Chinese Research on Elementary Mathematics

No. 2 2010

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Chinese Research on Elementary Mathematics No. 2 2010

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中国初等数学研究.2010卷/杨学枝主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.4

ISBN 978-7-5603-2579-8

Ⅰ.①中… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①初等数学-文集
Ⅳ.①O12-53

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第063908号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　翟新烨
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　880mm×1230mm　1/16　印张12　字数388千字
版　　次　2009年4月第1版　2010年5月第2版
　　　　　2010年5月第2次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2579-8
印　　数　1~3 000册
定　　价　30.00元

中国初等數學研究

陳省身

1995年5月20日

已故国际著名数学大师陈省身先生生前为本文集所题写的书名

目　录

• 名家特稿

• 专题研究

• 研究动态与综述

• 数学教育与教学

初等数学里的微积分

张景中
(中国科学院成都计算机应用研究所,四川　成都　610000)

1. 从一个不等式里看出导数

如果两个实数 $u < v$,则立刻有 $2u < u + v < 2v$.

这和导数有何关系?

把上面的不等式写成

$$2u < \frac{v^2 - u^2}{v - u} < 2v \tag{1}$$

是不是有点意思了?

把 v^2 对 v 求导数得到 $2v$,把 u^2 对 u 求导数得到 $2u$.

没有经过极限过程,也得到了函数 $f(x) = x^2$ 的导数.

是偶然碰巧,还是一般规律?

如果是一般规律,就发现了一件重要的事:不通过极限过程也能求导数.

这曾是数学泰斗牛顿和拉格朗日想做而没有做到的.

牛顿一共写了 4 部微积分的专著,其中《曲线求积术》是最后写成(1693 年)但最早出版(1704 年)的.为何前面三部迟迟没有出版?为何《曲线求积术》写成后 11 年才出版?这是因为牛顿对自己的微积分理论不满意,希望从理论中去掉“无穷小量”.在《曲线求积术》中,他认为没有必要把无穷小量引入微积分.他在序言中明确指出:“数学的量并不是由非常小的部分组成的,而是用连续的运动来描述的 ……”在这种思想指导下,他放弃了无穷小的概念,代之以“最初比和最后比”的概念.这概念也就是他在 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》中已经提出的“极限”思想.他说:“消失量的最后比严格地说并不是最后量的比,而是这些量无限减小时它们的比所趋近的极限.”当然,现在看来,极限概念和无穷小概念本质上是一回事.牛顿自己知道对极限概念也没有说清楚,所以在《原理》出版后 17 年才出版以极限思想为基础的《曲线求积术》,而且把极限叫做“最初比和最后比”.从这些历史事实可见,牛顿为从微积分中去掉涉及无穷的运算曾进行多年的思考.

图 1　牛顿(1643—1727)

图 2　拉格朗日(1736—1813)

拉格朗日是牛顿之后曾致力于不用无穷小或极限建立微积分的大数学家.由于他的学生们感到无限小和无限大的概念很难掌握,拉格朗日试图不用莱布尼茨的无穷小和牛顿的极限的特殊概念来建立微积分学,为此他写成《解析函数论》.此书的副标题是:“不用无穷小,或正在消失的量或极限与流数等概念,而归结为有限的代数分析的艺术”.他试图把微分、无穷小和极限等概念从微积分中完全排除.他先用代数方法证明了

泰勒展开式,接着定义导数(微商)是 $f(x+h)$ 的泰勒展开式中 h 的系数.他认为这样就可以克服极限理论的困难,可是无穷级数的收敛问题,仍然无法逃避极限.

上面的不等式给了我们一个避开极限建立微积分的机会.

2. 甲函数和乙函数

为了挖掘式(1)中透露的一般规律,我们从一个新的角度考虑微积分的两个经典案例.

例1 用 $S=S(t)$ 表示直线上运动物体在时刻 t 所走过的路程,$V=V(t)$ 表示它在时刻 t 的瞬时速度,则它在时间区间 $[u,v]$ 上的平均速度的大小,应当在 $[u,v]$ 上的某两个时刻的瞬时速度之间.

也就是说,有 $[u,v]$ 上的 p 和 q,使得下面的不等式成立:

$$V(p) \leqslant \frac{S(u)-S(v)}{u-v} \leqslant V(q) \tag{2}$$

上式可用语言表达为"函数 $S(t)$ 的差商是 $V(t)$ 的中间值".

例2 考虑 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 的曲线和 x 轴之间的面积.若记 $[a,x]$ 上曲边梯形面积为 $F(x)$(图3),则 $[u,v]$ 上这块面积为 $F(v)-F(u)$.如果把这块面积去高补低折合成长为 $v-u$ 的矩形,则矩形的高应当在 $[u,v]$ 上的某两个变量值对应的 $f(x)$ 的值之间(图4).

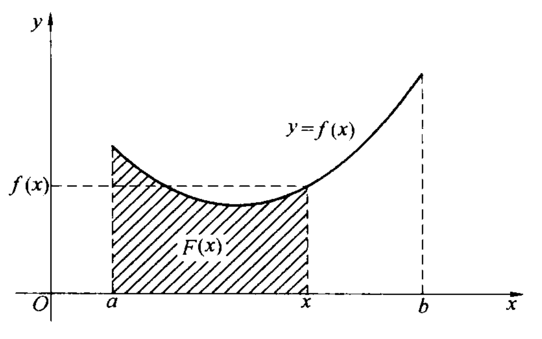

图3 $[a,x]$ 上曲边梯形面积为 $F(x)$

也就是说,有 $[u,v]$ 上的 p 和 q,使得下面的不等式成立

$$f(p) \leqslant \frac{F(u)-F(v)}{u-v} \leqslant f(q)$$

上式又可用语言表达为"函数 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中间值".

注意,我们现在不知道曲边梯形面积的数学定义.但从几何直观上看,这面积应当存在,并且折合成长为 $v-u$ 的矩形后,矩形的高应当在 $[u,v]$ 上这段曲线的某两点高度之间(图4).

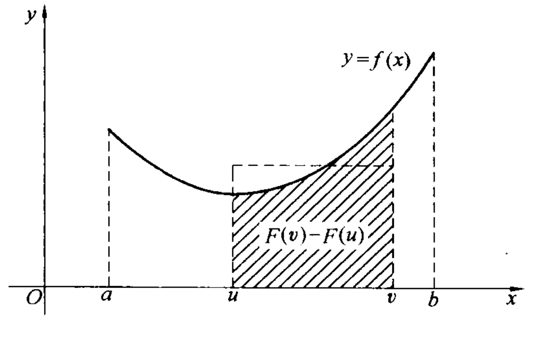

图4 矩形的高在 $[u,v]$ 上这段曲线的某两点高度之间

上面2个例子中,都涉及两个函数,其中一个函数的差商是另一个函数的中间值.

从两个例子中,提炼出一个问题,这是微积分的基本问题:

若 $f(x)$ 的差商是 $g(x)$ 的中间值,知道了一个函数,如何求另一个?

这个问题解决了,求瞬时速度问题,求曲边梯形面积问题就都解决了.

考虑平均速度和瞬时速度的关系,有两种思路.经典的牛顿 - 莱布尼兹思路,是让平均速度取极限获得瞬时速度,同时就产生一些难以理解的概念,也是通向高等数学的概念.我们的思路却来自平凡得多的道理:若非匀速运动,则瞬时速度有时候大于平均速度,有时候小于平均速度.这样考虑问题,就把微积分的经典问题放在初等数学范围之内了.

从两个例子,抽象出下面的定义.

定义 1 (甲函数和乙函数) 设函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在区间 I 上有定义,若对 I 的任意子区间 $[u,v]$,总有 $[u,v]$ 上的 p 和 q,使有不等式

$$f(p) \leqslant \frac{F(u) - F(v)}{u - v} \leqslant f(q) \tag{3}$$

成立,则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的甲函数,$f(x)$ 是 $F(x)$ 在区间 I 上的乙函数.

从乙函数定义立刻推出

命题 1 (i) 函数 $g(x) = 0$ 是常数函数 $f(x) = C$ 的乙函数.

(ii) 函数 $g(x) = k$ 是一次函数 $f(x) = kx + b$ 的乙函数.

(iii) 若函数 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的乙函数,则函数 $kg(x)$ 是 $kf(x) + c$ 的乙函数.

(iv) 若函数 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的乙函数,则函数 $kg(kx + c)$ 是 $f(kx + c)$ 的乙函数.

命题 2 设在区间 I 上函数 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的乙函数.在 I 的任意子区间 $[u,v]$ 上,若 $g(x)$ 为正则 $f(x)$ 递增;若 $g(x)$ 为负则 $f(x)$ 递减;若 $g(x)$ 为 0 则 $f(x)$ 为常数;若 $g(x)$ 为非零常数 k 则 $f(x) = kx + c$,其中 c 是一个常数.

函数的差商当然是研究函数的重要工具.但差商的表达式中有两个变量,不好讨论.有了不等式(3),可以用一个变元的乙函数 $f(x)$ 来估计甲函数 $F(x)$ 的含有两个变元的差商,进而用来研究函数 $F(x)$ 的增减性,这比用导数的道理要浅显明白得多.

根据定义 1,不等式(1) 说明 $f(x) = 2x$ 是 $F(x) = x^2$ 的乙函数.

下面着手找寻不等式(1) 后面的一般规律.先对几个简单的函数尝试推出其乙函数.

例 3 函数 $g(x) = 3x^2$ 是 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的乙函数.

证明 对任意 $u < v$,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{v^3 - u^3}{v - u} = u^2 + uv + v^2 \tag{4}$$

当 $uv > 0$ 时,$u^2 + uv + v^2$ 显然在 $g(u) = 3u^2$ 和 $g(v) = 3v^2$ 之间;当 $uv \leqslant 0$ 时,$u^2 + uv + v^2$ 显然在 $g(0) = 0$ 和 $\max\{g(v), g(u)\}$ 之间.这表明,$g(x) = 3x^2$ 是 $f(x) = x^3$ 的乙函数.

例 4 在 $(0, +\infty)$ 上,函数 $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 是 $f(x) = \sqrt{x}$ 的乙函数.

证明 对 $0 < u < v$ 有

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{\sqrt{v} - \sqrt{u}}{v - u} = \frac{1}{\sqrt{v} + \sqrt{u}} \tag{5}$$

不等式 $g(v) = \dfrac{1}{2\sqrt{v}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{u}} = g(u)$ 表明,$g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 是 $f(x) = \sqrt{x}$ 的乙函数.

例 5 在 $(0, +\infty)$ 上,函数 $g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ 是 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的乙函数.

证明 由于

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{u}}{v - u} = \frac{-1}{uv} \tag{6}$$

不等式 $g(u)=\frac{-1}{u^2}\leqslant\frac{-1}{uv}\leqslant\frac{-1}{v^2}=g(v)$ 表明，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的乙函数. 略加讨论就知道此结论在 $(-\infty,0)$ 上也成立.

通过上面估计差商获取乙函数的几个例子，我们发现，所获得的乙函数果然就是微积分中甲函数的导数，而这里没有使用任何涉及极限或无穷小的运算.

用上面的方法求乙函数，显然不可能走得很远. 因为函数越复杂，其差商表达式也会越复杂，直接估计其上下界也会更为困难. 我们应当考虑更多例子，找寻一些规律，作为计算的工具.

3. 计算更多函数的乙函数

为了寻求更有力的计算乙函数的方法，要对差商做更多的考察.

命题 3　两个函数之和的差商，等于两函数差商的和.

命题 4　两函数在区间 I 上差商处处相等的充分必要条件是两函数的差在区间 I 上为常数.

上面两个命题均属显然.

命题 5(差商分化定理)　设 $f(x)$ 在 $[u,v]$ 上有定义，$u<a<v$；记 m 为

$$\frac{f(a)-f(u)}{a-u},\ \frac{f(v)-f(a)}{v-a}$$

两者中较小者，而 M 为两者中较大者，则 $m\leqslant\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\leqslant M$，等式仅当 $m=M$ 时成立.

证明　不失一般性，不妨设 $m=\frac{f(a)-f(u)}{a-u}<\frac{f(v)-f(a)}{v-a}=M$，于是有

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=\frac{1}{v-u}((v-a)M+(a-u)m)<M$$

再由 $m<M$ 得到

$$m<\frac{1}{v-u}((v-a)M+(a-u)m)<M$$

这证明了所要的结论.

根据差商分化定理，马上推出乙函数的区间可分性.

命题 6　(乙函数的区间可分性) 若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的乙函数，又是 $f(x)$ 在区间 J 上的乙函数，且区间 I 和区间 J 有公共点，则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $K=I\cup J$ 上的乙函数.

证明　按定义，只要证明对 $K=I\cup J$ 的任意子区间 $[u,v]$，总有 $[u,v]$ 中的点 p 和 q，使有不等式

$$g(p)\leqslant\frac{f(u)-f(v)}{u-v}\leqslant g(q) \tag{7}$$

成立即可. 若 $[u,v]$ 是 I 或 J 的子区间，结论显然. 若不然，则有 I 和 J 的公共点 $a\in(u,v)$ 使得 $[u,a]$ 和 $[a,v]$ 分别包含于 I 和 J. 由差商分化定理，差商 $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ 总在 $\frac{f(v)-f(a)}{v-a}$ 和 $\frac{f(a)-f(u)}{a-u}$ 之间，再用前提条件即可推出所要的结论.

上述命题显然可以推广到任意多个区间之并的情形，所以在求乙函数时就可以对区间分段处理了.

例 6　对任意正整数 n，$g(x)=nx^{n-1}$ 是 $f(x)=x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的乙函数.

证明　对于 $u<v$，先计算出差商的一般表达式

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=\frac{v^n-u^n}{v-u}=\sum_{k=0}^{n-1}u^kv^{n-1-k} \tag{8}$$

当 $0\leqslant u<v$ 时有

$$g(u)=nu^{n-1}<\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=\sum_{k=0}^{n-1}u^kv^{n-1-k}<nv^{n-1}=g(v) \tag{9}$$

故 $g(x)=nx^{n-1}$ 在 $[0,+\infty)$ 是 $f(x)=x^n$ 的乙函数；

当 $u<v\leqslant 0$ 而 n 为偶数数时，和号下每项均为负，仍有式(9) 成立. 而 n 为奇数时，和号下每项均为正，有

$$g(v)=nv^{n-1}<\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=\sum_{k=0}^{n-1}u^kv^{n-1-k}<nu^{n-1}=g(u) \tag{10}$$

故 $g(x)=nx^{n-1}$ 在 $(-\infty,0]$ 上也是 $f(x)=x^n$ 的乙函数;

根据乙函数的区间可分性,可知结论成立.

上面得到的结论,对于负整数 n 也成立.

例 7 对任意负整数 n, $g(x)=nx^{n-1}$ 是 $f(x)=x^n$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上的乙函数.

证明 记 $m=-n$,对于 $u<v$,先计算出差商的一般表达式

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=\frac{\frac{1}{v^m}-\frac{1}{u^m}}{v-u}=\frac{v^m-u^m}{v-u}\cdot\frac{-1}{u^mv^m}=$$
$$\frac{-1}{u^mv^m}\sum_{k=0}^{m-1}u^kv^{m-1-k}=$$
$$-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{u^{m-k}v^{1+k}} \tag{11}$$

当 $u\cdot v>0$ 时容易检验

$$-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{u^{m-k}v^{1+k}} \tag{12}$$

在 $\frac{-m}{u^{m+1}}$ 和 $\frac{-m}{v^{m+1}}$ 之间,故 $g(x)=-mx^{-(m+1)}=nx^{n-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上和 $(-\infty,0)$ 上都是 $f(x)=x^n$ 的乙函数.

例 8 在 $(-\infty,+\infty)$ 上,函数 $g(x)=\cos x$ 是 $f(x)=\sin x$ 的乙函数.

证明 注意当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有 $\sin x<x<\tan x$,从而 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$;于是对任意整数 k, $[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}]$ 上的任意两点 $u<v$,有

$$\frac{\sin v-\sin u}{v-u}=\frac{\sin\frac{v-u}{2}\cdot\cos\frac{v+u}{2}}{\frac{v-u}{2}}=\lambda\cos\frac{v+u}{2} \tag{13}$$

此处 λ 在两正数 $\cos\frac{v-u}{2}$ 和 1 之间,从而可知 $\frac{\sin v-\sin u}{v-u}$ 在

$\cos\frac{v-u}{2}\cdot\cos\frac{v+u}{2}$ 和 $\cos\frac{v+u}{2}$ 之间.又因

$$\cos\frac{v-u}{2}\cdot\cos\frac{v+u}{2}=\frac{\cos u+\cos v}{2} \tag{14}$$

这表明,在 $[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}]$ 上 $\cos x$ 是 $\sin x$ 的乙函数.

从而在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\cos x$ 也是 $\sin x$ 的乙函数.

4.函数和的乙函数

上面求出了不少函数的乙函数.现在问,求乙函数的运算是否有可加性?也就是说,如果知道了两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的乙函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$,那么 $f(x)+g(x)$ 是不是 $F(x)+G(x)$ 的乙函数呢?如果是这样,就可以大大扩展上面的战果了.例如,根据 nx^{n-1} 是 x^n 的乙函数以及命题 1,立刻就能求出多项式的乙函数.

可惜这样的规律一般并不成立.下面的例子暴露了问题的症结.

设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数,例如设恒有 $F(x)=2$.显然 $f(x)=0$ 是 $F(x)$ 的乙函数.但除了 $f(x)$ 之外,用定义检验可知 $F(x)$ 还有其他的乙函数.如迪利克雷(Dirichlet Peter Gustay Lejeune, 1805.2.13—1859.5.5)函数

$$D(x)=\begin{cases}0 & (x\text{ 为无理数})\\ 1 & (x\text{ 为有理数})\end{cases}$$

就也是 $F(x)$ 的乙函数. 不但如此, $1-D(x)$ 也是 $F(x)$ 的乙函数. 但是若令 $g(x)=D(x)+(1-D(x))=1$, $g(x)$ 显然不是 $G(x)=F(x)+F(x)=4$ 的乙函数. 可见, 一般说来两函数的乙函数的和不一定是两函数的和的乙函数.

上面的反例中用到了平常很少碰见的迪利克雷函数. 这启发我们想, 如果乙函数是通常的函数, 不像迪利克雷函数那么怪, 是不是就具有可加性呢?

这里就又有了一个新的问题, 什么是通常的函数呢? 能不能用一个特征性质把它们刻画出来, 使之区别于迪利克雷函数之类的淘气鬼呢?

在高等数学中有连续函数的概念. 如果仅仅讨论连续函数, 确实能够排除迪利克雷函数. 为了把问题限制在初等数学范围内, 下面考虑连续函数中的一部分, 叫做"差商有界"函数, 也叫做"满足利普希茨(Lipschitz Rudolf Otto Sigismund 1832.5.14—1903.10.7) 条件"的函数.

定义 2 (差商有界的函数) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 且有正数 M 使得对 I 上任意两点 $u<v$, 总有不等式

$$|f(v)-f(u)|\leqslant M|v-u| \tag{15}$$

成立, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上差商有界. 也说 $f(x)$ 在区间 I 上满足利普希茨条件(Lipschitz 条件), 正数 M 叫做 $f(x)$ 在区间 I 上的利普希茨常数.

容易证明

命题 7 在区间 $[a,b]$ 上差商有界的函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必有界.

证明 由定义中的式(15)得

$$\begin{aligned}|f(x)|=&|f(a)+f(x)-f(a)|\leqslant\\ &|f(a)|+|f(x)-f(a)|\leqslant\\ &|f(a)|+M|x-a|\leqslant\\ &|f(a)|+M|b-a|\end{aligned}$$

即所欲证.

几何上看, 差商有界的函数, 其曲线上任意两点所确定的直线的斜率的绝对值有界. 也就是不能太陡.

多项式函数、三角函数、指数函数和对数函数, 在有定义的闭区间上, 总是差商有界的. 两个差商有界函数的和, 积以及复合函数也是差商有界的. 因而初等函数在定义域内的不含个别点的闭区间上都是差商有界的.

实际上, 差商有界函数类比初等函数类广泛得多. 为了实际应用, 研究差商有界函数类是足够的.

显然有

命题 8 如果函数 $F(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上和区间 $[c,b]$ 上都是差商有界的, 则它在区间 $[a,b]$ 上也是差商有界的. 反过来, 若函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上差商有界, 则它在 $[a,b]$ 的任意子区间上也是差商有界的.

下面的命题比命题 8 更为深刻:

命题 9 (差商有界函数的连续性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上差商有界. 对任意 $u\in I$ 和包含 $f(u)$ 开区间 (α,β), 必有一个包含 u 的开区间 Δ, 使对一切 $x\in\Delta\cap I$, 都有 $f(x)\in(\alpha,\beta)$.

证明 设 $d=\min\{f(u)-\alpha,\beta-f(u)\}$, 则 $d>0$. 想要 $f(x)\in(\alpha,\beta)$, 只需有 $|f(x)-f(u)|<d$ 即可; 由差商有界定义(15)可知有正数 M 使得对一切 $x\in I$ 有 $|f(x)-f(u)|\leqslant M|x-u|$, 从而只要 $|x-u|<\frac{d}{M}$ 即令 $\Delta=\left(u-\frac{d}{M},u+\frac{d}{M}\right)$ 就可达到目的. 证毕.

上述命题表明, 差商有界函数在每个点处的函数值在某种意义上是有代表性的. 它能代表附近一小片的函数值. 这样的函数在实际问题中才有意义, 才不至于因为自变量的一点误差而引起函数值的大起大落, 不

至于像迪利克雷函数那样,产生“差之毫厘,谬之千里”的后果.

一般说来,具有命题9所说性质的函数叫做连续函数.连续函数是一类比差商有界函数更广泛的函数.在中学如果讲连续函数,涉及更多的概念,增加了推理的难度.从应用范围和思想方法来看,差商有界的函数足够广泛也足够说明思路和方法的实质,但推理简明得多.

上面说到,一个函数的乙函数可能不是唯一的.下面证明,加上差商有界的条件,就是唯一的了.为此,先指出同一个函数的两个乙函数之间的简单的关系.

命题 10 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是函数 $F(x)$ 在区间 I 上的乙函数,则对于任意 $[u,v] \subseteq I$,必有其中的点 p、q、r、s,使得

$$f(p) \leqslant g(q) \text{ 和 } f(r) \geqslant g(s) \tag{16}$$

同时成立.

下面证明差商有界的乙函数是唯一的.

命题 11 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是函数 $F(x)$ 在区间 I 上的差商有界的乙函数,则对于任意 $p \in I$ 总有 $f(p) = g(p)$.

证明 用反证法,为确定起见不妨设 $f(p) > g(p)$,取实数 a,b,c 使得 $a < g(p) < b < f(p) < c$,即 $g(p) \in (a,b)$ 且 $f(p) \in (b,c)$.

由命题9,必有包含的开区间 Δ_1 和 Δ_2,使对一切 $x \in \Delta_1 \cap I$ 有 $g(x) \in (a,b)$ 且对一切 $x \in \Delta_2 \cap I$ 有 $f(x) \in (b,c)$.设 $[u,v]$ 是 $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap I$ 的一个闭子区间,则对一切 $p \in [u,v]$ 和 $q \in [u,v]$ 总有 $g(p) < f(q)$,这与乙函数的性质命题10矛盾.证毕.

命题 12 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在区间 I 上的乙函数,且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 差商有界;则 $h(x) = f(x) + g(x)$ 是 $H(x) = F(x) + G(x)$ 在区间 I 上的乙函数.

证明 只要证明对任意 $[u,v] \subseteq I$,总有 $p \in [u,v]$ 和 $q \in [u,v]$ 使得

$$h(p) \leqslant \frac{H(v) - H(u)}{v - u} \leqslant h(q) \tag{17}$$

成立即可.

下面先证明有 $p \in [u,v]$ 满足式(17)的左端.同法可证有 $q \in [u,v]$ 满足式(17)的右端.

若 $H(x)$ 在 $[u,v]$ 是常数或一次函数,结论显然.

若不然,由差商分化定理(命题5),必有 $[r,s] \subset [u,v]$ 使得

$$\frac{H(v) - H(u)}{v - u} - \frac{H(s) - H(r)}{s - r} = d > 0. \tag{i}$$

设 M 是 $g(x)$ 在 $[u,v]$ 上的利普希茨常数.取正整数 $n > \left| \frac{M(s-r)}{d} \right|$,将 $[r,s]$ 等分为 n 段,记 $h = \frac{s-r}{n}$,则 n 段中必有一段 $[w, w+h]$ 使得不等式

$$\frac{H(w+h) - H(w)}{h} \leqslant \frac{H(s) - H(r)}{s - r} \tag{ii}$$

成立.也就是

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h} + \frac{G(w+h) - G(w)}{h} \leqslant \frac{H(s) - H(r)}{s - r} \tag{iii}$$

由乙函数的定义可知,在 $[w, w+h]$ 上有 p 和 p_1 使得

$$f(p) \leqslant \frac{F(w+h) - F(w)}{h},$$

$$g(p_1) \leqslant \frac{G(w+h) - G(w)}{h} \tag{iv}$$

结合式(iv)、(iii) 和(i) 得到

$$f(p) + g(p_1) + d < \frac{H(v) - H(u)}{v - u} \tag{v}$$

由 $h(x) = f(x) + g(x)$,式(v) 可改写为

$$h(p) - g(p) + g(p_1) + d < \frac{H(v) - H(u)}{v - u} \tag{vi}$$

为了得到不等式(17) 的右端,只要证明

$$-g(p) + g(p_1) + d \geqslant 0 \tag{vii}$$

即可.由于 $n > \left|\frac{M(s-r)}{d}\right|$,故得

$$|g(p_1) - g(p)| \leqslant M|p_1 - p| \leqslant$$

$$Mh = \frac{M|s-r|}{n} < |d|$$

从而式(vii) 成立.

将式(i) 至式(vii) 诸不等式改变方向,可完成不等式(17) 右端的证明.命题证毕.

注意到证明中没用到 $f(x)$ 差商有界的条件,说明其结果可以推广.

稍后,我们对差商有界的乙函数做更深入的探究,将会得到上述命题的更简单的证明.

5. 乙函数和导数

进一步看,差商有界的乙函数有何特色呢?

命题 13 若在 I 上 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的乙函数,且 $f(x)$ 在 I 上满足利普希茨条件即差商有界,正数 M 是 $f(x)$ 在 I 上的利普希茨常数;则对 I 上的任意两点 u 和 $u+h$,和任意的 $s \in [u, u+h]$(或 $s \in [u+h, u]$)有

$$|F(u+h) - F(u) - f(s)h| \leqslant Mh^2 \tag{18}$$

上列不等式可以等价地写成

$$\left|\frac{F(u+h) - F(u)}{h} - f(s)\right| \leqslant M|h| \tag{19}$$

证明 由乙函数的意义,对 I 上的任意两点 u 和 $u+h$,有$[u, u+h]$(或$[u+h, u]$)上的两点 p 和 q,使得

$$f(p) \leqslant \frac{F(u+h) - F(u)}{h} \leqslant f(q) \tag{i}$$

将式(i) 的各项同减 $f(s)$ 得

$$f(p) - f(s) \leqslant \frac{F(u+h) - F(u)}{h} - f(s) \leqslant f(q) - f(s) \tag{ii}$$

注意到 p, q 和 s 都在 u 和 $u+h$ 之间,又因为 $f(x)$ 在 I 上差商有界且 M 为利普希茨常数,故有

$$\begin{cases} |f(q) - f(s)| \leqslant M|q - s| \leqslant M|h| \\ |f(p) - f(s)| \leqslant M|p - s| \leqslant M|h| \end{cases} \tag{iii}$$

结合式(ii) 和式(iii) 得到所要的结论.证毕.

上述证明的思路是直观而简单的:由于乙函数 $f(x)$ 满足利普希茨条件,它在$[u,v]$ 上的任意两值之差的绝对值都不超过 $M|u-v|$;而甲函数 $F(x)$ 的差商被乙函数 $f(x)$ 在$[u,v]$ 上的两个值夹在中间,所以这差商和乙函数在$[u,v]$ 上的任一值的差的绝对值不超过 $M|u-v|$,这实际上就是要证明的结论.

从式(19) 可见,当乙函数差商有界时,只要 $h = v - u$ 足够小,甲函数在$[u,v]$ 上的差商和乙函数在$[u,v]$ 上的函数值就能非常接近,要多么接近就可以多么接近.也就是说,当时间段足够小的时候,平均速度和瞬时速度的差可以要多么小就多么小.这样,从乙函数概念出发也就可以导出极限的思想了.

于是,不等式(19)引出下面由林群建议的不用极限的导数定义.

定义3 (强可导的定义)设函数 $y = F(x)$ 在 I 上有定义.如果存在一个定义在 I 上的函数$f(x)$和正数 M,使得对 I 上的任意点 x 和 $x+h$,(这里 h 可正可负)成立不等式

$$|F(x+h) - F(x) - f(x)h| \leqslant Mh^2 \tag{20}$$

则称函数 $y = F(x)$ 在 I 上强可导(或利普希茨可导),并称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数,记做 $F'(x) = f(x)$ 或 $y' = f(x)$,或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

容易证明,强可导函数的导数差商有界,即满足利普希茨条件.这是国外有人把它叫做利普希茨可导的由来.

命题14 设函数 $F(x)$ 在 I 上强可导,$F'(x) = f(x)$;则 $f(x)$ 在 I 上满足利普希茨条件即差商有界.

证明 将不等式(20)写成

$$-Mh^2 \leqslant F(u+h) - F(u) - f(u)h \leqslant Mh^2 \tag{i}$$

交换 u 和 $u+h$ 的位置得到

$$-Mh^2 \leqslant F(u) - F(u+h) - f(u+h)(-h) \leqslant Mh^2 \tag{ii}$$

两式相加整理得

$$|f(u+h) - f(u)| \leqslant 2M|h| \tag{iii}$$

这就是要证明的.

下面的命题,说明了不等式(20)的重要性.

命题15 (估值定理)设 $F(x)$ 在 I 上强可导, $F'(x) = f(x)$,则对 I 的任意子区间$[u,v]$,有$[u,v]$中的点 p 和 q,使得

$$f(p) \leqslant \frac{F(v) - F(u)}{v - u} \leqslant f(q) \tag{21}$$

成立.也就是说,$f(x)$ 是 $F(x)$ 在 I 上的乙函数.

证明 若对于所有 $x \in [u,v]$,$F(x)$ 的差商

$$\frac{F(x) - F(u)}{x - u}$$

为常数,则结论显然.如不然,必有$[r,s] \subset [u,v]$使得

$$\frac{F(v) - F(u)}{v - u} - \frac{F(s) - F(r)}{s - r} = d > 0. \tag{i}$$

由强可导定义可知有正数 M 使对一切 $x \in [u,v]$ 和 $x+h \in [u,v]$ 有

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant M|h| \tag{ii}$$

取正整数 $n > \frac{M(s-r)}{d}$,将$[r,s]$等分为 n 段,记 $h = \frac{s-r}{n}$,则 n 段中必有一段$[p,p+h]$使得不等式

$$\frac{F(p+h) - F(p)}{h} \leqslant \frac{F(s) - F(r)}{s - r} \tag{iii}$$

成立.由式(i),(ii)和(iii),以及 $n > \frac{M(s-r)}{d}$ 即 $Mh < d$ 得到

$$\begin{aligned} f(p) &\leqslant \frac{F(p+h) - F(p)}{h} + Mh < \\ &\frac{F(s) - F(r)}{s - r} + d = \\ &\frac{F(v) - F(u)}{v - u} \end{aligned} \tag{iv}$$

为了证明结论的另一半,可设 $G(x) = -F(x)$,则 $G'(x) = -f(x)$.对 $G(x)$ 应用上面得到的结论,可知有

$q \in [u,v]$ 满足

$$-f(q) \leqslant \frac{G(v)-G(u)}{v-u} = \frac{-(F(v)-F(u))}{v-u}$$

即满足$\frac{F(v)-F(u)}{v-u} \leqslant f(q)$.命题证毕.

上面这个命题的作用相当于传统微积分的拉格朗日中值定理.是微积分的一个基本工具.上述证明,直观上看其思路清楚:先取$[u,v]$的子区间把要估计的界降低一些,再把这子区间加细用导数值逼近小区间差商以达到目的.

综合上面3个命题,得到

命题16 (乙函数差商有界充要条件)函数$f(x)$在区间I上差商有界并且是$F(x)$的乙函数的充分必要条件是$F(x)$在I上强可导(利普希茨可导)且$F'(x)=f(x)$.

这个充分必要条件涉及3个不等式:

(I) 强可导不等式(利普希茨可导不等式)

$$|F(x+h)-F(x)-f(x)h| \leqslant Mh^2$$

这里x和$x+h$是区间I上任意两点,而M是仅与I有关的正数;

(II) 差商有界不等式(利普希茨条件不等式)

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant M|h|$$

这里x和$x+h$是区间I上任意两点,而M是仅与I有关的正数;

(III) 估值不等式(乙函数不等式)对于区间I上任意两点$u<v$,有$[u,v]$上的p和q使得

$$f(p) \leqslant \frac{F(v)-F(u)}{v-u} \leqslant f(q)$$

而命题16的含义可以概括为

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow (\mathrm{II})+(\mathrm{III}) \tag{22}$$

上面三个不等式中,(I)有利于推导计算法则和实际计算,(III)有利于理论证明.例如:

命题17 设$F(x)$在I上强可导,$F'(x)=f(x)$,若对一切$x \in I$有$f(x)>0$,则$F(x)$在I上递增.

证明 由命题16,$f(x)$是$F(x)$在I上的乙函数;由$f(x)>0$及命题2即得$F(x)$在I上递增.

命题18 设$F(x)$和$G(x)$在I上强可导,其导数分别为$f(x)$和$g(x)$.记$k(x)=f(x)+g(x)$,$K(x)=F(x)+G(x)$;则$K(x)$在区间I上强可导,且$K'(x)=k(x)$.

证明 由强可导定义和条件可知有正数M_1和M_2,使得对I上的任意点x和$x+h$有

$$-M_1h^2 \leqslant F(x+h)-F(x)-f(x)h \leqslant M_1h^2$$

$$-M_2h^2 \leqslant G(x+h)-G(x)-g(x)h \leqslant M_2h^2$$

两式相加,记$M=M_1+M_2$,即得

$$-Mh^2 \leqslant K(x+h)-K(x)-k(x)h \leqslant Mh^2$$

这证明了所要的结论.

根据命题16,由上述结论轻松推出差商有界的乙函数的可加性,这比命题12的证明简单多了.

6. 定积分和微积分基本定理

回顾上一节,对比一下传统的高等数学教材中如何证明"导数正则函数增",看出初等数学里的微积分要简单得多.

不但如此,在初等数学里,定积分的引入和微积分基本定理的推导也要简单得多.

给了区间I上的函数$f(x)$,对应于I中任意两点$u<v$,$f(x)$在$[u,v]$上的曲边梯形的代数面积,可以看成二元函数$S(u,v)$的值.$S(u,v)$应当满足两个条件.一个条件是面积的可加性:$[u,v]$上的面积加上$[v,w]$上的面积,等于$[u,w]$上的面积;另一个条件是,$[u,v]$上的面积和区间$[u,v]$的长度之比,应当是