雷晋干 马亚南 著

分歧问题的逼近理论与数值方法

（鄂）新登字 09 号

分歧问题的逼近理论与数值方法

（武汉大学研究生教材）

雷晋干　马亚南　著

*

武汉大学出版社出版发行

（430072 武昌 珞珈山）

黄石日报印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　9.75 印张　240 千字

1993 年 4 月第 1 版　　1993 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—2000

ISBN 7-307-00394-5/O・36

定价：5.65 元

内 容 简 介

本书系统地论述了分歧问题的逼近理论与计算方法。对定态分歧问题的逼近理论，奇点的求法，解支的数值跟踪法，以及 Hopf 分歧、具对称性的和变分不等式的分歧问题都作了相应的介绍。

本书从研究方法角度对内容作了编排，各章有相对独立性，便于读者直接阅读有关内容。本书可供研究生，高年级大学生作为一本入门书。也可作为正在这一领域从事工作的研究人员的参考书。

序　　言

科学与工程技术中的问题，常常需要用含有一个或多个参数的方程（组）描述，分歧理论的研究任务是它们的解与参数的依赖关系，特别，当参数值变化到某个临界值时新型解的出现．分歧理论是非线性科学的一个重要组成部分，其研究对象分为稳态与动态分歧问题．

分歧理论的发展已有很长的历史，早在上世纪末和本世纪初，Poincaré，Liapunov 和 Schmidt 在对旋转流体，以及积分方程等问题的研究中，就提出了原始的分歧理论．此后几十年，分歧理论在固体力学、流体力学、天体物理、激光和等离子体物理、生态学、化学反应，以及经济系统等学科上的广泛应用日益显示其重要价值．随着数学新工具的建立，分歧问题的研究获得了很大发展．目前，它的数学理论已逐渐成为一个独立的研究领域，并且不断促进着数学基础理论的发展．

分歧问题的数值方法研究则大约只有二十年的历史，1971 年，Crandall 和 Rabinowitz 研究了由简单特征值产生的分歧问题，证明了在分歧点附近其解可以表示成某一参数的函数形式，随后人们对由简单分歧点产生的分歧问题提出了各种迭代求解格式．紧接着，人们分别对分歧问题的有限差分近似，有限元近似进行了分析．1980 年前后，Atkinson 及 Brezzi 等人对全连续算子方程的分歧问题的离散逼近所作的研究，使分歧问题的逼近理论研究步入了新的阶段．与此同时，人们对稳态问题的分歧点计算提出了

通过增加附加方程而建立扩充系统的方法，使分歧点变为扩充系统的正则点. Keller 等人为了求解分歧解曲线而提出了路径跟踪算法，即延拓方法，Kubicek 等在 Hopf 分歧的数值计算方面也作了大量的工作. 近些年来，人们又对变分不等式的分歧问题以及具有对称性的分歧问题的数值方法进行了一些探索性的研究，这一方面的研究以及多重分歧问题的数值方法仍是一个有待开拓的研究园地.

本书对分歧问题的逼近理论与计算方法各方面进行了较全面的介绍和论述，总结了近些年来国内外在这一研究领域的主要成果. 本书从分歧问题研究方法的角度对内容进行了编排，各章尽量保持相对独立，以便于对某些章节感兴趣的读者直接阅读其感兴趣的内容. 本书可作为希望进行这方面研究工作的研究生、高年级大学生，或对此有兴趣的科学工作者的一本入门书，也可作为正在从事这一工作的研究人员的参考书.

全书包括八章和一个附录. 第一章引入了分歧问题的若干典型事例，借以说明产生分歧现象的客观背景. 第二章介绍非线性分析的一些基础知识. 第三章讨论简单和多重分歧问题的逼近理论，并介绍了主要的几种局部分析方法. 第四章介绍奇点的直接解法，即扩充系统方法，并论述了折迭与分歧之间的关系. 第五章介绍解支的数值跟踪——延拓方法，对延拓方法中的各种问题进行了深入讨论. 第六章讨论 Hopf 分歧的数值计算，包括有限维问题和无穷维问题. 第七章介绍具有对称性的分歧问题，给出了对称性正则解支和对称破坏点的逼近定理，以及对称性问题的特殊数值解法. 第八章从变分原理出发，讨论了变分不等式的分歧问题，应用集合收敛概念，给出了逼近定理，此外还讨论了求最大分歧值及其解分支的算法. 在附录中，我们给出了在分歧问题计算中常用的延拓方法程序包.

本书虽然由我们编著，实际上它是我们科研组的集体创作，书的大部分内容曾在研究生课程中讲授或讨论班上讨论过，有部分

内容是研究组成员的科研成果．在完成本书稿的过程中，我们的同事黄象鼎、徐海洪、柳春雷和研究生李晓景，汤根发分别阅读并修正了部分章节，有的内容，特别是其中的数值计算结果大多由他们提供．附录采用了柳春雷编制的延拓方法程序．本书中的某些科研成果是我们课题组所承担的国家攀登计划项目和国家自然科学基金项目研究工作的一部分，本书的出版得到了武汉大学研究生院和武汉大学出版社的大力支持与资助，在此特向上述个人和有关单位深表谢意！

由于我们水平有限，难免有不妥之处，敬请读者批评指正．

作　者

1992年8月

APPROXIMATE THEORY AND NUMERICAL METHOD FOR BIFURCATION PROBLEMS

Lei Jingan & Ma Yanan

PREFACE

Many problems in science and engineering are described by equations with one or more parameters. The solutions of such equations depend on the parameters. It is the aim of bifurcation theory to study such dependence, especially the qualitative behavior of solutions as the parameters vary and approach to critical values.

It has been a long history in the development of bifurcation theory. At the turn of the centuries, Poincaré, Liapunov and Schmidt put forward the primary bifurcation theory in the study of rotational flow and integral equations. In the following decades, bifurcation theory demonstrated great importance by its applications in solid and fluid mechanics, celestial physics, laser and plasma physics, ecology, chemical reations and economic systems. Now, the mathematical theory of bifurcation and its applications become an important research field, and keep on stimulating the development of the basic theory of mathematics.

This book is concerned with the approximation theory and computational methods for bifurcation problems. Most of our results obtained in recent years are presented in the book. We intend not only to give a complete reference for readers who are doing research work in this field, and also to make the book easily accessible to beginners.

The book consists of eight chapters and one appendix. Chapter 1 illustrates several problems with bifurcations from different disciplines.

These problems show the background of bifurcation phenomena. Some needed preliminaries of nonlinear functional analysis are provided in Chapter 2. Chapter 3 introduces the approximation theory for simple and multiple bifurcation problems. Methods of local analysis for bifurcation points are also given. Chapter 4 is devoted to the direct methods for locat ing the singular points. A detailed discussion is given about extended sys tems for determining the turning points, simple bifurcation points and mutiple bifurcation points. The relations between folds and bifurcation points are also discussed. Chapter 5 deals entirely with continuation methods. We discuss path following of the solution branches, steplength control, detection of simple and multiple singular points, branch switch ing and continuation shooting method for ordinary differential equa tions. Chapter 6 deals with the numerical computation of Hopf bifurca tion. Both finite dimensional problems (systems of ordinary differential equations) and infinite dimensional problems (reaction-diffusion equa tions) are concerned. In Chapter 7, we consider bifurcation problems with symmetries. Some approximation theorems are given for symmetric regular solutions and symmetry-breaking bifurcation points. Special methods are introduced to solve problems with symmetries. Theory and methods for bifurcation solutions in variational inequalities are discussed in Chapter 8. These methods are based on variational principles. We de rive the approximation theorems by using the concept of set conver gence. Some algorithms are given for solving the maximum bifurcation value and the corresponding solution branches. Many numerical exam ples and bifurcation diagrams are given in this book. A FORTRAN rou tine of path following is listed in the appendix.

目　录

序　言………………………………………………………………（1）
第一章　基本例子………………………………………………………（1）
§1　弹性杆的屈曲 ……………………………………………（1）
§2　触发器的工作特性 ………………………………………（2）
§3　生态系统中种群的增长 …………………………………（4）
§4　电路与化学反应中的振荡 ………………………………（6）
§5　Bénard 问题 ………………………………………………（9）

第二章　非线性泛函分析基础 ……………………………………（12）
§1　Banach 空间中的微分学 …………………………………（12）
1.1　Fréchet 微分……………………………………………（12）
1.2　Gateaux 微分 …………………………………………（15）
1.3　偏导数 …………………………………………………（16）
§2　隐函数定理………………………………………………（16）
2.1　隐函数存在定理 ………………………………………（16）
2.2　推广的隐函数定理 ……………………………………（19）
§3　Fredholm 算子……………………………………………（22）
§4　空间的直和分解…………………………………………（24）
§5　分歧方程…………………………………………………（28）

第三章　分歧问题的离散逼近 ……………………………………（31）
§1　正则解的逼近理论………………………………………（31）

§2 简单极限点的逼近 …………………………… (36)
2.1 简单极限点的局部分析 …………………………… (36)
2.2 简单极限点附近解支的逼近 …………………………… (39)
2.3 应用和例子 …………………………… (44)
§3 简单分歧点的逼近 …………………………… (46)
3.1 简单分歧点的局部分析 …………………………… (47)
3.2 简单分歧点附近解支的逼近 …………………………… (49)
3.3 平凡解的分歧 …………………………… (56)
§4 多重分歧问题的局部分析方法 …………………………… (58)
4.1 Liapunov-Schmidt 约化 …………………………… (58)
4.2 隐函数约化法 …………………………… (62)
4.3 TBE 局部分析法 …………………………… (65)
§5 二重极限点问题的逼近 …………………………… (69)
5.1 解的性态分析 …………………………… (69)
5.2 逼近解支的存在与收敛性 …………………………… (72)
5.3 例子 …………………………… (75)
§6 二重分歧点问题的逼近 …………………………… (76)
6.1 无穷维问题的约化 …………………………… (77)
6.2 二维分歧方程的逼近 …………………………… (80)

第四章 确定奇异点的扩充系统 …………………………… (84)
§1 转向点的计算 …………………………… (84)
1.1 单参数问题 …………………………… (85)
1.2 双参数问题 …………………………… (90)
§2 简单分歧点的计算 …………………………… (95)
2.1 Crandall-Rabinowitz 定理 …………………………… (96)
2.2 扩充系统Ⅰ …………………………… (98)
2.3 扩充系统Ⅱ …………………………… (101)
§3 高阶奇点的计算 …………………………… (108)
3.1 二重极限点的扩充系统 …………………………… (108)

3.2 二重分歧点的扩充系统 …………………………………… (114)
§4 折迭的有关问题及应用 ……………………………… (120)
4.1 概念和基本结果 …………………………………… (120)
4.2 折迭与分歧点的关系 ……………………………… (127)
§5 扩充系统的求解技巧 ………………………………… (130)
5.1 方程组求解中的技巧 ……………………………… (131)
5.2 Newton 迭代的分裂技巧 ………………………… (133)

第五章 延拓方法……………………………………………… (135)
§1 基本思想 ……………………………………………… (135)
1.1 延拓方法的基本形式 ……………………………… (135)
1.2 延拓方法的其它形式及步长的选取……………… (140)
§2 奇点的判别方法 ……………………………………… (144)
2.1 简单奇点的判别 …………………………………… (144)
2.2 多重奇点问题 ……………………………………… (146)
§3 奇点附近的延拓与分支转向 ………………………… (150)
3.1 奇点附近的延拓 …………………………………… (151)
3.2 分歧方向计算 ……………………………………… (153)
3.3 奇点附近的分支转向 ……………………………… (156)
§4 加边算法 ……………………………………………… (159)
4.1 正则情形 …………………………………………… (159)
4.2 奇异情形 …………………………………………… (160)
4.3 几乎奇异情形 ……………………………………… (161)
§5 延拓打靶法 …………………………………………… (162)

第六章 Hopf 分歧 ………………………………………… (168)
§1 有限维 Hopf 分歧定理……………………………… (168)
§2 规范形方法 …………………………………………… (171)
§3 Hopf 分歧点的计算 ………………………………… (175)
3.1 特征多项式法 ……………………………………… (175)

3.2 扩充系统法 …………………………………………… (178)
3.3 稳定性丧失方向的判别 ………………………………… (180)
§4 周期解的计算方法 ………………………………… (182)
4.1 周期解的计算 …………………………………………… (182)
4.2 周期解的稳定性 …………………………………………… (184)
§5 无穷维问题 ………………………………………… (185)
5.1 半群 ……………………………………………………… (185)
5.2 Crandall-Rabinowitz 定理 ……………………………… (188)
5.3 Marsden-McCracken 定理 ……………………………… (190)
5.4 Hassard 定理 ……………………………………………… (191)
§6 无穷维问题的 Hopf 分歧计算 ……………………… (192)
6.1 Hopf 分歧点的计算 ………………………………………… (192)
6.2 周期解的计算问题 ………………………………………… (197)

第七章 具有对称性的分歧问题 ………………………… (198)
§1 群表示基础 ………………………………………… (202)
§2 对称解支的逼近 …………………………………… (204)
2.1 正则解支的逼近 …………………………………………… (205)
2.2 对称破坏奇异点的逼近 ………………………………… (208)
§3 有限维对称破坏分歧 ………………………………… (213)
3.1 约化方程 ………………………………………………… (213)
3.2 极小对称破坏分支 ………………………………………… (215)
§4 有限维对称分歧问题的数值计算 ………………… (220)
4.1 用延拓法求解约化方程 ………………………………… (220)
4.2 分歧点的判别和计算 ……………………………………… (223)
4.3 数值实例 ………………………………………………… (226)
§5 具有对称性的 Hopf 分歧 …………………………… (230)

第八章 变分不等式的分歧问题 ………………………… (234)
§1 若干预备知识 ……………………………………… (234)

§2　最大分歧值的确定 …………………………………… (236)
§3　有限维逼近理论 ………………………………………… (241)
§4　数值求解方法 …………………………………………… (248)
4.1　延拓法 ……………………………………………… (248)
4.2　直接极值法 ………………………………………… (253)

附录　延拓方法程序………………………………………… (257)
参考文献……………………………………………………… (279)
索引…………………………………………………………… (290)

Content

Preface ·· (1)

Chapter 1. Basic Examples ·· (1)

§ 1 The Buckling of the Elastic Rod ·· (1)

§ 2 Transfer Characteristic of Trigger Circuit ································ (2)

§ 3 Dynamics of Interacting Populations in Ecological Systems ················ (4)

§ 4 Oscillating Systems in Circuit and Chemical Reactors ····················· (6)

§ 5 Bénard Problem ··· (9)

Chapter 2. Foundations of Nonlinear Functional Analysis ······················ (12)

§ 1 Calculus in Banach Space ·· (12)

1. 1 Frechet Derivative ··· (12)

1. 2 Gateaux Derivative ··· (15)

1. 3 Partial Derivative ·· (16)

§ 2 Implicit Function Theorem ··· (16)

2. 1 Existence Theorem of Implicit Function ································· (16)

2. 2 Generalized Implicit Function Theorem ·································· (19)

§ 3 Fredholm Operator ··· (22)

§ 4 Space Decomposition into Direct Sum ····································· (24)

§ 5 Reduced Bifurcation Equations ·· (28)

Chapter 3. Discrete Approximation of Bifurcation Problems ··· (31)

§ 1 Approximation of Regular Solutions ················· (31)

§ 2 Approximation of Simple Limit Point ················· (36)

2.1 Local Analysis for Simple Limit Point ················· (36)

2.2 Approximation of Solutions near Simple Limit Point ······ (39)

2.3 Applications and Examples ················· (44)

§ 3 Approximation of Simple Bifurcation Point ········ (46)

3.1 Local Analysis for Simple Bifurcation Point ············ (47)

3.2 Approximation of Solutions near Simple Bifurcation Point ················· (49)

3.3 Bifurcation from Trivial Solutions ················· (56)

§ 4 Methods of Local Analysis for Multiple Bifurcation Problems ················· (58)

4.1 Liapunov-Schmidt Reduction ················· (58)

4.2 Reduction by Implicit Functions ················· (62)

4.3 TBE Local Analysis Method ················· (65)

§ 5 Approximation of Double Limit Point ················· (69)

5.1 Qualitative analysis of the solutions ················· (69)

5.2 Existence and Convergence of the Approximation Solution Branches ················· (72)

§ 6 Approximation of Double Bifurcation Point ········ (76)

6.1 Reduction of Infinite Dimensional Problems ············ (77)

6.2 Approximation for Bifurcation Equations of dimension Two ················· (80)

Chapter 4. Extended Systems for Determining Singular Points ················· (84)

§ 1 Computation of Turning Point ················· (84)

1.1 One Parameter Problems ················· (85)

1.2 Two Parameter Problems ················· (90)

§ 2 Computation of Simple Bifurcation Point ············ (95)

2.1 Crandall-Rabinowitz Theorem ································ (96)

2.2 Extended Systems I ·· (98)

2.3 Extended Systems II ······································ (101)

§ 3 Computation of Singular Points with Higher Orders ··· (108)

3.1 Extended Systems for Double Limit Points ·············· (108)

3.2 Extended Systems for Double Simple Bifurcation Points ··· (114)

§ 4 Folds and its Applications ···························· (120)

4.1 Concepts and Foundamental Results ···················· (120)

4.2 Relations between Folds and Bifurcations ·············· (127)

§ 5 Techniques for Solving the Extended Systems ······ (130)

5.1 Techniques Used in Solving the Equations ·············· (131)

5.2 Splitting Techniques for Newton iterations ·············· (133)

Chapter 5. Continuation Method ······························ (135)

§ 1 Main Idea ··· (135)

1.1 Basic Forms of Continuation Method ···················· (135)

1.2 Other Forms and Steplength Control ···················· (140)

§ 2 Detection of Singular Points ·························· (144)

2.1 Simple Singular Point ···································· (144)

2.2 Multiple Singular Point ·································· (146)

§ 3 Continuation past Singular Point and Branches Switching ·· (150)

3.1 Continuation past Singular Point ······················· (151)

3.2 Computation of Bifurcation Directions ················· (153)

3.3 Branches Switching near Singular Points ··············· (156)

§ 4 Bordering Algorithm ···································· (159)

4.1 Regular Case ··· (159)

4.2 Singular Case .... (160)
4.3 Almost Singular Case .... (161)
§ 5 Continuation Shooting Method .... (162)

Chapter 6. Hopf Bifurcation .... (168)
§ 1 Hopf Bifurcation Theorem in Finite Dimension ... (168)
§ 2 Method of Normal Forms .... (171)
§ 3 Computation of Hopf Point .... (175)
3.1 Using Characteristic Polynomials .... (175)
3.2 Extended Systems for Determining Hopf Points .... (178)
3.3 Judgement for Loss of Stability .... (180)
§ 4 Computation of Periodic Solutions .... (182)
4.1 Computations of Periodic Solutions .... (182)
4.2 Stability of Periodic Solutions .... (184)
§ 5 Infinite Dimensional Problems .... (185)
5.1 Semigroup .... (185)
5.2 Candall-Rabinowitz Theorem .... (188)
5.3 Marsden-McCracken Theorem .... (190)
5.4 Hassard Theorem .... (191)
§ 6 Computation for Infinite Dimensional Problems ... (192)
6.1 Computation of Hopf Point .... (192)
6.2 Periodic Solution .... (197)

Chapter 7. Bifurcation Problems with Symmetries .... (198)
§ 1 Group Representation .... (202)
§ 2 Approximation of Solution Branches with Symmetries
.... (204)
2.1 Approximation of Regular Solutions .... (205)
2.2 Approximation of Symmetry-breaking Point .... (208)