现代数学基础丛书 135

非线性椭圆型方程

王明新 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 135

非线性椭圆型方程

王明新 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了二阶线性椭圆算子的特征值理论，半线性椭圆型方程和方程组的上下解方法及其应用，拓扑度理论和分支理论及其应用，方程组的解耦方法，Nehari 流形方法及其应用，p-Laplace 算子的特征值理论和 p-Laplace 方程(组)的上下解方法及其应用.

本书选题先进、内容新颖丰富，大部分内容取自同行近几年发表的论文. 尽可能地做到了自封、系统、循序渐进，强调基础理论的同时，注重具体应用. 本书深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题. 学完本书，读者就可以直接进入相关研究领域，开展研究工作.

本书可作为微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学、控制论与相关理工科方向研究生的教材和教学参考书，也可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非线性椭圆型方程/王明新著. —北京：科学出版社，2010
(现代数学基础丛书；135)
ISBN 978-7-03-028263-7

Ⅰ. 非…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 非线性椭圆型方程-研究　Ⅳ. O175.25

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 130947 号

责任编辑：王丽平　杨　然　张　扬／责任校对：张小霞
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2010 年 7 月第 一 版　开本：B5(720 × 1000)
2010 年 7 月第一次印刷　印张：20 1/2
印数：1–2 500　字数：396 000

定价：68.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

椭圆型方程的研究领域宽广, 内容丰富, 体系庞大, 问题繁多, 方法多样. 用一本书系统完整地介绍椭圆型方程研究领域中的各种类型的问题和方法是不可能的. 鉴于上述原因和可读性, 本书在尽可能自封的前提下, 介绍了二阶线性椭圆算子的特征值理论, 半线性椭圆型方程和方程组的上下解方法及其应用, 拓扑度理论和分支理论及其应用, 方程组的解耦方法, Nehari 流形方法及其应用, p–Laplace 算子的特征值理论和 p–Laplace 方程 (组) 的上下解方法及其应用.

本书的定位是为研究生和青年学者提供一本非线性椭圆型方程的教材和参考书, 力求用较短的篇幅, 尽可能地介绍非线性椭圆型方程研究领域的基本问题和方法.

本书的主导思想是着重介绍偏微分方程方法, 所以没有具体介绍非线性泛函分析中的变分方法, 更没有涉及临界点理论、单调映射、集值映射等问题. 由于特征值问题研究中的关键一步是泛函的极值问题, 顾及到后面的应用以及自封性, 在第 1 章的预备知识部分, 简要介绍了 Banach 空间上的微分学和泛函的无条件极值的存在性.

自然科学和工程技术中的许多问题都与特征值 (本征值) 有关, 特别地, 二阶半线性 (拟线性) 椭圆型方程和方程组的边值问题正解的存在性, 强烈地依赖于一个与其对应的特征值问题的主特征值 (第一特征值, 最小特征值). 在第 2 章中, 我们系统介绍二阶线性椭圆算子的特征值理论. 内容包括非散度型二阶线性椭圆算子的主特征值及其对应的特征函数, 主特征值、最大值原理与正的严格上解之间的关系, 散度型二阶线性椭圆算子的特征值的极值性质、无界性和完备性、关于区域和算子的系数的连续依赖性、主特征值与谱半径之间的关系, 非完全耦合的二阶线性椭圆型方程组的特征值, 以及一个一般形式的特征值问题 $\mathscr{L}u=\lambda p(x)u,\ x\in\Omega;\ \mathscr{B}u=0,\ x\in\partial\Omega$. 本章的最后, 作为特征值的完备性定理的第一个应用, 证明了空间 $H^1(\Omega)$ 上的 Poincaré 不等式并给出了最佳常数. 作为第二个应用, 证明了齐次 Neumann 边值问题 $-\Delta u=f(x),\ x\in\Omega;\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0,\ x\in\partial\Omega$ 可解的充分必要条件是 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x=0$. 作为第三个应用, 给出了特征值的一个计算公式.

上下解方法是研究非线性偏微分方程解的存在性和估计的一个重要方法, 直观而又初等, 问题的核心是设法构造合适的上下解, 技巧性很强. 第 3 章介绍二阶半线性椭圆型方程和方程组的上下解方法 (包括弱上下解方法, 无界区域上的上下解

方法) 及其应用. 首先给出了完全非线性方程的古典解的比较原理和一个一般形式的比较原理及正解的唯一性. 其次, 建立了方程式和方程组的上下解方法, 并给出了几个应用例子. 特别地, 对于退化的 Logistic 方程, 还运用上下解方法讨论了正解的存在性和渐近性, 运用摄动方法讨论了解的模式 (pattern). 最后讨论了弱上下解方法和无界区域上的上下解方法.

第 4 章简要介绍了拓扑度理论 (包括锥上的拓扑度) 和分支理论中的一些基本结果. 第 5 章利用锥上的拓扑度和分支理论, 介绍了两个带有齐次 Dirichlet 边界条件的半线性方程组的正解的存在性、分支与稳定性. 第 6 章结合两个具体例子, 介绍了扩散导致的模式 (非常数正解) 的研究方法.

一些具有特殊结构的椭圆型方程组的边值问题, 可以转化成方程式的边值问题来研究, 这就是所谓的解耦方法. 第 7 章结合一个具体例子来介绍这种方法.

目前, Nehari 流形已被广泛应用于椭圆型方程的边值问题解的存在性、多解性、不存在性, 以及发展方程整体解的存在性与不存在性的研究中. 第 8 章以一个二阶半线性椭圆型方程的边值问题为例, 介绍 Nehari 流形以及它的应用.

因为当 $\nabla u=0$ 时, p–Laplace 方程是一个退化 $(p>2)$ 的或者具有奇性 $(p<2)$ 的拟线性方程, 它与半线性方程有重要差别. 半线性方程的许多重要性质对于 p–Laplace 方程而言不一定成立. 第 9 章介绍了 p–Laplace 算子的特征值理论和 p–Laplace 方程 (组) 的上下解方法及其应用.

为了便于读者查阅, 在附录中我们列出了一些关于 Sobolev 空间和线性椭圆型方程的基本结论.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些书籍和论文, 请参阅所附的参考文献. 本书的讲义稿, 作者在哈尔滨工业大学、东南大学和厦门大学为研究生讲授过多次. 本书的出版得到国家自然科学基金 (No.10471022, No.10771032), 哈尔滨工业大学科研基金 (AUGA1860000310) 和哈尔滨工业大学优秀团队支持计划的资助. 杜玲珑同学、张艳芳同学、李慧玲博士、陈玉娟博士和吕广迎博士演算了本书的部分内容, 我的其他几位研究生和哈尔滨工业大学、东南大学、厦门大学以及哈尔滨师范大学学习该课程的研究生和青年教师, 对本书的初稿都提出了许多宝贵的意见和修改建议, 在此一并致谢. 鉴于作者学识有限, 疏漏和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作　者

2010 年 6 月

目　　录

第1章　预备知识

鉴于本书没有具体介绍变分方法, 而研究特征值问题的关键一步是泛函的极值问题, 又顾及到后面的应用以及本书的自封性, 本章简要介绍 Banach 空间上的微分学和泛函的无条件极值的存在性.

贯通全书, 我们用 $f_k \longrightarrow f$ 表示 f_k 强收敛于 f, 用 $f_k \rightharpoonup f$ 表示 f_k 弱收敛于 f. 对于集合 A 与 B, 用 $d(A,B)$ 表示 $\operatorname{dist}(A,B)$, 即集合 A 与 B 之间的距离 (A 也可以是一个点).

1.1　Banach 空间上的微分学

设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, Ω 是 X 中的一个开集, 映射 $f:\Omega\longrightarrow Y$ 连续. 记 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是 X 到 Y 的有界线性算子构成的集合.

1.1.1　Fréchet 导数

定义 1.1.1　*称 f 在点 $x_0\in\Omega$ 处是 Fréchet 可微的, 如果存在 $\mathcal{A}\in\mathscr{B}(X,Y)$, 使得*

$$\|f(x_0+u)-f(x_0)-\mathcal{A}u\|=o(r),\quad \text{当 } \|u\|\leqslant r\longrightarrow 0 \text{ 时}.$$

算子 $\mathcal{A}$ 称为 f 在 x_0 处的 Fréchet 导数.

下面我们列出 Fréchet 导数 $\mathcal{A}$ 的一些性质:

(1) 如果 $\mathcal{A}$ 存在, 一定唯一, 记为 $f_x(x_0), Df(x_0)$ 或者 $f'(x_0)$;

(2) 如果 $Df(x):x\in\Omega\longrightarrow\mathscr{B}(X,Y)$ 是连续映射, 则称 $f\in C^1(\Omega)$. 用归纳法可以定义 C^p 映射, $p=1,2,\cdots$. 映射 $f\in C^p(\Omega)$ 是指

$$D^pf(x):=D(D^{p-1}f)(x)\in\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,\cdots,\mathscr{B}(X,Y\underbrace{)\cdots)))}_{p},\quad\forall\, x\in\Omega,$$

$$D^pf(x):x\in\Omega\longrightarrow\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,\cdots,\mathscr{B}(X,Y\underbrace{)\cdots)))}_{p}\ \text{关于 } x \text{ 连续}.$$

(3) 复合映射的导数: 设 X,Y,Z 是三个 Banach 空间, 开集 $U\subset X$, $V\subset Y$, 映射 $f:U\longrightarrow Y$, $g:V\longrightarrow Z$. 又设 $x_0\in U$, $y_0=f(x_0)\in V$, f 和 g 分别在 x_0 和 y_0 处 Fréchet 可微. 那么 $g\circ f$ 在 x_0 处也 Fréchet 可微, 并且 $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

引理 1.1.1　假设 $f: X \longrightarrow Y$ 是 C^1 的且在点 x_0 的邻域内是紧的, 那么 $f'(x_0)$ 也是紧的.

证明　如果 $\mathcal{A} = f'(x_0)$ 不是紧的, 则存在 $\{x_i\}$, $\|x_i\| = 1$, $\varepsilon > 0$, 使得

$$\|\mathcal{A}x_i - \mathcal{A}x_j\| \geqslant \varepsilon, \quad \forall\, i \neq j.$$

取 $\delta > 0$ 充分小, 使

$$\|f(x_0 + \delta x_i) - f(x_0) - \delta \mathcal{A}x_i\| \leqslant \varepsilon\delta/4, \quad \forall\, i.$$

不妨认为 $x_0 = 0$. 那么当 $i \neq j$ 时, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta/2 &\geqslant \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j) - \delta\mathcal{A}x_i + \delta\mathcal{A}x_j\| \\ &\geqslant \|\delta\mathcal{A}x_i - \delta\mathcal{A}x_j\| - \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\| \\ &\geqslant \varepsilon\delta - \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\|,\end{aligned}$$

即

$$\|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\| \geqslant \varepsilon\delta/2, \quad \forall\, i \neq j.$$

这与 f 的紧性条件矛盾. 证毕.

中值公式　假设在凸开集 U 上 $f \in C^1$, 那么对任意的 $x, x' \in U$, 成立

$$\begin{aligned}f(x') - f(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx' + (1-t)x)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f_x(tx' + (1-t)x)\mathrm{d}t(x' - x).\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

1.1.2　Gâteaux 导数

定义 1.1.2　设 $f: \Omega \subset X \longrightarrow Y$, $x_0 \in \Omega$. 若对任意的 $h \in X$, 当 $|t|$ 适当小时都有 $x_0 + th \in \Omega$, 并且极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \tag{1.1.2}$$

存在, 则称 f 在 x_0 处 Gâteaux 可微, 称其极限值是 f 在 x_0 处沿方向 h 的 Gâteaux 微分, 记作 $f_G(x_0)h$, 即

$$f_G(x_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

如果 f 在 Ω 的每一点处都是 Gâteaux 可微的, 则称 f 在 Ω 上 Gâteaux 可微.

若 $f_G(x_0) \in \mathscr{B}(X, Y)$, 则称 f 在 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 导数.

关于 Gâteaux 导数, 也有与 Fréchet 导数完全相同的复合映射的求导公式.

定理 1.1.1 设 X, Y 是 Banach 空间, 开集 $\Omega \subset X$, $f: \Omega \longrightarrow Y$, $x_0 \in \Omega$.

(1) 如果 f 在 x_0 处 Fréchet 可微, 则 f 必在 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 导数, 并且 $f'(x_0) = f_G(x_0)$, 即 f 在 x_0 处的 Fréchet 导数与 Gâteaux 导数相同.

(2) 如果 f 在 x_0 的邻域内具有有界线性的 Gâteaux 导数, 并且 Gâteaux 导数 $f_G(x)$ 在 x_0 处连续, 那么 f 在 x_0 处 Fréchet 可微, 并且两个导数相同.

证明 (1) 由假设条件知, 对于任何 $h \in X$, 当 $|t|$ 适当小时, 有

$$f(x_0 + th) - f(x_0) - tf'(x_0)h = \omega(x_0, th),$$

其中 $\omega(x_0, h)$ 满足

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0,$$

故有

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)h = \frac{\omega(x_0, th)}{t}.$$

因为

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\omega(x_0, th)}{t} \right\| = \lim_{t \to 0} \frac{\|\omega(x_0, th)\|}{\|th\|} \|h\| = 0,$$

所以

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)h.$$

因此 f 必在 x_0 处 Gâteaux 可微, 并具有有界线性的 Gâteaux 导数 $f'(x_0)$.

(2) 因为 Gâteaux 导数 $f_G(x)$ 在 x_0 处连续, 故对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $\|h\| < \delta$ 时, 有

$$\|f_G(x_0 + h) - f_G(x_0)\| < \varepsilon. \tag{1.1.3}$$

下面证明当 $0 < \|h\| < \delta$ 时, 恒有

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\| \leqslant \varepsilon \|h\|. \tag{1.1.4}$$

给定 h 满足 $0 < \|h\| < \delta$. 不妨假设 $f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h \neq 0$ (否则, 上式自然成立). 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $\phi \in Y^*$ 满足 $\|\phi\| = 1$,

$$\phi\big(f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\big) = \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f_G(x_0)h\|. \tag{1.1.5}$$

考察函数

$$\varphi(t) = \phi\big(f(x_0 + th)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

易知 $\varphi'(t)=\phi\big(f_G(x_0+th)h\big)$. 由中值公式, 存在 $\theta\in[0,1]$, 使得 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$, 即

$$\phi\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=\phi\big(f_G(x_0+\theta h)h\big). \tag{1.1.6}$$

利用式 (1.1.5)、式 (1.1.6) 和式 (1.1.3) 便推得

$$\begin{aligned}\|f(x_0+h)-f(x_0)-f_G(x_0)h\|&=\phi\big(f(x_0+h)-f(x_0)-f_G(x_0)h\big)\\&=\phi\big(f_G(x_0+\theta h)h-f_G(x_0)h\big)\\&\leqslant\|\phi\|\cdot\|f_G(x_0+\theta h)-f_G(x_0)\|\cdot\|h\|\\&=\|f_G(x_0+\theta h)-f_G(x_0)\|\cdot\|h\|\\&\leqslant\varepsilon\|h\|,\end{aligned}$$

即式 (1.1.4). 故 f 在 x_0 处 Fréchet 可微, 并且 $f'(x_0)=f_G(x_0)$. 证毕.

1.2 无条件局部极值

定义 1.2.1 设 X 是一个 Banach 空间, $\Omega\subset X$, 泛函 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 称为在 Ω 上是下半连续 (弱下半连续) 的, 如果由 $\Omega\ni x_i\longrightarrow x\in\Omega$ ($\Omega\ni x_i\rightharpoonup x\in\Omega$) 可以推出

$$\liminf_{i\to\infty}f(x_i)\geqslant f(x).$$

称泛函 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 Ω 上是上半连续 (弱上半连续) 的, 如果由 $\Omega\ni x_i\longrightarrow x\in\Omega$ ($\Omega\ni x_i\rightharpoonup x\in\Omega$) 可以推出

$$\limsup_{i\to\infty}f(x_i)\leqslant f(x).$$

定义 1.2.2 设 X 是一个 Banach 空间, 称泛函 $f:\Omega\subset X\longrightarrow\mathbb{R}$ 在点 $x_0\in\Omega$ 处取无条件局部极小值 (无条件局部极大值) 是指, 存在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 对于 $\Omega\cap U(x_0)$ 中的所有 x, 都有

$$f(x)\geqslant f(x_0)\quad\big(f(x)\leqslant f(x_0)\big).$$

定义 1.2.3 设 X 是一个 Banach 空间, 集合 $\Omega\subset X$, 泛函 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 有下界. 序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\Omega$ 称为极小化序列, 如果

$$\lim_{i\to\infty}f(x_i)=\inf_{x\in\Omega}f(x).$$

称泛函 f 在 Ω 上是强制的, 如果 Ω 无界并且 $\lim\limits_{\substack{x\in\Omega\\\|x\|\to\infty}}f(x)=\infty$.

1.2.1 无条件极值存在的必要条件

定理 1.2.1 设 X 是 Banach 空间, 开集 $\Omega \subset X$, 泛函 f 在 $x_0 \in \Omega$ 处取无条件局部极值, 并且 f 在 x_0 处 Gâteaux 可微. 那么, 对于任何 $h \in X$, 都有 $f_G(x_0)h = 0$.

证明 不妨假设 f 在 $x_0 \in \Omega$ 处取无条件局部极小值. 那么存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall\, x \in \Omega \cap U(x_0).$$

给定 $h \in X$. 由于当 $|t|$ 适当小时, $x_0 + th \in \Omega$, 因此函数

$$F_h(t) := f(x_0 + th)$$

对于 $|t|$ 适当小有定义, 并且在 $t = 0$ 处取到极小值. 于是 $F_h'(0) = 0$, 进而有

$$f_G(x_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F_h(t) - F_h(0)}{t} = F_h'(0) = 0.$$

证毕.

1.2.2 无条件极值的存在性

下面的结果是 Weierstrass 定理的推广.

定理 1.2.2 设 X 是 Banach 空间, $\Omega \subset X$ 是弱列紧的序列式弱闭集, 泛函 $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 Ω 上是弱下半连续的. 那么 f 在 Ω 上有下界且达到下确界, 即存在 $x_0 \in \Omega$, 使得

$$f(x_0) = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$

证明 若 $c := \inf\limits_{x \in \Omega} f(x) = -\infty$, 则存在 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$, 使得 $f(x_i) < -i$. 因为 Ω 是弱列紧的, 不妨认为 $x_i \rightharpoonup x_0$. 又因为 Ω 是序列式弱闭集, 所以 $x_0 \in \Omega$. 根据 f 的弱下半连续性得, $f(x_0) \leqslant \liminf\limits_{i \to \infty} f(x_i) = -\infty$. 该矛盾说明 f 在 Ω 上有下界, 从而有下确界. 记 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ 是极小化序列, 即 $f(x_i) \longrightarrow c$. 因为 Ω 是弱列紧的序列式弱闭集, 不妨认为 $x_i \rightharpoonup x_0 \in \Omega$. 利用 f 的弱下半连续性得

$$c \leqslant f(x_0) \leqslant \liminf_{i \to \infty} f(x_i) = \lim_{i \to \infty} f(x_i) = c,$$

即 $f(x_0) = c$. 定理得证.

推论 1.2.1 设 X 是一个自反的实 Banach 空间, $K \subset X$ 是序列式弱闭集, f 是 K 上的弱下半连续泛函. 又假设当 K 无界时, f 在 K 上是强制的. 那么 f 在 K 上取到极小值, 即存在 $x_0 \in K$, 使得

$$f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x).$$

证明　先讨论 K 有界的情况. 因为 X 是自反的, 所以 K 是弱列紧的. 由定理 1.2.2 知结论成立.

下面假设 K 是无界的. 因为 f 在 K 上是强制的, 可取 $x^* \in K$ 使得 $M := f(x^*) > 0$, 并且存在 $r > 0$, 当 $x \in K$ 并且 $\|x\| > r$ 时, 有 $f(x) > M$. 因为自反 Banach 空间中的有界闭球是弱列紧的序列式弱闭集, 所以 $\Omega := K \cap \overline{B_r(0)}$ 也是这样的集合. 根据定理 1.2.2, 存在 $x_0 \in \Omega$ 使得 $f(x_0) = \inf\limits_{x \in \Omega} f(x)$. 显然 $x^* \in \Omega$. 因此当 $x \in K \setminus \Omega$ 时, 有

$$f(x_0) \leqslant f(x^*) = M < f(x).$$

于是

$$f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x).$$

推论得证.

定理 1.2.3　*设 X 是一个自反的实 Banach 空间, f 在 X 上是下方有界的弱下半连续泛函. 如果存在一个有界的极小化序列, 那么 f 在 X 上取到极小值.*

证明　由于 f 在 X 上有下界, 故有下确界. 设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ 是有界的极小化序列, 即 $f(x_i) \longrightarrow \inf\limits_{x \in X} f(x)$, 并且存在正常数 C, 使得 $\|x_i\| \leqslant C$ 对所有 i 成立. 因为 X 是自反的, 所以 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是弱列紧的. 不妨认为 $x_i \rightharpoonup x_0 \in X$. 利用 f 的弱下半连续性便知

$$\inf_{x \in X} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \liminf_{i \to \infty} f(x_i) = \lim_{i \to \infty} f(x_i) = \inf_{x \in X} f(x).$$

故有 $f(x_0) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$. 证毕.

1.3　应　用

如果所讨论的问题中的区域 Ω 是固定的, 为了简化记号, 本书中通常简记 $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)}$, $|f|_{k+\alpha} = |f|_{k+\alpha,\Omega} = \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})}$.

上节的结果将在后面的特征值问题的研究中多次被用到. 本节先给出一个在拟线性边值问题的非负非平凡解的存在性方面的应用.

设 $p > 1$, 定义 p^*:

$$p^* = \frac{np}{n-p} \text{ 若 } p < n, \quad p^* = \infty \text{ 若 } p \geqslant n.$$

考察拟线性方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界光滑区域, $p>1$, $1\leqslant q<p^*$, $q\neq p$, Δ_p 是 p–Laplace 算子: $\Delta_p u=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

函数 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 称为问题 (1.3.1) 的弱解, 如果

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi \mathrm{d}x=\int_\Omega |u|^{q-2}u\phi \mathrm{d}x,\quad \forall\,\phi\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.3.2}$$

根据 Poincaré 不等式, $\|\nabla u\|_p$ 是空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的范数. 利用嵌入定理, 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 紧嵌入到空间 $L^q(\Omega)$, 故存在正常数 C, 使得

$$\|u\|_q\leqslant C\|\nabla u\|_p,\quad \forall\, u\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.3.3}$$

定义

$$A(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x,\quad B(u)=\frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x,$$

$$\mathscr{V}=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega):B(u)=1\right\}.$$

定理 1.3.1 *问题 (1.3.1) 至少存在一个非负非平凡解.*

证明 首先证明集合 $\mathscr{V}$ 是序列式弱闭的. 假设 $u_m\in\mathscr{V}$, 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_m\rightharpoonup u$. 那么序列 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界, 故在 $L^q(\Omega)$ 中是紧的. 于是存在子列 $\{u_{m_i}\}_{i=1}^\infty\subset\{u_m\}_{m=1}^\infty$, 在 $L^q(\Omega)$ 中 $u_{m_i}\longrightarrow u$. 又因为 $B(u_{m_i})=1$, 所以 $B(u)=1$, 即 $u\in\mathscr{V}$.

显然在集合 $\mathscr{V}$ 上 $A(u)$ 是强制的和弱下半连续的 (范数的弱下半连续性, 见习题 1.2).

由推论 1.2.1 知, 存在 $u_0\in\mathscr{V}$, 使得

$$A(u_0)=\inf_{u\in\mathscr{V}}A(u):=\sigma.$$

再由式 (1.3.3), 存在常数 $\alpha>0$, 使得

$$A(u)\geqslant\alpha,\quad \forall\, u\in\mathscr{V},$$

因而 $\sigma\geqslant\alpha>0$.

由于 $A(u)$ 和 $B(u)$ 在 u_0 点都是 Fréchet 可微的, 并且

$$A'(u_0)\phi=\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\cdot\nabla\phi \mathrm{d}x,\quad \forall\,\phi\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$B'(u_0)\phi=\int_\Omega |u_0|^{q-2}u_0\phi \mathrm{d}x,\quad \forall\,\phi\in W_0^{1,p}(\Omega),$$