

A series of concentric circles in a light blue color, centered on the page, creating a ripple effect.

声学译丛

水声学

4

上海市物理学会声学工作委员会主編
上海市科学技术編译館出版

声学译丛 (总第20号)

水 震 害

(3)

上海市物理学会声学研究委员会编

上海市科学技术翻译馆出版

(上海南京路49号)

商务印书馆上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本787×1092 1/16 印张3 1/2 字数200,000

1956年3月第1版 1956年3月第1次印刷

印数 1-900

编号 15-366 定价(科七) 1.20元

目 录

水 声 物 理

1. 水下声道中的平均場..... Л. М. Бреховских (1)
2. 在非均匀介质中傳播的射綫的計算..... В. А. Елисеєвни (7)
3. 由海底反射引起的脈冲波的相位失真..... В. F. Cron 等 (10)
4. 海洋中信号傳輸的再現性..... А. Paryulescu 等 (16)
5. 海洋声道的細密結構和穩定性..... А. T. Piip (20)
6. 空間相关的理論值和实验值的比較..... В. F. Cron 等 (25)
7. 淡水和海水中硫酸鎂电离度弛豫時間溫度关系的計算..... В. П. Глотов (31)
8. 回声的产生及其結構..... А. Freedman (36)
9. 換能器的移动速度对海底散射信号結構的影响..... В. G. Hurdle 等 (57)
10. 声在含有共振散射体的海面附层的相干反射..... В. П. Глотов 等 (62)
11. 混响噪声的理論模型..... P. Faure (66)
12. 随机过程的“归一”譜..... В. С. Курбанов (72)
13. 直綫布障在随机傳播介质中的接收特性..... G. B. Lord 等 (74)
14. 脈冲在介质随机不均匀性影响下的傳播..... Т. А. Широкова (78)
15. 研究波源海面反射声信号結構和接收起伏空間相关的某些实验..... Э. П. Гулин 等 (81)
16. 随机不均匀介质的自相关..... C. Comstock (84)
17. 用調頻声信号研究随机不均匀介质統計性质的方法..... Г. А. Андреев 等 (86)

水 声 技 术

18. 不等間距单元的同平面基陣..... M. I. Skolnik 等 (91)
19. 偵察和識別水下目标的統計理論..... A. A. Wolf (101)
20. 水下火花放电的声脈冲波形的預計..... D. D. Caulfield (107)
21. 管节組合式机电系統的理論..... G. E. Martin (112)
22. 应用磷酸二氫鈣 (ADP) 作为电声換能元件..... 塘 正夫 (116)
23. 两端封閉的充液式陶瓷圓管水听器的灵敏度..... G. W. McMahon (124)
24. 改进的水下溫度記錄器及海洋溫度的測量..... W. J. Leiss 等 (126)
25. 声学深度遙測仪..... M. J. Tucker 等 (129)
26. 海洋学研究用的水下双調頻遙測系統..... D. E. Campbell 等 (134)

水下声道中的平均場

Л. М. Бреховских

水下声道中的声場通常是由大量射线或简正波迭加而成，在这种情况下声压振幅的空间变化十分复杂。按产生的原因，可将声压的空间变化分为四类：

(1) 声場干涉结构所引起的空间变化。这类变化的最小尺度为 λ/x_{\max} 的量级，此处 λ 为波长， x_{\max} 为陷于声道内的射线的最大掠射角；

(2) 声场的区域性结构所引起的变化。亮区与几何影区可能交替出现，在射线近似下几何影区中声强为零。海洋中这类变化的尺度常达数十公里；

(3) 在声道横截面上声场也有显著变化。特别是如果辐射器位于声道轴附近，则声强在靠近声道轴的区域最大，向上或向下离开声道轴时声强减小。这类变化的尺度与海深同量级，而在表面声道的情况下与声道宽度同量级；

(4) 最后，由于柱面扩散以及介质中的声吸收，声场随距离的增加而减小。

在研究海中声传播的多次实验中都没有探寻到声场的干涉结构，因此本文也不拟在此讨论。如假定各条射线是非相干的（也就是按能流迭加），则在理论计算中消除了干涉结构，在一定的意义下将得到“模糊了”干涉图样的平均场。在足够远的距离上，场的区域性结构亦被搞模糊，关于这些我们也不予讨论。因此，在远距离上我们将得到声强随距离下降并在声道轴横截面上具有确定分布的某种极限规律。本文的目的就是寻求这种规律^①。

我们假定辐射是稳定的（单频或窄频带噪声）。对于宽频带脉冲辐射情况（如爆炸声源），如果沿整个信号的持续时间积分窄频带范围内的能量，则所得的结果仍然适用。

基于射线概念推导基本公式

设声速由函数 $c(z)$ 给出，在声道轴 $z=z_0$ 具有唯一的极小值。设辐射器位于水平面 z_1 (图1)，我们来讨论以任意角度 x_1 从辐射器发出的射线。假设声波的波长足够短，以满足射线声学的适用条件。用 z' 与 z'' 表示射线变为水平方向时所处的水平面。

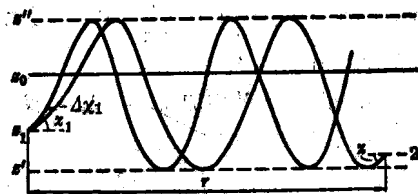


图 1

另一条以角度 $x_1 + 4x_1$ 发出的射线近似地在同样的水平面反转，此处 $4x_1$ 是有限的、而且很小的量。上述两条射线在一个循环上的水平距离相差也很小。然而，总可以找到离声源足够远的距离，在此距离上这两条射线沿水平方向相差一个整循环。因而在极限情况下，当 $r \rightarrow \infty$ 时，总有某条射线到达层 $z' \leq z \leq z''$ 中任一点，此射线是包含在上述二条射线所夹的线束内的。

我们先假定辐射器是无方向性的，用 W 表示其功率。所讨论的问题具有柱对称性，对称轴是通过声源的铅直轴 (z 轴)。我们来分析开角为 $4x_1$ 的平面束围绕 z 轴旋转所形成的射线束。此射线束具有立体角 $2\pi \cos x_1 4x_1$ ，束中能流与 W 之比等于立体角与 4π 之比，因而能流等于 $W \cos x_1 4x_1/2$ 。向下以接近于 x_1 的角度从声源发出的类似的射线束，也在水平面 z' 与 z'' 反转，并包含有相同的能流。两射线束的总能流为 $W \cos x_1 4x_1$ ，它们以某种确定的方式分布于层 $z' \leq z \leq z''$ 中。用 ΔI_0 表示上述能流在声道轴上的声强， ΔI 表示任一水平面 z 上的声强。显然有 $\Delta I/\Delta I_0 = f/f_0$ ，此处 f 与 f_0 分别为水平面 z 与 z_0 上、距离为 r 处射线的聚焦因子。

根据文献[2] (见文献第38节)，我们将远距离的聚焦因子的公式写为：

$$f(z, z_1, x_1, r) = r \cos x_1 / \sin x \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (1)$$

这里 x 是射线在水平面 z 的掠射角。另一方面，我们有：

① 某些结果的简述可参阅文献[1]，但需注意，那里采用的某些符号与本文不同

$$r = ND + \varphi(z, z_1, x_1) \quad (2)$$

式中 $D = D(z_1, x_1)$ 为射线在一个整循环上的距离, N 为整数, 而 $\varphi(z, z_1, x_1)$ 为一不大于 D 的量。

当距离足够远时, 也就意味着 N 很大, 这时可忽略小的附加项 φ , 并可设 $r = ND$ 。微分 (2) 得

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = N \frac{\partial D}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

根据同样的理由, 可忽略上式右端第二项。但散焦面的邻域例外。在散聚面上 $\frac{\partial r}{\partial x_1} = 0$, 因而上式右端两项的绝对值相等, 符号相反。

散焦面的面积随 N 增加而无限减小, 我们不讨论散焦面及其某邻近区域, 于是可设

$$f = D \cos x_1 / \sin x \frac{\partial D}{\partial x_1} \quad (3)$$

这里 D 及 $\frac{\partial D}{\partial x_1}$ 皆与 z 无关。对于上述所有射线, 它在声源的出射角皆可取作 x_1 , 因而在 f 的表式中仅 $\sin x$ 与 z 有关, 故得

$$\Delta I = \Delta I_0 \frac{f}{f_0} = \Delta I_0 \frac{\sin x_0}{\sin x} \quad (4)$$

式中 x_0 与 x 分别是所讨论的射线在声道轴与 z 平面上的掠射角。角 x_0 、 x_1 与 x 之间的关系为

$$\frac{\cos x_0}{c_0} = \frac{\cos x_1}{c_1} = \frac{\cos x}{c} \quad (5)$$

式中 c_0 与 c_1 分别是声道轴与 z_1 平面上的声速。

取一铅直轴通过声源、半径为 r 的柱面。显然, 对于在平面 z 与 $z+dz$ 之间的柱面元, 通过它的能量流为 $2\pi r \Delta I \cos x dz$ 。在区间 (z', z'') 内对此式求积分, 就得到通过整个圆柱侧面的能量流。按照能量守恒定律, 此能量流应等于前述两元线束中的能量, 并加上由吸收引起的衰减因子 e^{-ar} 。于是, 能量守恒关系就表为:

$$2\pi r \int_{z'}^{z''} \Delta I \cos x dz = W \cos x_1 \Delta x_1 e^{-ar}$$

代入 ΔI 的表式 (4), 将 ΔI_0 提出积分号之外, 得:

$$\Delta I_0 = \frac{W \cos x_1 e^{-ar} \Delta x_1}{\pi r \sin x_0 D(x_0)} \quad (6)$$

式中

$$D(x_0) = 2 \int_{z'}^{z''} \frac{dz}{\operatorname{tg} x} \quad (7)$$

量 $D(x_0)$ 是以掠射角 x_0 穿过声道轴的射线, 在一个循环上的水平距离。它是波导的重要特征, 只要给出声速分布 $c(z)$, 就可以确定 $D(x_0)$ 。由公式 (6), 并利用关系 (4), 就得到任一水平面 z 上的 ΔI 值。对于水平面 z 上的总声强, 我们得到如下表式:

$$\begin{aligned} I(z, r) &= \int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}} \frac{\Delta I}{\Delta x_1} dx_1 = \int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}} \frac{\Delta I_0}{\Delta x_1} \frac{\sin x_0}{\sin x} dx_1 \\ &= \frac{W}{\pi r} \int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}} \frac{\cos x_1 e^{-ar}}{\sin x D(x_0)} dx_1 \\ &= \frac{W c_1}{\pi r c} \int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}} \frac{e^{-ar} dx_1}{\operatorname{tg} x D(x_0)} \quad (8) \end{aligned}$$

在求此积分时 x_0 通过关系 (5) 被表成 x_1 的函数。角 $x_{1\max}$ 是那一类射线的最大掠射角, 这类射线从声源发出后始终保留在波导内。

为确定起见, 我们暂设 $c_1 < c_0$, 即辐射器水平面的声速比接收器小。在这种情况下, 以零或小掠射角从声源发出的射线, 将在比接收器更为靠近声道轴的水平面反转, 因而不会碰到接收器。对于能够达到 z 平面的射线, 其最小掠射角 $x_{1\min}$ 由公式 (5) 求得; 这时在公式中必须取 $x_1 = x_{1\min}$, $x = 0$, 于是得

$$\cos x_{1\min} = \frac{c_1}{c_0} \quad (9)$$

我们假定, 公式 (8) 中的系数 α 与角 x_1 无关; 于是指数因子可提出积分号外。引入下列符号是有益的:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{W c_1}{\pi r c} \int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}} \frac{dx_1}{\operatorname{tg} x D(x_0)} \quad (10)$$

于是, 有

$$I(z, r) = \frac{W c_1}{4\pi r_0 r c} e^{-ar} \quad (11)$$

如果设想在距离 r_0 之前按球面规律传播, 其后按柱面规律传播, 则可得到任一距离 r 处的声强。将 (11) 写为下列形式, 则可看出这一点:

$$I = \frac{r_0 c_1 e^{-ar}}{r c}$$

上式中第一项给出按球面传播时 r_0 处的声强, 第二项给出 $r > r_0$ 时由柱面传播引起的衰减因子 c_1/c_0 十分接近于 1, 故 r_0 在计算上是很重要的。但 r_0 的意义为在距离 r_0 处按柱面传播规律, 求出总声强点也是有益的。我们仅限于 z 与 z_1 。

公式 (8) 可顺利地推广到方向性传播的情况。设辐射器的方向性由某一函数 $\Phi(x_1)$ 表示, 于是

① 这个假定不总是成立的。特别如波导中的传播, 当衰减是由不平表面的散射所引起时, 这个假定就不成立。

- ① 原文误印为 f ——译者注
- ② 原文误印为 dx ——译者注
- ③ 原文误印为 x_1 ——译者注
- ④ 此式原文排列不妥, 已作了修改——译者注
- ⑤ 此句原文有誤, 已作了修改——译者注
- ⑥ 原文误印为 v_0 ——译者注

$$I(s, r, \varphi) = \frac{W c_1}{\pi r c} \int_{x_{1\min}}^{x_{1\max}} \frac{\Phi(x_1, \varphi) e^{-\alpha r} dx_1}{\operatorname{tg} \chi D(x_0)} \quad (12)$$

这里假定

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(x_1, \varphi) \cos x_1 \ominus d\varphi dx_1 = 4\pi$$

而 W 与前面一样, 是辐射器的总功率。

可以将表式(10)变为对辐射器与接收器对称的形式。借助于公式(5)用 x_0 代替积分变量 x_1 , 得到

$$\frac{1}{r_0} = \frac{2c_1 c}{c_0^2} \int_{x_{0\min}}^{x_{0\max}} \frac{\sin 2x_0 \ominus dx_0}{\sin x_1 \sin \chi D(x_0)} \quad (13)$$

此式在交换 $x_1 \longleftrightarrow \chi$, $c_1 \longleftrightarrow c$ 时不变。

积分上限 $x_{0\max}$ 是保持在波导内的射线在声道轴的最大掠射角。积分下限 $x_{0\min}$ 是: 既经过辐射器又经过接收器的射线在声道轴的最小掠射角。由于公式(13)对辐射器与接收器对称, 可假定辐射器比接收器离开声道轴远, 即 $c_1 > c$, 而不失一般性。此时由关系式(5)得

$$\cos x_{0\min} = c_0/c_1 \quad (14)$$

现在较仔细地来分析积分(7)。我们一般假定: 在声道轴 $z=z_0$ 的区域有一厚度 $2H$ 的层, 其中声速为常数。在此层中 $\chi=x_0$, 在层内的积分等于 $2H/\operatorname{tg} x_0$ 。剩下还需要计算 z' 到 z_0-H 与 z_0+H 到 z'' 的积分。由公式(5)得

$$\frac{dz}{\operatorname{tg} \chi} = -c \left(\frac{dc}{dz} \right)^{-1} d\chi$$

将区间 (z_0+H, z'') 上对 z 的积分变换为相应的区间 $(0, x_0)$ 上对 χ 的积分, 得到:

$$\int_{z_0+H}^{z''} \frac{dz}{\operatorname{tg} \chi} = \int_0^{x_0} c \left(\frac{dc}{dz} \right)^{-1} d\chi$$

z 轴认为是朝上的, 在声道轴之下 $dc/dz < 0$, 完全类似地有

$$\int_{z'}^{z_0-H} \frac{dz}{\operatorname{tg} \chi} = -\int_0^{x_0} c \left(\frac{dc}{dz} \right)^{-1} d\chi = \int_0^{x_0} c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} d\chi$$

式中 $|dc/dz|$ 表示声速梯度的绝对值。考虑到以上所述, 最后得:

$$D(x_0) = \frac{4H}{\operatorname{tg} x_0} + 2 \int_0^{x_0} \left[\left(c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} \right)_1 + \left(c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} \right)_2 \right] d\chi \quad (15)$$

计算此积分时每一 χ 对应有二个 z 值, 它们由关系 $c(z) = (c_0/\cos x_0) \cos \chi$ 确定, 其中一个位于区域 (z_0+H, z'') , 另一个在区域 (z', z_0-H) ; 相应的 $c|dc/dz|^{-1}$ 值分别注以脚标 1 与 2。

现在可以指出, 从波动概念出发, 用简正波强度迭加的方法可以得式(13)等公式。这时单个简正波

的声场在 BKB 近似下进行计算。

最简形式的声道

一种最简声道的声速由下列公式给出:

$$\left. \begin{aligned} c &= c_0 & -H \leq z \leq H \\ c &= c_0[1 + a_2(z-H)] & z \geq H \\ c &= c_0[1 - a_1(z+H)] & z \leq -H \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在这种情况下, 同时考虑到公式(5), 有

$$\left. \begin{aligned} z < -H, \quad \left| \frac{dc}{dz} \right| &= c_0 a_1; \quad \left(c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} \right)_1 = \frac{\cos \chi}{a_1 \cos x_0} \\ z > H, \quad \left| \frac{dc}{dz} \right| &= c_0 a_2; \quad \left(c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} \right)_2 = \frac{\cos \chi}{a_2 \cos x_0} \end{aligned} \right\}$$

与此同时, 公式(15)将变为

$$D(x_0) = \frac{4H}{\operatorname{tg} x_0} + \frac{4\operatorname{tg} x_0}{g}; \quad \frac{2}{g} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \quad (17)$$

在 $c_1 > c$ 的假设下利用公式(10), 这时 $x_{1\min} = 0$,

$x_{1\max} = \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\frac{1}{r_0} = g \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg} x_0}{\operatorname{tg} \chi} \frac{d\chi_1}{p + \operatorname{tg}^2 x_0}; \quad p = gH \quad (18)$$

上式中 x_0 与 χ 应借助于关系(5)用 x_1 表示, 例如:

$$p + \operatorname{tg}^2 x_0 = \frac{1}{\cos^2 x_1} \left[\frac{c_1^2}{c_0^2} - (1-p) \cos^2 x_1 \right] \quad (19)$$

设接收器位于均匀层 $-H < z < H$ 内, 于是 $\chi=x_0$, 公式(18)就变为:

$$\frac{1}{r_0} = g \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x_1 d\chi_1}{(c_1^2/c_0^2) - (1-p) \cos^2 x_1} = \frac{g}{p-1} \int_0^{\pi/2} d\chi_1 + \frac{g c_1^2}{c_0^2 (1-p)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi_1}{(c_1^2/c_0^2) - (1-p) \cos^2 x_1}$$

再利用积分表^[3], 就得到:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\pi g}{2(1-p)} \left[\frac{c_1}{c_0 \sqrt{(c_1^2/c_0^2) + p - 1}} - 1 \right]$$

为确定起见, 我们设辐射器位于均匀层之下, 离均匀层下界面的距离为 $d = |z+H|$; 因此 $c_1/c_0 = 1 + a_1 d$ 。再假定 $a_1 d \ll 1$, $p = gH \ll 1$; 于是上式可简化为:

$$r_0 = (2/\pi g) \sqrt{2a_1 \ominus d + p} \quad (20)$$

对于辐射器位于均匀层的情况, 为了获得 r_0 , 只需在前式中令 $d=0$ 。于是

$$r_0 = (2/\pi) \sqrt{H/g} \quad (21)$$

最后, 如果声道是对称的, 则有 $g = a_1 = a_2 = a$ 。

图 2 上带有尖峰的曲线是对称声道中的声强 I 与均匀空间中的声强 $I_0 (= W/4\pi r^2)$ 之比, I 是用十

- ① 原文误印为 χ ——译者注
- ② 原文误印为 $\sin^2 x_0$ ——译者注
- ③ 原文误印为 g ——译者注

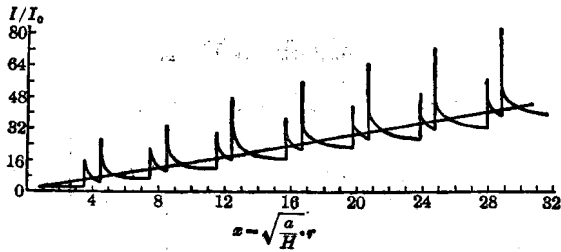


图 2

分冗繁的方法计算的：考虑了射线的聚焦因子，对各条射线的能量求和。横坐标表示无量纲的距离 $x=r\sqrt{a/H}$ 。曲线相应于辐射器位于声道轴、接收器位于均匀层内 $z=H/2$ 处。各尖峰相应于散焦面，这些尖峰的高度是对确定的频率计算得到的。声吸收没有被考虑。

倾斜的直线是借助于公式(11)以及 r_0 的表式(21)得到的。我们看出，它相当好地表示出声强的平均变化。

对于无量纲的坐标 $x=r\sqrt{a/H}$ ，转变距离 r_0 相应于 $x_0=2/\pi$ 。有益地指出， r_0 几乎等于第一个散焦面的距离(或者，射线经过上或下非均匀半空间的弯曲后，第一次返回均匀层的距离)的六分之一。

现在来讨论辐射器与接收器在上述最简单的声道中任意安置的情况。令 $n_1 = (c_1 - c_0)/c_0$ ， $n = (c - c_0)/c_0$ 。假设 n_1, n, p, x_0, x 及 x_1 皆很小，由公式(5)近似地得到：

$$\operatorname{tg} x_0 \approx x_0 \approx \sqrt{x_1^2 + 2n_1}; \operatorname{tg} x \approx x \approx \sqrt{x_1^2 + 2(n_1 - n)}$$

引入新的积分变量 $\xi = x_1/\sqrt{2n_1}$ 代替公式(18)中 x_1 。积分下限同样为 $\xi=0$ ；而积分上限，由于 $\sqrt{2n_1}$ 很小，可以取作无穷。现在可以将公式(18)写为如下形式：

$$\frac{1}{r_0} = \frac{g}{\sqrt{2n_1}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+\xi^2} d\xi}{\sqrt{[1-(n/n_1)] + \xi^2} \sqrt{[1+(p/2n_1) + \xi^2]}} \quad (22)$$

上式归结为椭圆积分。我们看出，如果 $n=n_1$ (也就是辐射器与接收器位于声速相等的水平面时)，则积分发散。它给出 $r_0=0$ 以及无限大的声强；这是自然的，因为这种情况意味着接收器位于散焦面上。

对于表面声道情况，假定水面是平的，而且声速梯度沿深度不变，我们来计算特征距离 r_0 。若在以上公式中令 $p=0, a_1=a_2=g=a$ ，我们就得到与轴 $z=0$ 对称的声道。如果再假定辐射器与接收器位于声道轴的同边(比如说在声道轴之下)，则所

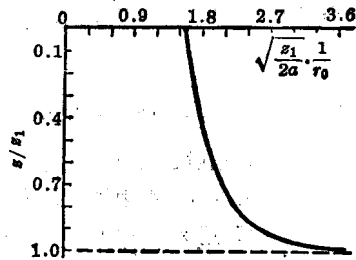


图 3

得到的对称声道与表面声道等价，仅有的差别是，表面声道中的声能为对称声道的两倍。这好象声道中的两半被合并在一起。与前面一样，可以按照公式(11)计算声强，而仅仅需要将 r_0 看成是由公式(22)所得到的一半。

$$\text{令 } k = \sqrt{n/n_1} = \sqrt{z/s_1} \quad (23)$$

于是，对表面声道我们得到：

$$\frac{1}{r_0} = \sqrt{\frac{2a}{z_1}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2} \sqrt{1-k^2+\xi^2}} = \sqrt{\frac{2a}{z_1}} K(k) \quad (24)$$

式中 $K(k)$ 为参数 k 的第一类完全椭圆积分^[4]。图3表示量 $\sqrt{(s_1/2a)} (1/r_0)$ 与 z/s_1 的关系。我们记得，这里假定了 $z < s_1$ 。若情况相反，则需交换辐射与接收点的位置。当 $z/s_1=1$ 时 r_0 趋于零，如前所述，这意味着接收器落在散焦面上。

声速分布的逐段直线近似

假设介质可分为一系列常速度梯度层，我们将得到任何分层介质中特征距离 r_0 的计算公式。我们重新利用公式(10)，并首先计算由积分(7)所确定的函数 $D(x_0)$ 。在下一积分中可将积分区间分为二段：从 z' 到 z_0 与从 z_0 到 z'' ，这里 z_0 是声速最小值的水平面(声道轴)。相应地，函数 $D(x_0)$ 被表为和式 $D(x_0) = D_1(x_0) + D_2(x_0)$ 。两个积分的计算完全一样，我们只计算第二个。

我们将声道轴之上的全部介质分为 n 层，用 $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ 表示各层的界面(图4)，并且使得 z_n 与声道的上边界重合。相应地用 c_0, c_1, \dots, c_n 表示这些界面上的声速，用 $a_i = (1/c_0)(dc/dz)$ 表示第 i ($= 1, 2, \dots, n$) 层中的相对声速梯度。

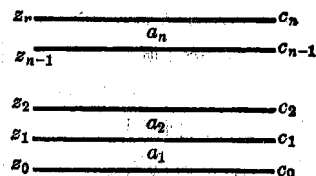


图 4

用下列关系给出 x_0 的 n 个值 x_{i0} :

$$\cos x_{i0} = \frac{c_0}{c_i}; \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (25)$$

对于角 x_0 的这些值, 我们来计算 $D_2(x_0)$ 。不难看出, 以角度 x_{i0} 与声道轴相交的射线在水平面 s_i 发生反轉。这时它以角度 x_{ik} 横穿各中間界面 s_k ($k=1, 2, \dots, i-1$), 而 x_{ik} 由下列关系确定:

$$\frac{\cos x_{ik}}{c_k} = \frac{\cos x_{i0}}{c_0}, \quad x_{ik}=0 \quad (26)$$

現在

$$D_2(x_{i0}) = 2 \int_0^{z_i} \frac{dz}{\operatorname{tg} x} = 2 \sum_{k=1}^i \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{dz}{\operatorname{tg} x} \quad (27)$$

而在标号为 k 的层中 x 与 z 有关系

$$\cos x = \frac{\cos x_{i0}}{c_0} c(z)$$

或微分得:

$$-\sin x dx = \frac{\cos x_{i0}}{c_0} \frac{dc}{dz} dz = \cos x_{i0} a_k dz$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{dz}{\operatorname{tg} x} &= \frac{1}{a_k \cos x_{i0}} \int_{x_{ik}}^{x_{i,k-1}} \cos x dx \\ &= \frac{\sin x_{i,k-1} - \sin x_{ik}}{a_k \cos x_{i0}} \end{aligned}$$

将此式代入(27)并考虑到 $x_{ik}=0$, 就得到:

$$\begin{aligned} D_2(x_{i0}) &= \frac{2}{\cos x_{i0}} \left[\frac{\sin x_{i0} - \sin x_{i1}}{a_1} \right. \\ &+ \frac{\sin x_{i1} - \sin x_{i2}}{a_2} + \dots + \frac{\sin x_{i,i-2} - \sin x_{i,i-1}}{a_{i-1}} \\ &\left. + \frac{\sin x_{i,i-1}}{a_i} \right] \end{aligned}$$

将声道的下一半适当地分为同样数目的层, 并使各层界面上的声速值与上半声道相同。于是, 计算 D_1 时我们将得到同样一组掠射角 x_{ik} , 所不同的只是各层中的声速梯度。我们用 b_1, b_2, \dots 表示下半声道中与 a_1, a_2, \dots 相对应的量。此外, 我们一般地假定, 在声道轴的区域有一厚度为 $2H$ 的均匀层, 它在 $D(x_0)$ 的表式中给出附加项 $4H/\operatorname{tg} x_0$ 。于是我们得到:

$$\begin{aligned} D(x_{i0}) &= \frac{4H}{\operatorname{tg} x_0} + \frac{2}{\cos x_{i0}} \left[\frac{1}{g_1} (\sin x_{i0} - \sin x_{i1}) \right. \\ &+ \frac{1}{g_2} (\sin x_{i1} - \sin x_{i2}) \\ &+ \dots + \frac{1}{g_{i-1}} (\sin x_{i,i-2} - \sin x_{i,i-1}) \\ &\left. + \frac{1}{g_i} \sin x_{i,i-1} \right] \quad (28) \end{aligned}$$

式中

$$\frac{1}{g_i} = \frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} \quad (29)$$

这样我们就在点 $x_0 = x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ 得到一系列 $D(x_{i0})$ 值, 只要 n 足够大, 在必要时就可以得到近似于 $D(x_0)$ 的足够平滑的函数。

我们用公式(10)来计算 r_0 。这里假定, 辐射器位于水平面 $z = z_l$, 而接收器位于水平面 $z = z_m$ 。可设 $l > m$, 而不失一般性。当 n 足够大时, 用求和代替积分可达到任意给定的准确度, 这时变量 x_1, x 及 x_0 依次取相应的值 x_{li}, x_{lm} 及 x_{i0} ($i=l, l+1, \dots, n$)。最后我们得到

$$\frac{1}{r_0} = 4 \sum_{i=l}^n \frac{x_{i+1,l} - x_{li}}{\operatorname{tg} x_{lm} D(x_{i0})} \quad (30)$$

对于上式仅需要补充说明 $l=m=0$ 的情况, 即辐射器与接收器位于均匀层之内或界面上。这里虽然 $x_{00}=0$, 但 $\operatorname{tg} x_{00} D(x_{00}) = 4H$ 。于是, 在公式(30)分出 $l=0$ 的项, 就得到:

$$l=m=0; \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{H} + 4 \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1,0} - x_{i0}}{\operatorname{tg} x_{i0} D(x_{i0})} \quad (31)$$

为说明起见, 对于如图5所示的声速分布, 我们援引了 r_0 的计算结果。在此图中 800 米上下深度比例相差 3 倍。计算时海洋的整个厚度被分为 25 层。其中在 740~890 米为等声速层。图6上横坐标表示 $J = 10 \lg \left(\frac{1}{r_0} \cdot 10^5 \right)$, 此处 r_0 以米为单位。连续曲线相应于辐射器位于均匀层之内的情況。如果接收器也在此层内, 则 $r_0 = 6.45 \cdot 10^3$ 米, $J = 19$ 。当接收器从均匀层移出时 r_0 急剧增加, 而 J 下降。当移到声道轴之上 $z = 100$ 米或声道轴之下 $z = 5200$ 米的深度时, J 的数值下降至 2, 而 r_0 增加到 6.31×10^4 米。与此相应, 声道轴上的声强与 100 米深度

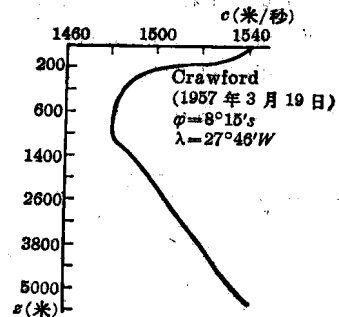


图 5

- ① 原文漏印 $\frac{dc}{dz}$ ——译者注
- ② 原文误印为“+”号 ——译者注
- ③ 原文误印为 2 ——译者注

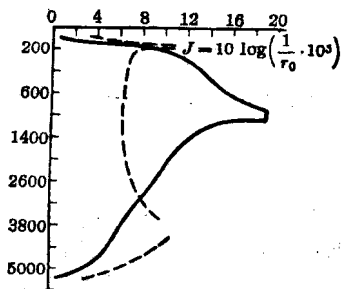


图 6

(或 5200 米深度)上的声强将相差 17 分贝。

虚线相应于辐射器位于 80 米深度的情况。声强的最大值出现在 80 米深度与 3800 米深度附近,此二深度的声速相同。在射线近似下,正好在这些深度上 J 的数值趋于无穷大。此同一虚线也相应于辐射器位于 3800 米深度的情况。

双声道中的平均场

设声速分布 $c(z)$ 如图 7a 所示。以下我们将利用下列术语:水平面 BB ——第一声道轴,水平面 DD ——第二声道轴, CC ——第一声道与第二声道的分界面,包含在水平面 AA 与 CC 之间的区域——第一声道区,包含在水平面 CC 与 FF 之间的区域——第二声道区,包含在水表面与 EE 之间的区域——总声道区。在图 7a 上,后者包括前二个区域。

这样一来,在图 7b 中,射线 $O_1M_1N_1$ 为第一声道的射线,射线 $O_2M_2N_2$ 为第二声道的射线,射线 O_1PQ 为总声道的射线。

此外,还引入符号: c_m ——总声道边界上的声速, c'_m ——第一声道与第二声道分界面上的声速。

不难看出,若 $c_m < c'_m$,则总声道不存在,这是因为 O_1PQ 那样的射线不存在。这种情况下,第一声道与第二声道中的传播将独立地进行,前几节所阐述的理论可分别应用到其中每一个声道。因此以下我们假定 $c_m > c'_m$,如图 7a 那样。

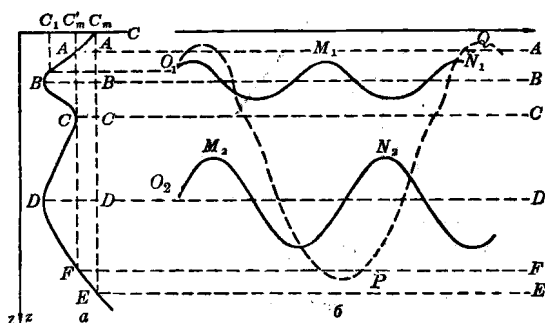


图 7

设辐射器位于第一声道内,这时第一声道中每一点的声场将由两部分组成。一部分是由第一声道的射线所引起,另一部分由总声道的射线所引起。如果辐射器①在第一声道之外,但在总声道范围内,则第一声道中的声场仅由总声道的射线所引起。辐射器位于第二声道内时有类似的情形。最后,如果辐射器位于总声道以内,但在第一声道和第二声道之外,则对任何接收位置,声场仅由总声道的射线所引起。这样一来,为了知道辐射器与接收器在总声道内任何位置时的平均场,除了前述几节的结果外,还需补充知道总声道的平均场,因为第一与第二声道的声场可用前面导出的单声道系统的公式计算。

仍然设辐射器水平面上的声速与射线的掠射角为 c_1 与 x_1 。显然,对于总声道的射线有:

$$\left. \begin{aligned} x_{1\min} &\leq x_1 \leq x_{1\max} \\ \text{这里} \\ x_{1\min} &= \arccos \frac{c_1}{c_m}; \quad x_{1\max} = \arccos \frac{c_1}{c'_m} \end{aligned} \right\} (32)$$

当 $x_1 < x_{1\min}$ 时,射线完全位于辐射器所在的那个声道内;当 $x_1 > x_{1\max}$ 时,总声道不能保留住射线。

为了计算总声道的声场(更确切地说,计算相应的特征距离),仍可应用公式(10)。在公式(10)中角 x_0 可理解为射线在第一与第二声道分界面上的掠射角,并且使:

$$\cos x_0 = \frac{c'_m}{c_1} \cos x_1 \quad (33)$$

函数 $D(x_0)$ 是相应的射线在一个循环上的距离,它仍由公式(7)进行计算,式中 z' 与 z'' 是位于总声道内、但在第一与第二声道区之外的射线的反转深度。公式(7)中角 x 与 x_0 的关系由类似于(33)的公式给出,只需在公式(33)中变换 $x_1 \rightarrow x$, $c_1 \rightarrow c(z)$ 。

参考文献

- [1] Л. М. Бреховских. Акуст. ж., 1964, 10, 114~116.
- [2] Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
- [3] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, шум, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.
- [4] В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Раппопорт. Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, Изд-во АН СССР, 1962.

(张仁和译自《Акуст.ж.》1965年第11卷第2期第148~159页,龚继萍校)

① 原文为接收器,似改为辐射器较好——译者注

在非均匀介质中传播的射线的计算

В. А. Елисеєвни

在研究天然波导中声波和电磁波的超远传播时,除了采用波动计算方法外,还广泛地采用射线近似方法。分层介质中(沿传播方向是均匀的波导乃是其特殊情形)的射线图的绘制方法已被很好地研究过。

最常采用的是分段线性近似法,即把介质分割为水平层,而假设这些水平层中的声速梯度是常量 Φ ,并在各层的边界处跃变。对每一层导出其解析形式的射线方程并不困难。

但是,实际上常会遇到这样的情况:天然波导的特性沿着传播的方向有非常显著的变化。这种介质已不可能认为是分层的;它的特性在三个坐标上都有变化。对于这种一般的非均匀介质的情形,要导出其解析形式的射线方程是十分困难的,只是在某些特殊情况下才有可能做到^[1]。例如,可以从程函方程

$$(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2 = n^2(x, y, z)$$

导出射线方程,式中 $u(x, y, z)$ 是程函, $n(x, y, z)$ 是介质的折射指数。这在变量可分离的情形下(即介质是均匀的或分层的),或者在折射指数的平方是变量的可加函数^[2][即 $n^2(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$]的情形下是可能的 Φ 。

实际上,有意义的恰好是在程函方程中变量不能分离的情况。例如,在研究天然波导时,经常会碰到声速最小值的深度在波的传播方向上发生变化的情形。此时折射指数的平方不是变量的可加函数,因而不能用分离变量法来解程函方程。

因此,就有人提出关于射线轨迹的数值计算方法问题。假设下面所导出的简单的一阶微分方程组对数值积分是合适的。为简单起见,以下的所有讨论都限于平面情形,即在所讨论的非均匀介质中,声速同时在垂直方向 y 和水平方向 x 上变化,但在第三个坐标 z 上却保持不变。因此只考察 xy 平面上传播的射线。对于声速同时在三个坐标上变化的非均匀介质,其计算方法完全类似。

从位于点 (x_0, y_0) 的源点射出的射线的方向余

弦是 $dx/ds = \cos \theta$ 和 $dy/ds = \sin \theta$;式中 θ 是射线和 x 轴的夹角, ds 是射线的元长。引进时间 t 作为参量,我们得到:

$$dx/dt = \cos \theta (ds/dt) = c(x, y) \cos \theta \quad (1)$$

$$dy/dt = \sin \theta (ds/dt) = c(x, y) \sin \theta \quad (2)$$

式中 $ds/dt = c(x, y)$ 是局部的声传播速度。

另一方面,在程函方程的左边和右边除以折射指数的平方,也可以求得射线的方向余弦,并由下式确定:

$$\cos \theta = \frac{1}{n(x, y)} (\partial u / \partial x) \quad (3)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{n(x, y)} (\partial u / \partial y) \quad (4)$$

将 $n(x, y)$ 移到左边,并将(3)式对 y 求微分,将(4)式对 x 求微分,于是在考虑到 $\partial^2 u / \partial x \partial y = \partial^2 u / \partial y \partial x$ 时,可得下式:

$$\partial(n \cos \theta) / \partial y = \partial(n \sin \theta) / \partial x \quad (5)$$

此外

$$\begin{aligned} d(n \cos \theta) / ds &= \partial(n \cos \theta) / \partial x (dx/ds) \\ &+ \partial(n \cos \theta) / \partial y (dy/ds) = \partial(n \cos \theta) / \partial x \cos \theta \\ &+ \partial(n \sin \theta) / \partial x \sin \theta = \partial n / \partial x \end{aligned} \quad (6)$$

引进参量 t ,可把式(6)变换为:

$$\begin{aligned} d(n \cos \theta) / ds &= d(n \cos \theta) / dt (dt/ds) \\ &= n [d(\cos \theta) / dt] 1/c + dn/dt \cos \theta (1/c) \\ &= -n \sin \theta (d\theta/dt) (1/c) + \cos \theta [(\partial n / \partial x) (dx/dt) \\ &+ (\partial n / \partial y) (dy/dt)] 1/c = \partial n / \partial x \end{aligned}$$

进一步变换此式,并考虑到(1)式和(2)式,以及 $n = c_0/c$,则可得:

$$d\theta/dt = \partial c / \partial x \sin \theta - \partial c / \partial y \cos \theta \quad (7)$$

对声速梯度引进下列符号:

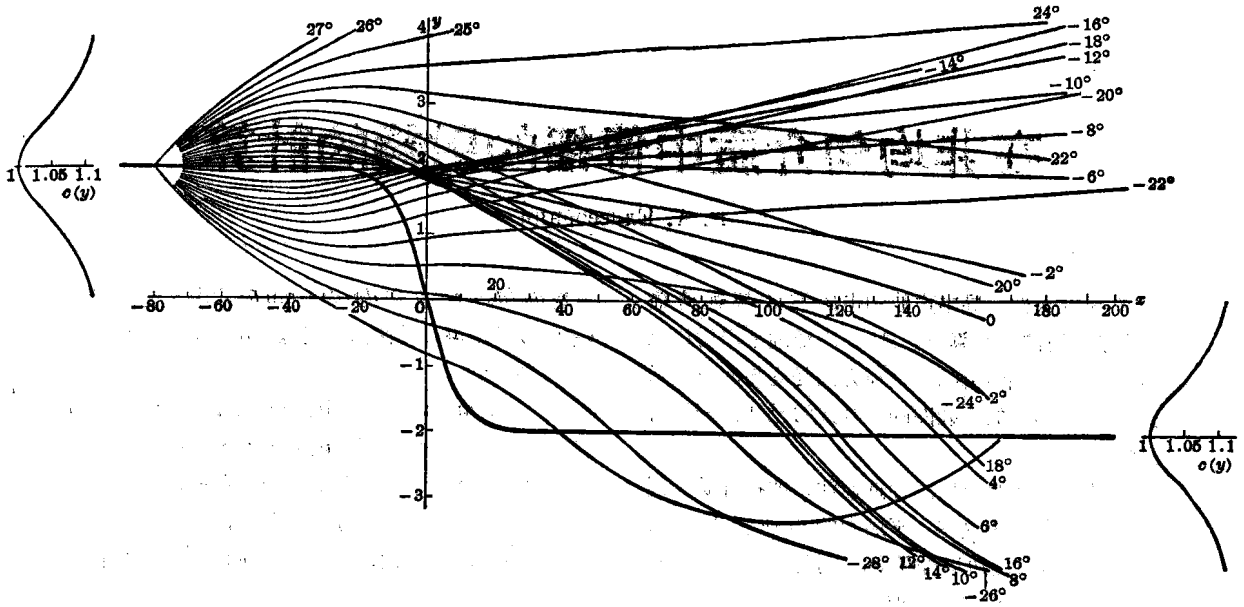
$$\partial c(x, y) / \partial x = a_x(x, y), \quad \partial c(x, y) / \partial y = a_y(x, y)$$

于是可把(7)式写成下式:

$$d\theta/dt = a_x(x, y) \sin \theta - a_y(x, y) \cos \theta \quad (8)$$

① 以下的叙述都是对声学情形而言,但所有的论断也同样适用于电磁波传播的情形

② 用适当的变换可以变换成能作变量分离的坐标系时,也能导出



图

因此,在二維情形下,声綫由三个简单的一阶微分方程組成的方程組来描写:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c(x, y) \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= c(x, y) \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= a_x(x, y) \sin \theta - a_y(x, y) \cos \theta \end{aligned} \right\} (9)$$

在介质的性质随三个坐标轴变化的非均匀介质中,声綫由六个简单的一阶微分方程組成的方程組来描述(其推导类似于前面对二維情形的推导):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} &= c \cos \beta \\ \frac{dz}{dt} &= c \cos \gamma \\ \frac{d\alpha}{dt} &= a_x \sin \alpha - a_y \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta \\ &\quad - a_z \operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma \\ \frac{d\beta}{dt} &= -a_x \cos \alpha \operatorname{ctg} \beta + a_y \sin \beta \\ &\quad - a_z \operatorname{ctg} \beta \cos \gamma \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -a_x \textcircled{1} \cos \alpha \operatorname{ctg} \gamma \\ &\quad - a_y \cos \beta \operatorname{ctg} \gamma + a_z \sin \gamma \end{aligned} \right\} (10)$$

式中 α 、 β 和 γ 是空间射线与坐标轴的夹角;而 $a_x = \partial c(x, y, z) / \partial x$ 、 $a_y = \partial c(x, y, z) / \partial y$ 和 $a_z = \partial c(x, y, z) / \partial z$ 则分别为三个坐标上的声速梯度。

在给定初始条件(源点的坐标和射线从源点射出的出射角)时,可以用近似算法之一来解出方程组(9)和(10)。可以得到 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的级数形式的解。借助于这些方程组,可以很简单地编制出用数字电子计算机计算射线问题的程序。此方法的优点之一是可以同时计算射线

形状和声脉冲沿射线方向的传播时间。

作为例子,现在来考察非均匀介质的特殊情形中声线的计算,其中声速由下式决定:

$$c(x, y) = \frac{c_0}{\sqrt{(1-m)/[ch^2(y/H + nthx/L)] + m}} \quad (11)$$

式中 c_0 、 m 、 n 、 H 和 L 是表征介质特性的参量。当 $x \rightarrow \pm \infty$ 时,非均匀介质过渡为分层非均匀介质,此即爱泼斯坦(Epstein)对称层^[3],由下式描述:

$$c(y) = \frac{c_0}{\sqrt{(1-m)/[ch^2(y/H) \pm n] + m}} \quad (12)$$

在 $x = \text{常数}$ 的任意值时,在声道铅直断面上的声速分布相当于爱泼斯坦对称层,同时声速最小值对 x 轴偏移了一个量 $nthx/L$ 。因此上面所讨论的介质是波导轴的深度沿传播方向平滑改变的非均匀波导。参量 H 表征波导非均匀部分的厚度,而参量 L 表征波导非均匀部分的长度。

曾选取下列参量值来计算射线: $c_0 = 1$ 、 $m = 0.8$ 、 $n = 2$ 、 $L = 10$ 和 $H = 1$ 。此时方程组(9)具有下列形式:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{0.2/ch^2[y + 2th(x/10)] + 0.8}} \cos \theta \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{0.2/ch^2[y + 2th(x/10)] + 0.8}} \sin \theta$$

① 原文误印为 a_x ——译者注

② 似应改为 $Hnthx/L$ ——译者注

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\text{sh}[y+2\text{th}(x/10)]}{[1+0.8\text{sh}^2(y+2\text{th}(x/10))]^{3/2}} \left[\frac{0.04}{\text{ch}^2(x/10)} \sin \theta - 0.2 \cos \theta \right]$$

已用龙格-库塔 (Runge-Kutta) 渐近算法^①在 «Минск-1» 数字电子计算机上解出了这个方程组。给定了初始条件 x_0, y_0 和 θ_0 。取可变步长 Δt 进行计算; 在每一步用 Δt 和 $2\Delta t$ 进行计算。如所得数值的离散不超过允许误差, 则认为这一步选取步长 Δt 是确当的, 由此得到的 $x_n(t), y_n(t)$ 和 $\theta_n(t)$ 值可以认为是正确的, 并且在此基础上再进行下一个步长的计算。如情形相反, 则步长要减小一半。

在图中绘出了用上述方法计算出来的射线图。在图的左右两边绘出了铅垂方向上声速的分布曲线。用粗线表示声道轴, 它通过坐标原点。可以清楚地看出, 那些在波导的均匀部分内靠近波导轴传播的射线, 在波导轴线转折处的后面即离开波导轴, 因而声能在波导的铅直断面上强烈地扩散。

射线图的计算进一步可以用来求聚焦因子^[6]:

$$f = \frac{R^2 \cos \theta_0}{x(\partial x / \partial \theta_0) \sin \theta}$$

式中 R 是声脉冲沿射线方向所经过的距离。显然,

f 值的计算并不困难。

在地壳地震研究中计算声线和聚焦因子时, 也可以应用上述方法。

参考文献

- [1] И. С. Берзон. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1948, 12, 41.
- [2] Л. М. Бреховских, В. А. Елисееннин. Акуст. ж., 1960, 6, 3, 284~291.
- [3] P. Epstein. Proc. Nat. Acad. Sc. America, 1930, 16, 627.
- [4] И. С. Берзон, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. II, 1959.
- [5] В. П. Демидович, И. А. Марон, Э. В. Шувалова. Численные методы анализа, 1962.
- [6] Л. М. Бреховских. М., Изд-во АН СССР, 1957, стр. 426.

(稿继续译自 «Акуст. ж.» 1964 年第 10 卷第 3 期第 284~288 页, 尚尔翻校)

① 这种方法在计算数学中相当流行, 并且在许多论文中 (例如参考文献 [4, 5]) 已被详细地讨论过, 所以这里不再叙述了

② 原文误印为 k ——译者注

(上接第 19 页)

参考文献

- [1] Antares Parvulescu, "MESS Processing", (A) *J. A. S. A.*, 33, p. 1674, 1961.
- [2] H. Kuttruff, "Raumakustische Korrelationsmessungen mit einfachen Mitteln", *Acustica*, 13, p. 120, 1963.
- [3] G. L. Turin, "An introduction to matched

filters", *I. E. E. Trans. on Information Theory* IT-6 pp. 311~329, 1960.

- [4] Carl Eckart, "The Theory of Noise Suppression by Linear Filters", *Scripps Inst. of Oceanography Ref. 51-44*, 1951.
- [5] M. K. Smith, "A review of methods of filtering Seismic data", *Geophysics*, 23, pp. 44~57, 1958.
- [6] Y. W. Lee (李郁荣), "Statistical Theory of communication," p. 328 (Wiley, N. Y. 1960).

由海底反射引起的脉冲波的相位失真

Benjamin F. Cron, Albert H. Nuttall

引言

当一单频平面波投射在两流体介质的界面上,而在介质中没有衰耗时,如果入射角大于临界角,则反射波有一相移^[1,2]。此相移乃是两介质的密度比、声速比和入射角的函数。

虽然这相移和入射波的频率无关,但反射脉冲的形状可以有很大的失真,并且其峰值幅度也会改变。在本文中利用时域和频率域提出了两种研究这种失真的方法,同时也给出了对于两种典型声纳脉冲的应用。

一、一般理论

对于频率为 $f (> 0)$ 赫的入射平面波,反射波乃是其相位超前的复现物^[2],假如 $\sin \theta_i \geq \frac{c_1}{c_2}$, 则相位超前为 ϵ :

$$\epsilon = 2 \tan^{-1} \left[\frac{[\sin^2 \theta_i - (c_1/c_2)^2]^{1/2}}{(\rho_2/\rho_1) \cos \theta_i} \right] \quad (1)$$

式中 θ_i 是入射波与法线之间的入射角, ρ_2/ρ_1 是密度比,而 c_2/c_1 是声速比。足标 1 和 2 分别表示入射介质和海底。

用线性滤波器来表示海底对入射波的作用是方便的,此线性滤波器在频率域内由传输函数 Φ

$$H(f) = \begin{cases} \exp(i\epsilon); & f > 0 \\ \exp(-i\epsilon); & f < 0 \end{cases} \quad (2)$$

来描写。如果我们写成:

$$\begin{aligned} H(f) &= \exp[i\epsilon \operatorname{sgn}(f)] \\ &= \cos \epsilon + i \sin \epsilon \operatorname{sgn}(f) \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} 1; & f > 0 \\ -1; & f < 0 \end{cases} \quad (4)$$

我们就可以通过脉冲响应

$$h(t) = \cos \epsilon \delta(t) - \sin \epsilon / \pi t \quad (5)$$

在时间域得到海底作用的等效表述,这里 $h(t)$ 是 $H(f)$ 的富利叶反变换。在推得式(5)时,我们利用下列一对富利叶变换^[3]:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\ -1/\pi t &\longleftrightarrow i \operatorname{sgn}(f) \end{aligned} \quad (6)$$

如果入射平面波有一时间上的波形 $x(t)$, 反射波 $y(t)$ 就由 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的通常的线性滤波器的折合运算给出:

$$y(t) = \cos \epsilon x(t) - \sin \epsilon x_H(t) \quad (7a)$$

式中 $x_H(t)$ 是 $x(t)$ 的希尔伯特变换:

$$x_H(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau \quad (7b)$$

其中 P 表示柯西主值积分。

另一方面,如果入射脉冲的频率是:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (8)$$

则反射脉冲的频率是:

$$S_y(f) = H(f) S_x(f) = \exp[i\epsilon \operatorname{sgn}(f)] S_x(f) \quad (9)$$

因为 $x(t)$, $h(t)$ 和 $y(t)$ 都是实函数,所以:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y \exp(i2\pi ft) df \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} S_y(f) \exp(i2\pi ft) df \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} 2 S_x(f) \exp(i2\pi ft) df \exp(i\epsilon) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \{ x_+(t) \exp(i\epsilon) \} \end{aligned} \quad (10a)$$

式中

$$x_+(t) = \int_0^{\infty} 2 S_x(f) \exp(i2\pi ft) df = x(t) + i x_H(t) \quad (10b)$$

被定义为信号 $x(t)$ 的复包迹^[4]。[作为一种验算,将式(10b)代入(10a)可得(7a)。]

式(7)和(10)是本节的主要结果。它们描述了两种得到反射脉冲的方法,第一种直接通过时间域,而第二种通过频率域得到反射波^[5]。 ϵ 乃是反射波的相位超前,由式(1)给出。

① 在参考文献[2]第108页已很好地解释过负频率的负相移

② 这方法与参考文献[5]中所述相类似

二、載頻的矩形調制

考虑由矩形脉冲調制的載頻：

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t + \theta); & t_1 < t < t_2 \\ 0; & \text{其余時間} \end{cases} \quad (\omega_0 > 0) \quad (11)$$

我們允許脉冲有任意的开始和終了時間，以及載頻有任意的相移。而对 $\omega_0(t_2 - t_1)$ 的大小没有作任何假設。对这个例子，我們用式(7a)和(7b)的時間域的方法来求反射脉冲 $y(t)$ ：

$$y(t) = \cos \varepsilon x(t) - \sin \varepsilon x_H(t) \quad (7a)$$

这里的基本問題是要求式(11)的 $x(t)$ 的希尔伯特变换。这就是：

$$\begin{aligned} x_H(t) &= \frac{1}{\pi} P \int_{t-t_2}^{t-t_1} \frac{\cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \theta)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{t-t_2}^{t-t_1} \frac{\cos(\omega_0 t + \theta) \cos \omega_0 \tau + \sin(\omega_0 t + \theta) \sin \omega_0 \tau}{\tau} d\tau \\ &= \frac{\cos(\omega_0 t + \theta)}{\pi} P \int_{t-t_2}^{t-t_1} \frac{\cos \omega_0 \tau}{\tau} d\tau \\ &\quad + \frac{\sin(\omega_0 t + \theta)}{\pi} \int_{t-t_2}^{t-t_1} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} d\tau \quad (12) \end{aligned}$$

对所有的实数 u 而言，有

$$-P \int_u^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv = - \int_{|u|}^{\infty} \frac{\cos v}{v} dv = \text{Ci}(|u|) \quad (13)$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{\sin v}{v} dv &= \text{sgn}(u) \int_0^{|u|} \frac{\sin v}{v} dv \\ &= \text{sgn}(u) \text{Si}(|u|) \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $\text{Ci}(u)$ 和 $\text{Si}(u)$ 分别为积分余弦和积分正弦^[6]。所以对一切 t 值有：

$$\begin{aligned} x_H(t) &= \frac{\cos(\omega_0 t + \theta)}{\pi} [\text{Ci}(\omega_0 |t - t_1|) - \text{Ci}(\omega_0 |t - t_2|)] \\ &\quad + \frac{\sin(\omega_0 t + \theta)}{\pi} [\text{sgn}(t - t_1) \text{Si}(\omega_0 |t - t_1|) \\ &\quad - \text{sgn}(t - t_2) \text{Si}(\omega_0 |t - t_2|)] \quad (15) \end{aligned}$$

这就是在矩形調制下任意相位的任意周数的、載頻的希尔伯特变换的完整的一般結果。将式(11)和(15)代入(7a)就得到反射脉冲的最后結果。这是 Abramowitz 的結果的推广和修正^{[7] ①}。[因为当 $|u| \rightarrow 0$ 时， $\text{Ci}(|u|) \rightarrow \ln(\gamma|u|)$ ^[6]，除非 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 为零，否則在 t_1 和 t_2 时 $x_H(t)$ 具有对数級的无穷大。在图 1~6 中这一性质是明显的。]

三、載頻的高斯調制

考虑形状为

$$x(t) = \exp(-a^2 t^2) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (f_0 > 0) \quad (16)$$

的入射脉冲。在時間坐标的原点，高斯調制到达它的

峰值这一点并不对其普遍性有所損害，因为時間原点是任意的。因此，式(16)表示任意相位載頻的高斯幅度調制的最普遍的形式。对 f_0/a 的大小没有作任何假設。

为了求反射脉冲，我們利用式(10a)和(10b)的頻率域的方法。在配成 t 的平方以后，我們所需要的第一个量 $S_{\pm}(f)$ 为：

$$\begin{aligned} S_{\pm}(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 t^2) [\exp(i 2\pi f_0 t + i\theta) \\ &\quad + \exp(-i 2\pi f_0 t - i\theta)] \exp(-i 2\pi f t) dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left[-\frac{\pi^2}{a^2} (f - f_0)^2 + i\theta\right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left[-\frac{\pi^2}{a^2} (f + f_0)^2 - i\theta\right] \quad (17) \end{aligned}$$

将式(17)代入(10b)即可得复包迹 $x_{\pm}(t)$ 。可以看出主要的解析問題是計算量 A ：

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2}{a^2} (f - f_0)^2\right] \exp(i 2\pi f t) df \quad (18)$$

用配成 f 的平方的办法，可以得到：

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a^2} f_0^2\right) \exp(-z^2) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{a} f + \frac{z}{i}\right)^2\right] df \quad (19) \end{aligned}$$

式中 $z = at - i(\pi/a)f_0$ 与 f 无关。在上述积分中令 $S = (\pi/a)f + z/i$ ，即得：

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a^2} f_0^2\right) \exp(-z^2) \int_{z/i}^{\infty} \exp(-s^2) ds \quad (20)$$

[不难証明，积分上限可以写成 ∞ 而不是 $\infty + z/i$ ，因为在大的实数 s 时 $\exp(-s^2)$ 很快地减小。]

現在，函数

$$w(z) = \exp(-z^2) \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(t^2) dt \right] \quad (21)$$

已被制成函数表^[8]，把 $t = is$ 代入式(21)，并考虑：

$$1 = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^{\infty} \exp(-s^2) ds$$

式(21)可改写为如下形式：

$$w(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \int_{z/i}^{\infty} \exp(-s^2) ds \quad (22)$$

上式沿 s 的实軸积分到 ∞ 。利用式(22)， A 可写为

① Abramowitz 給出的反射脉冲的方程式是不正确的；分母中的 2π 都应改为 π 。这一錯誤改变了在他的图 1 和图 2 中所描繪的最后的脉冲形状。在本文的图 2 中繪出了正确的脉冲形状

$$A = \frac{1}{4} \exp(-(\pi^2/a^2)f_0^2)w(z)$$

$$= \frac{1}{4} \exp(-(\pi^2/a^2)f_0^2)w(at - i(\pi/a)f_0) \quad (23)$$

如果把 A 的这个结果和式 (17) 一起代入式 (10b)

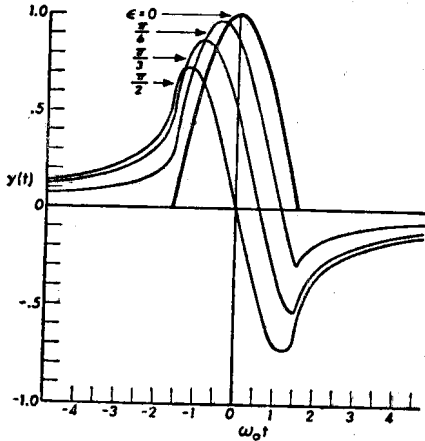


图1 矩形调制的反射脉冲
 $\omega_0 t_1 = -\pi/2, \omega_0 t_2 = \pi/2, \theta = 0$

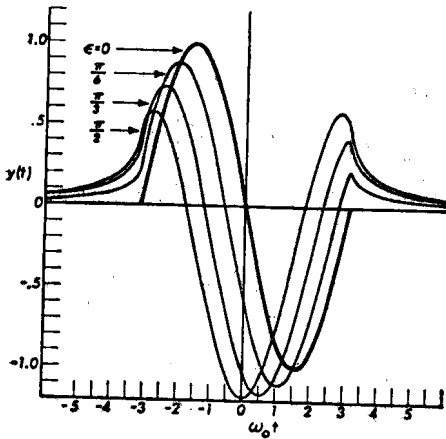


图2 矩形调制的反射脉冲
 $\omega_0 t_1 = -\pi, \omega_0 t_2 = \pi, \theta = \pi/2$

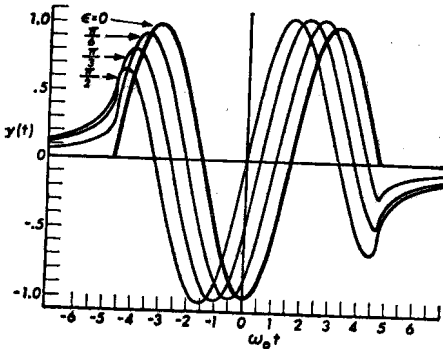


图3 矩形调制的反射脉冲
 $\omega_0 t_1 = -3\pi/2, \omega_0 t_2 = 3\pi/2, \theta = \pi$

中, 就得到:

$$x_+(t) = \frac{1}{2} \exp(-(\pi^2/a^2)f_0^2) [w(at - i(\pi/a)f_0) \exp(i\theta) + w(at + i(\pi/a)f_0) \exp(-i\theta)] \quad (24)$$

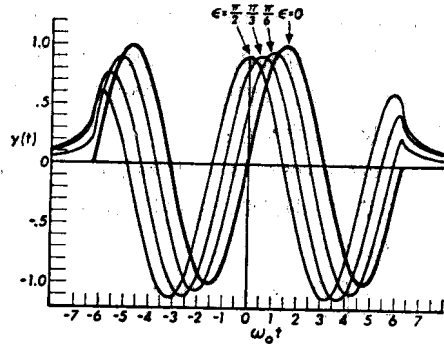


图4 矩形调制的反射脉冲
 $\omega_0 t_1 = -2\pi, \omega_0 t_2 = 2\pi, \theta = -\pi/2$

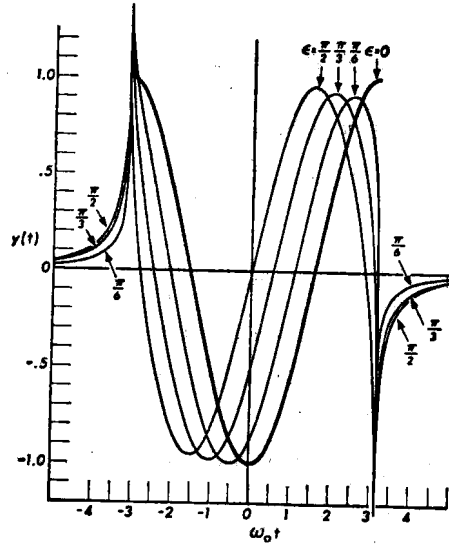


图5 矩形调制的反射脉冲
 $\omega_0 t_1 = -\pi, \omega_0 t_2 = \pi, \theta = \pi$

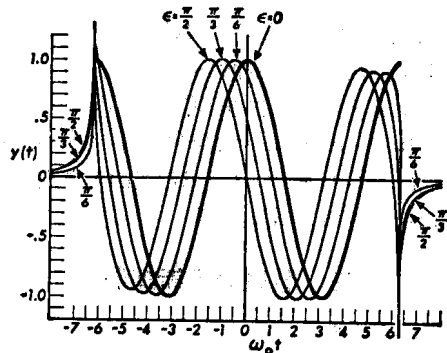


图6 矩形调制的反射脉冲
 $\omega_0 t_1 = -2\pi, \omega_0 t_2 = 2\pi, \theta = 0$

現在，如果令 $z=x+iy$ 和 $w(z)=w(x+iy)$
 $=u(x, y)+iv(x, y)$ ，其中 u 和 v 是实函数，并且利用
 函数 w 的某些特性^①，我們发现方程式(24)可以
 写为：

$$\begin{aligned} w_+(t) = & \exp(-a^2t^2) \cos(2\pi f_0t + \theta) \\ & + i \exp(-a^2t^2) \sin(2\pi f_0t + \theta) \\ & + i \exp\left(-\frac{\pi^2}{a^2}f_0^2\right) \times \left[\cos\theta v\left(at, \frac{\pi}{a}f_0\right) \right. \\ & \left. - \sin\theta u\left(at, \frac{\pi}{a}f_0\right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

显然，立即就可以得到关于方程(25)的局部驗算，
 即：正如式(10b)那样， $w_+(t)$ 的实部应该是 $x(t)$ 。因
 此，由式(10b)还可以得到：

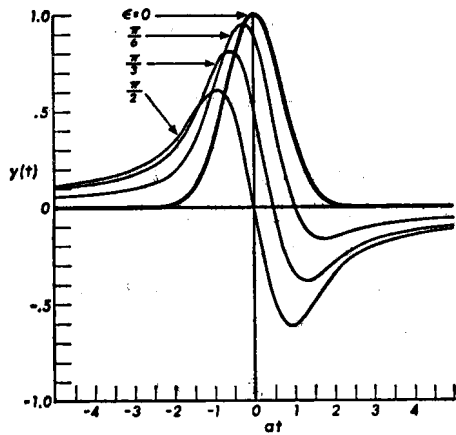


图7 高斯調制的反射脉冲
 $\pi f_0/a=0, \theta=0$

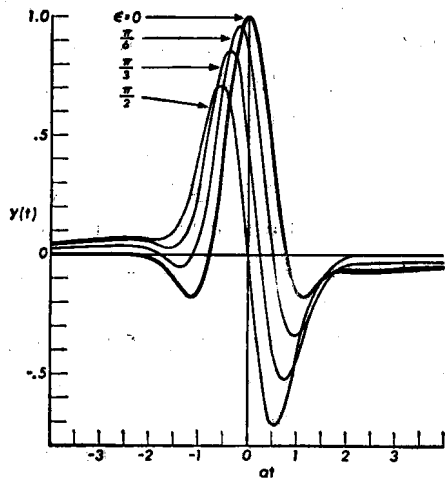


图8 高斯調制的反射脉冲
 $\pi f_0/a=1, \theta=0$

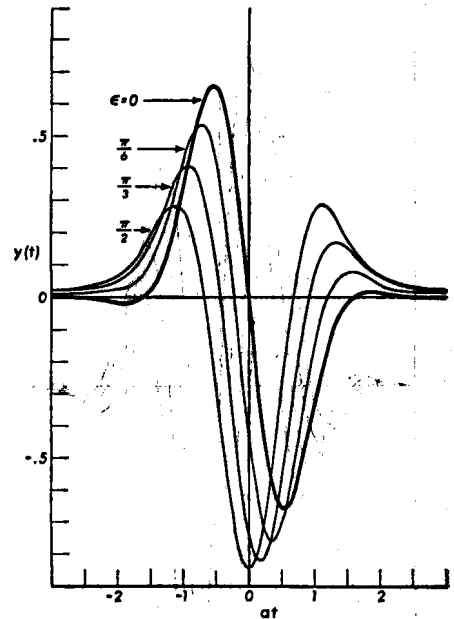


图9 高斯調制的反射脉冲
 $\pi f_0/a=1, \theta=\pi/2$

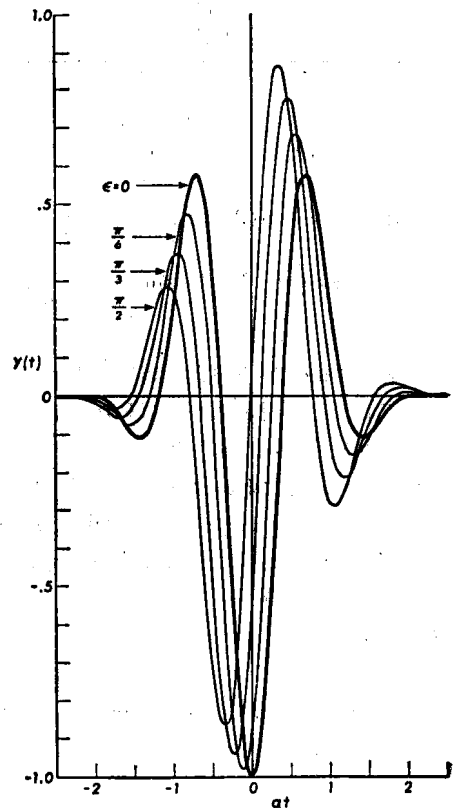


图10 高斯調制的反射脉冲
 $\pi f_0/a=2, \theta=\pi$

① 參見參考文獻[8]第5頁

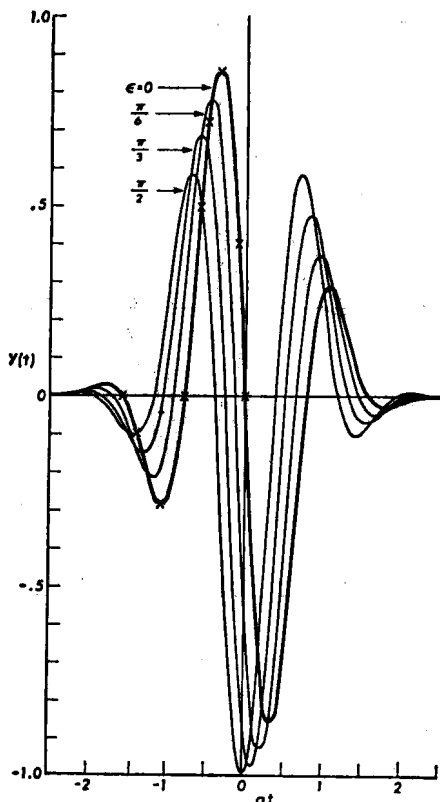


图 11 高斯调制的反射脉冲
 $\pi f_0/a=2, \theta=\pi/2$

$$x_H(t) = \exp(-a^2 t^2) \sin(2\pi f_0 t + \theta) + \exp\left(-\frac{\pi^2}{a^2} f_0^2\right) \times \left[\cos \theta v\left(at, \frac{\pi}{a} f_0\right) - \sin \theta u\left(at, \frac{\pi}{a} f_0\right) \right] \quad (26)$$

这方程式是任意相位载频的高斯调制的希尔伯特变换的一般结果，它用列成表的实函数 u 和 v 来表示^[8]。将方程式 (16) 和 (26) 代入 (7a)，或者以式 (25) 代入 (10a)，即得反射脉冲的最后结果。据作者所知，这一情况以前尚未用这样的普遍形式发表过。

[对 $f_0 = \theta = 0$ 得到了上述情形的一个特例，即一个高斯脉冲。可以得到：

$$x(t) = \exp(-a^2 t^2) \\ x_H(t) = v(at, 0) \\ = (2/\sqrt{\pi}) \exp(-a^2 t^2) \int_0^{at} \exp(s^2) ds \quad (27)$$

这一特例绘于图 7。

四、举 例

在图 1~6 绘出了矩形调制[式(1)]的反射脉冲的波形。图 1~4 的共同特征是发射脉冲(相应于

$\epsilon=0$)有不连续的导数。虽然在图 1~3 有很大失真，但从图 4 可以看到，当矩形调制包含四个半波时，脉冲中心附近只有很小的失真，大致有 ϵ 弧度的相位超前。然而，在脉冲的边缘仍有较大的失真。

在图 7~11 绘出了高斯调制[式(16)]的反射脉冲的波形。在图 7~9 中有很大的失真，但在图 10~11 中失真很小。事实上，为了进行比较，在图 11 中用 x 画出了图 10 的希尔伯特变换。90° 相移的信号和希尔伯特变换之间的差别是可以略去不计的。

图 1~11 中只画出了 ϵ 在 $0-\pi/2$ 范围内的曲线。但是，从波形的奇偶特性很容易得到 $\pi/2-\pi$ 范围内的曲线；用较明显的描写，反射脉冲是：

$$y(t, \epsilon) = \cos \epsilon x(t) - \sin \epsilon x_H(t) \quad (28)$$

如果 $x(t)$ 是偶函数， $x_H(t)$ 是奇函数，则有：

$$y(-t, \epsilon) = \cos \epsilon x(t) + \sin \epsilon x_H(t) \quad (29)$$

但是：

$$y(t, \pi-\epsilon) = -\cos \epsilon x(t) - \sin \epsilon x_H(t) \quad (30)$$

所以，如果 $x(t)$ 是偶函数，则有：

$$y(t, \pi-\epsilon) = -y(-t, \epsilon) \quad (31)$$

如果 $x(t)$ 是奇函数，类似的推导可得：

$$y(t, \pi-\epsilon) = y(-t, \epsilon) \quad (32)$$

式 (31) 和 (32) 只要利用脉冲在 $t=0$ 轴上的镜反射就能得到曲线的图形。

五、结 论

假如我们定义一个差函数作为发射脉冲的希尔伯特变换与 90° 相移脉冲之间的差，则可以证明(见附录 A)：对于图 1~6，差函数与初始脉冲的能量比分别为 45%、20%、13.5%、10%、20% 和 10%。对于一个在调制包迹下有八个半波的信号，相对误差只有 5%；这一情形相当于 Q 为 4.5。 Q 是中心频率与频谱半功率点之间带宽的比。因此，对于矩形调制的情形， Q 适当地大于 1 (比如说大于 5) 可得比较小的失真。

对于高斯调制的情形，图 7~11 的相对误差分别为 100%、8%、10.5%、0.013% 和 0.013%。在图 10~11 中发射脉冲的 Q 大约为 2。因此，对于高斯调制， Q 大于 2 时失真即可略而不计。

上述比较是在 $\epsilon=\pi/2$ 的情形和 90° 相移的波形之间做的。对于其他 ϵ 值，反射脉冲 $y(t)$ 与 ϵ 弧度相移的波形之间的能量差更小。将附录 A 中的推导稍加推广，就可以证明此能量差是由 $\sin^2 \epsilon$ 来度量的。因此，上面指出的所要求的 Q 值是对 $\epsilon=\pi/2$ 的最坏的情形。