分析 通常做法是先将z化为代数形式$z=x+\mathrm{i}y$，然后利用模与辐角的计算公式. 而比较好的做法是利用复数的乘法、除法关于模及辐角变化的规律直接进行计算.

解 (1) 方法一：将z化为代数形式$z=x+\mathrm{i}y$.

$$z=\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i})^2}{[(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})][(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})]}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

所以

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,\quad \arg z=\arctan\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{Arg}z=2k\pi+\arg z=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

方法二：利用复数的乘法、除法关于模及辐角变化的规律直接进行计算.

$$|z|=\left|\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\right|=\frac{|(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})|}{|(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})|}=\frac{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|\cdot|1+\mathrm{i}|}{|\sqrt{3}+\mathrm{i}|\cdot|1-\mathrm{i}|}=1$$

$$\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=$$

$$\mathrm{Arg}(\sqrt{3}-\mathrm{i})+\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i})-\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})-\mathrm{Arg}(1-\mathrm{i})=$$

$$\left(2k_1\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\left(2k_2\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\left(2k_3\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\left(2k_4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad(k=k_1+k_2-k_3-k_4,k_i\in\mathbf{Z},i=1,2,3,4)$$

(2) 方法一：

$$z=\frac{1+\mathrm{i}\tan x}{1-\mathrm{i}\tan x}=\frac{(1+\mathrm{i}\tan x)^2}{(1-\mathrm{i}\tan x)(1+\mathrm{i}\tan x)}=$$

$$\frac{1-\tan^2 x+2\mathrm{i}\tan x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x$$

那么

$$|z|=\sqrt{[\cos 2x]^2+[\sin 2x]^2}=1,\quad \arg z=2x$$

$$\mathrm{Arg}z=2k\pi+\arg z=2k\pi+2x\quad(k\in\mathbf{Z})$$

方法二：

$$|z|=\left|\frac{1+\mathrm{i}\tan x}{1-\mathrm{i}\tan x}\right|=\frac{|1+\mathrm{i}\tan x|}{|1-\mathrm{i}\tan x|}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=1$$

$$\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}\frac{1+\mathrm{i}\tan x}{1-\mathrm{i}\tan x}=\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i}\tan x)-\mathrm{Arg}(1-\mathrm{i}\tan x)=$$

$$[2k_1\pi+\arctan(\tan x)]-[2k_2\pi+\arctan(-\tan x)]=$$

$$2k\pi+2x\quad(k=k_1-k_2,k_1,k_2\in\mathbf{Z})$$

例 3 将复数 $z=1-\sin 2-\mathrm{i}\cos 2$ 化为三角表示式和指数表示式.

分析 将复数 z 化成三角表示式与指数表示式的关键在于求出复数 z 的模及辐角主值，特别注意反正切函数的主值范围.

解 由已知条件

$$|z|=\sqrt{(1-\sin 2)^2+(-\cos 2)^2}=\sqrt{2-2\sin 2}=\sqrt{2}(\sin 1-\cos 1)$$

又因为 $1-\sin 2>0$，$-\cos 2>0$，所以

$$\arg z=\arctan\frac{-\cos 2}{1-\sin 2}=\arctan\frac{-\sin\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$\arctan\left[-\tan\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\arctan\left[\tan\left(\pi-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]=$$

$$\arctan\left[\tan\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)\right]=\frac{3\pi}{4}-1$$

因此,复数 z 三角表示式为

$$z=\sqrt{2}(\sin1-\cos1)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)\right]$$

指数表示式为

$$z=\sqrt{2}(\sin1-\cos1)\mathrm{e}^{\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)\mathrm{i}}$$

例 4 若复数 $-2+\mathrm{i}$ 和 $-3-\mathrm{i}$ 对应的辐角主值分别为 β 和 α,求 $\beta-\alpha$.

分析 注意使用复数除法关于辐角变化的规律以及辐角主值的范围.

解 由于

$$\frac{-2+\mathrm{i}}{-3-\mathrm{i}}=\frac{(-2+\mathrm{i})(-3+\mathrm{i})}{(-3-\mathrm{i})(-3+\mathrm{i})}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

所以

$$\mathrm{Arg}\frac{-2+\mathrm{i}}{-3-\mathrm{i}}=\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2k\pi-\frac{\pi}{4}$$

注意到 $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$,所以 $\pi<\beta-\alpha<2\pi$,从而 $\beta-\alpha=\frac{7\pi}{4}$.

【注】 两个复数商的辐角主值不一定等于被除数与除数辐角的主值之差.

例 5 计算 $\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^{20}$ 的值.

分析 关于复数高次幂的计算通常是先把复数转化为三角表示式或指数表示式.

解 由于

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$$

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$$

所以

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^{20}=\left(\frac{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}\right)^{20}=\mathrm{e}^{\frac{20\pi}{3}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{6\pi\mathrm{i}+\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}=$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

例 6 如图 1-1 所示,设 z_1,z_2,z_3,z_4 是正方形的 4 个顶点,且 $z_1=-\mathrm{i}$,

$z_3 = 2 + 5\mathrm{i}$，试求 z_2, z_4.

分析 利用正方形的几何性质及复数乘法关于辐角变化的规律.

解 由已知条件 $z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3) = 1 + 2\mathrm{i}$，那么

$$z_2 - z_0 = (z_3 - z_0)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = (1+3\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 3 - \mathrm{i}$$

$$z_4 - z_0 = (z_3 - z_0)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = (1+3\mathrm{i})\mathrm{i} = -3 + \mathrm{i}$$

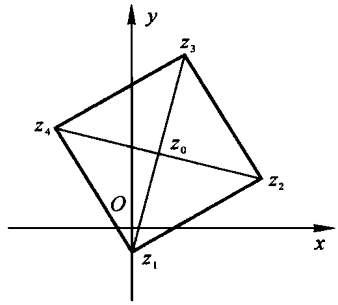


图 1-1

从而

$$z_2 = z_0 + (3 - \mathrm{i}) = 4 + \mathrm{i}, \quad z_4 = z_0 + (-3 + \mathrm{i}) = -2 + 3\mathrm{i}$$

例 7 对于任意两个不同的复数 z_1, z_2.

(1) 证明 $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$；

(2) 试就 z_1, z_2 与单位圆周 $|z| = 1$ 的不同位置关系，分别说明复数 $z_0 = \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ 与单位圆周的位置关系.

分析 这是关于复数模的一个恒等式，所以需要使用等式 $z\bar{z} = |z|^2$. 如果将 $z = x + \mathrm{i}y$ 代入后化简，将会很烦琐，有兴趣的读者不妨一试.

证 (1) 因为

$$\begin{aligned}|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - \bar{z}_1 z_2)\overline{(1 - \bar{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = \\ &(1 - \bar{z}_1 z_2)(1 - z_1 \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = \\ &1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 z_1 \bar{z}_2 - [z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2] = \\ &1 + |z_1|^2 |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)\end{aligned}$$

所以

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

(2) 若 z_1 与 z_2 都在单位圆内或者单位圆外，则 $|z_1| < 1, |z_2| < 1$ 或者 $|z_1| > 1, |z_2| > 1$. 由

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

得 $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 > 0$，即 $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| < 1$，所以 $z_0 = \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ 在单位圆内.

若 z_1 与 z_2 一个在单位圆外，一个在单位圆内，则有 $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| > 1$，即 $z_0 = \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ 在单位圆外.