實用微積分

編著者：

薩本棟，鄭曾同，楊龍生。

青年圖書出版社印行

中華民國三十三年九月

實用微積分

上卷

編著者：

薩本棟，鄭曾同，楊龍生。

青年圖書出版社印行

中華民國三十三年九月

弁　言

編微積分學者大都分之爲微分學及積分學兩部；如是分授，讀者必須將微分學之基礎觀念及一般應用全行學習完畢，方及積分之淺顯部分。惟微分與積分原爲同一問題之正反兩面，其算式實可同時學習，勿庸等待將微分之應用全行學習完畢之後再論積分。常見初學者因微分之應用太廣，而其計算技術與公式復繁，以致於學完微分學後即忘却基本觀念。爲矯正此弊起見，本書先討論較簡單之代數函數之微分與積分，及其尋常應用如極大極小與面積等，以使讀者之注意力得集中於基本觀念，而不爲繁雜之越函數之微分公式所分散。至於偏微分與級數等問題，則留於讀者對於微積分已有相當之運用能力後方爲述及。此爲本書編輯次序與他書不同之一點。

近年來高中學生之數學訓練較差，以致初入大學之學生對於三角及對數之算法往往不甚明瞭，本書在未討論三角函數及指數與對數函數之微積分之前，對此等函數之基本問題亦略加申述，以便學生之複習。用本書爲教本者，對於此等段節可酌量學生程度以定去取。說明弧度及自然對數之底數 e 之時，特別利用過原點各有關曲線之斜度爲1一事，以示明弧度與 e 之定義，其用意實同爲採用適當單位以謀公式之簡單化而已。

純粹數學家多少希望其學生能了解數學證明之必須嚴格，且能欣賞嚴格證明；但在初等教本中，各證明應嚴格到何等程度，以及初學微積分之學生對於嚴格證明能否欣賞各事，均係教學上可以辯論之問題。世有認教授初等數學之目標，在於顯示其實用之力量（vigor）而不應苛求證述之嚴格（rigor）者，亦非毫無見地。本冊以實用兩字冠

書名，原以示討論之方法及問題偏於實用，但遇證明不嚴格之處亦時常指出，以使讀者多得思考之材料。此種拆衷辦法或亦爲純粹數學家所能諒解歟？

國立廈門大學於抗戰後內遷長汀，時感課本缺乏。本書之編輯，原以應是校一二年學生初習微積分之需要，初稿僅印三百份，使用三年，業已告罄，而校外索購者復繁有徒，故爲訂正付梓。若能有助於其他大學之敎者與學者，則大幸焉！

編者　卅一年四月於長汀廈大

再版附記

借這再版機會，編者又把原文改訂一次。但，改訂之後，是否已達到絕對精確程度，我們還不敢武斷，且亦不敢斷言毫無改錯的地方。

三十三年五月，編者。

實用微積分目次

上　卷

弁言

第一章	變數　極限　函數	頁 (1—20)
第二章	代數函數之紀數	(21--42)
	第一，二兩章附圖	
第三章	幾何學上之應用	(43–60)
	第三章附圖	
第四章	事理上之極大與極小及變化率	(61—78)
第五章	微分	(79--92)
第六章	不定積分	(93—110)
	第四，五，六叁章附圖	
第七章	定積分	(111—126)
	第七章附圖	
第八章	三角函數	(127—164)
	第八章附圖	
第九章	指數函數及對數函數	(165—186)
第十章	極坐標與參變方程	(187—204)
	第九，十兩章附圖	
第十一章	曲線弧與曲度	(205--218)
	第十一章附圖	

實用微積分

第一章 變數 極限 函數

(1.1) 實數　在日常生活中，吾人常論及各事物之數量的關係，例如購買物品時計較其輕重，長短及價值；入學時考慮學費之數目，上課時數與學分數之多寡等等。人類智慧愈高，文明程度愈進，則所用之數(number)其範圍亦愈廣。在啓蒙時代，人們僅知用正整數。由減法之應用，乃有零及負整數；由除法復有分數。正負整數，分數及零遂名爲有理數(rational number)。是後，因有時所用之數量不能以整數互相加減乘除而得之(例如討論邊長爲一單位之正方形之對角線，或直徑爲一單位之圓周時)，乃有無理數(irrational number)之概念。簡言之，凡非有理數之實數(real number)均名爲無理數。嚴格言之，無理數不能化爲整數或分數；但在多數實用問題中，因量測之時，其準確程度均爲有限，故遇無理數時，吾人亦常用其近似(approximate)之有理數以作計算；例如圓周長與直徑之比，其數名爲 π，在需要五位之準確值時，吾人可逕寫 3.1416（此值可視爲 31416 與 1000 兩整數之商），或如僅需要三位可靠之值，則以 $\frac{22}{7}$ 代 π 亦無不可。

無理數一名實不甚妥，因其在實用日常問題中極爲常見，絕非無理。今若推廣算術中開方一概念，又可得一種數，驟視之似更無理，然又非前此所述之無理數。此等數係由求負數之平方根而起。例如 $\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$，$\sqrt{-9}$ 等等。因所有實數之平方不能爲負，（即不能小於零），故此等數常名爲純虛數（pure imaginary）或簡稱虛數

(imaginary)。虛數之理論較諸實數自爲更難。本書所討論者將以實數爲限。至若遇及無理數時，常將利用其近似之有理數，以避免嚴格的討論之困難。

討論實數各問題時，常用絕對值 (absolute value) 一詞，其意係不計該數之符號，只計其數量。例如 -3 及 3 之絕對值均爲 3。表示絕對值時，常用兩直線左右夾之，例如 $|-3|$。

(1.2) 變數　討論一問題時，不善於引用數學方法者，多願以語文表示之。其實，數學即爲語文之一，在善於運用者手中，其便利且非任何其他語文所能望及。以數學方法討論一問題時，其中各數常用記號或字母代表之，(阿剌伯數碼即爲一種較普遍之記號而已)。在問題中，有些數，其值於某範圍內可任意變化，亦有些數，其值係固定不變。茲名前者爲變數 (variable)，後者爲常數(constant)。例如有固定之款項共 a 元，今以之購買物品。若物品之單價爲 x 元，而所購之數量爲 y，則有下列關係：

$$a=xy \qquad (1).$$

在此中 a 爲常數，x 及 y 則均爲變數，因物之單價及所能購得之數量均將隨時隨地而變也。表示變數之記號常爲羅馬字之末後數字母，如 $x, X, y, Y, z, Z, t, T, v, V$ 等；表示常數之記號則常用羅馬字之前數個字母，如 a, A, b, B, c, C 等。多數人雖係如是取用各字母，但因羅馬字母爲數不多，且問題性質絕非固定，故此處所說之用法只可作爲參考。至於某字母所代表者果爲變數，抑爲常數，均應由題意決定之，不應受此處之說明所限制。

變數之值，可認爲係循一定之法則而變化。例如方程(1)中之 x 可依序爲 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，……，亦可經歷 A 與 B 間所有之數（有理數及無理數）而由 A 增至 B 或由 B 減至 A。在前述情形下，其變化爲間斷的(discontinuous)，在後述情形下則稱 x 連續(continuous)變於 A 至 B 間隔(interval)內。

(1.3) 極限　設令變數 x 依一定法則變更其值；若在 x 之變化過程中，x 取 x_1，x_2，x_3，……，x_n，x_{n+1}，……各值，而自某值始，如 x_n，其後各 x 與 c 相差之絕對值（即 $|x-c|$）係比任意指定之甚小正數之值均較小，則稱 c 爲 x 之極限(limit)，或 x 趨於極限 c，其記號爲：

$$\lim x=c \text{或} x\to c \qquad (2).$$

例 1　x 依 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，…… 法則而變，則其極限爲 1，因 $|x-1|$ 依次序將爲 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$ ……，其最後之值可小於任何正數也。

例 2　x 依 $\frac{3}{2}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{5}$ 法則而變，則其極限爲 0。

例 3　設 x 之變更法則爲 $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{6}{5}$，……其極限亦係 1。

例 4　設 x 之變化法則爲 2，$\frac{2^2}{2}$，$\frac{2^3}{3}$，$\frac{2^4}{4}$，…… 則其值將無限增大，而不達一極限。

例 5　設 x 遵 $\left(\frac{1}{2}\right)$，$\left(1+\frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{3}{4}\right)$，$\left(1+\frac{4}{5}\right)$，$\left(\frac{5}{6}\right)$……而變化，則 x 無極限，因有時 x 係與 1 接近，而有時則與 2 接近也。

自第三例觀之，變數變化之法則，可不必係恆增或恆減，其極限仍可爲確定之值。又變數之變化可爲間斷的如本節各例，亦可遵甚繁複之連續的法則。

(1.4) 無窮小　極限一觀念在微積分中極爲重要。設只藉方程(2)以作應用，有時殊感不便，因吾人雖知如何運用加減乘除各基本算法，而此等算法遇及極限記號 lim 時應如何引用方不至誤，實須另行推證。茲爲便於計算起見，另用無窮小一觀念。凡極限爲零之變數名爲無窮小 (infinitesimal)。在此定義中，讀者須注意無窮小係一變數，其極限爲 0，並非甚小之常識，如兆分之一或 0 本身。例如當 x 變化時其值依次爲 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……，則 x 爲一無窮小；反之，若 $z-c$ 爲無窮小，則 z 之極限必爲 c。表示無窮小有時用 h 或 k 字。

引用無窮小，方程(2)可改寫作

$$x-c=h \qquad (3).$$

在此中已無 lim 一記號，其運用自較易，惟吾人仍須記得 h 係一無窮小，即極限爲 0 之變數也。

無窮小之基本定理有四。此等定理之意義甚爲明顯，其證明須用及絕對值三個重要公式，即 $|a\pm b|\leqq|a|+|b|$，$|ab|=|a|\,|b|$ 及 $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$，茲先述各定理如下：

(A)　兩無窮小 h 及 k 之和或差 (即 $h\pm k$) 仍爲無窮小；但如 h 與 k 恆等，則其差爲零而非無窮小！

(B)　一異於 0 之常數 c 與無窮小 h 之積仍爲無窮小。

(C)　兩無窮小之積仍爲無窮小。

(D)　設 h 為無窮小，u 為另一變數，其極限為異於 0 之常數 a（即 u 非無窮小），則 $\frac{h}{u}$ 仍為無窮小。

欲證某變量係無窮小，只須證明其絕對值可較任何小正數為更小。故如 $|h\pm k|$ 可小於任何小正數 m，則 $|h\pm k|$ 即為無窮小。今知 $|h\pm k|$ 不能較 $|h|+|k|$ 為更大，即

$$|h\pm k|\leqq|h|+|k|$$

故欲 $|h\pm k|$ 小於某正值 m，只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各小於 $\frac{m}{2}$ 即可。惟 h 及 k 均為無窮小，其絕對值可小於任何正數 $\frac{m}{2}$，是以 $|h\pm k|$ 亦可小於任何正數而為無窮小。

欲證 $c\,h$ 為無窮小時，可將 $|c\,h|$ 寫作 $|c|\,|h|$。設已與之小正數為 m，則只須 $|h|$ 較 $\frac{|m|}{|c|}$ 為小，即可使 $|c\,h|$ 較 m 為小。

欲證 $h\,k$ 係無窮小時，可引用 $|h\,k|=|h|\,|k|$。如是欲 $|h\,k|$ 較任何小正數 m 為小，只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各較 $\sqrt{m}$ 為小即可。

證第四定理時令 c 為一小於 $|a|$ 之正數。u 既以 a 為極限，故最後必變至與 a 無限接近，因此 $|u|>c$。今 $\left|\frac{h}{u}\right|=\frac{|h|}{|u|}$，故 $\left|\frac{h}{u}\right|<\frac{|h|}{c}$。是以若已與之小正數為 m，則只須 $|h|<cm$ 即可令 $\left|\frac{h}{u}\right|<m$ 矣。

<u>(1.5) 關於極限之定理</u>　自上述之無窮小四定理即可推得下列有關於極限之各定理：

(A)　兩變數之和或差之極限，等於其極限之和或差，即

$$\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y。$$

(B)　兩變數之積之極限等於其極限之積，即

$$\lim(xy)=(\lim x)(\lim y)。$$

(C) 若分母之極限異於零，則兩變數之商之極限，等於其極限之商，即如 $\lim y\neq 0$，

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}。$$

推證上列各定理之方法均係先利用方程(3)而照尋常之演算法進行。茲因(C)定理之證較難，特逐步推演之如下，至於(A)與(B)兩定理，可由讀者自證之。

令 $\lim x=a$，$\lim y=b\neq 0$。吾人所欲證者為 $\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$，或按方程(3)，吾人只須證

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=m$$

係一無窮小。x 與 y 之極限既分別為 a 與 b，故按方程(3)，令 h 與 k 為兩無窮小，則可寫 $x=a+h$，$y=b+k$。故

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{a+h}{b+k}-\frac{a}{b}=\frac{bh-ak}{b(b+k)}.$$

今 a 與 b 均為常數，而 $b\neq 0$，故按(1.4)節(A)與(B)兩定理，分子 $bh-ak$ 仍為無窮小，又按同節(D)定理，最後分數實為無窮小；因分母 $b(b+k)$ 之極限為異於0之常數 b^2 也。

推廣上列各定理，即可得下列各系：

(系1) 若 c 為一常數，則

$$\lim(x+c)=(\lim x)+c$$

$$\lim(cx)=c\lim x;$$

$$\lim\frac{c}{x}=\frac{c}{\lim x}\quad(\text{但}\lim x\neq 0)。$$

(系2) 設若干變數 x_1，x_2，x_3，………之極限分別為 a_1，a_2，a_3……，則

$$\lim(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \cdots\cdots) = \lim x_1 \pm \lim x_2 \pm \lim x_3 \pm \cdots$$
$$= a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots\cdots;$$

而 $$\lim(x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots) = (\lim x_1)(\lim x_2)(\lim x_3)\cdots\cdots$$
$$= a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots。$$

(系3) 若 n 表一正整數，而 $\lim x = a$，則

$$\lim(x^n) = (\lim x)^n = a^n。$$

(1.6) 函數　各問題中常遇二個或較多之變數互有關係。如是當某變數或若干變數之值確定之後，另一變數之值亦因之而確定。今名後一變數為前者之函數(function)。例如 x 及 y 為二變數，今若在某一定範圍內指定 x 之值後，y 皆有一確定之值與之相應，則在此範圍內 y 為 x 之函數。據此以言，則於方程(1)中 y 為 x 之函數，x 亦可視為 y 之函數。他例如

(A) $y = x^3$ 或 $y - 2x^3 - x + 1 = 0$，

(B) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 或 $y = \sin^{-1}x$，

(C) $u = \dfrac{x^2}{x+y}$，$u = \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$，或 $u - \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = 0$，

(D) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

皆是。在(A)中，y 顯然為 x 之函數；在(B)中，於適當範圍內 y 亦為 x 之函數(試言此範圍！)在(C)中，u 為 x 及 y 兩變數之函數，而在(D)中則 r 為 x、y、z 三變數之函數矣。(本書所討論者，除最後數章或有特別聲明外，均為一個變數之函數。)

在一函數關係中，可由吾人任意給與價值之變數常名為自變數(independent variable)；隨自變數之值而變之變數則名為應變數(depsndent variable)。某變數之函數，均可視作應變數。由此言之，某問題中之各變數何者係自變數，何者為應變數，實無嚴格之分界，多少均隨計算者之觀點而定。

(1.7) 函數之表顯法 為便利起見，上節所舉各函數之例均用方程表之。其實各種函數未必均能用方程表之。例如變數 x 之最大整數，(所謂某數 a 之最大整數，即指不超過 a 之整數中之最大者，例如 2.3 之最大整數為 2，-5 之最大整數為 -5) 顯為變數 x 之函數，然甚難以一方程表之。有時在某範圍內須用幾個方程方能表示一函數者；例如有一函數 y，在 $x=-1$ 與 $x=0$ 之間，(-1 在內，0 除外) 其與 x 之關係可以

$$y=\sqrt{1-x^2}\,,\qquad (-1\leqq x<0)$$

表之；惟當 $x=0$ 時，此函數等 0，即

$$y=0\,,\qquad (x=0)$$

且當 x 為正惟較 2 為小時，此函數則由

$$y=\log_{10}(2-x)\,,\qquad (0<x<2)$$

定之，如是此三方程亦可確定 y 為 x 於 -1 至 2 間隔內之函數。

能用方程表顯之函數，其討論法多可取所謂解析(analytic)方法。至若不能用方程表顯之函數，有時常用圖解(graphic)方式，或逕將各變數與其函數相應各值列為一表以資參考。在純粹數學家眼中，後兩式實不及前者雅緻，然在實用方面，後二式常反較重要，此

實因解析方法有時甚難使用也。

圖解方法，其準確程度常爲繪圖者之技術所限制，然能將全題之關係活躍的表於一有限之圖紙上，使人一目了然，係其優點。至如圖解之外，復佐以準確之表，則其應用將爲更廣。惟圖表所佔之篇幅終比一方程或數方程所佔者較大，是其弱點耳。

(1.8) 直角坐標圖示法　常見之圖示法係用直角坐標 (rectangular coordinates)。令 y 表 a 至 b 間隔內之函數。在紙上取兩正交直線如 OX 及 OY 爲坐標軸線。以適當之距離爲單位；在所規定之間隔內，於 OX 軸上自 O 點量起，劃出 x 單位之長度以作 x 之某任意値（正値自 O 向右量，負値則自 O 向左量），如圖(1.1)中之 x 點。在此點豎立一平行於 OY（即正交於 OX）之直線。於其上用同大小之單位求得 P 點，使 x P 之距離等於 y 單位之長度，（正値向上量，負値向下量）。自前此函數定義言之，此等 P 點之分佈，實無限制，惟若函數係單値的(見後 1.14 節)，則在規定間隔內，每條與 OY 平行之 xP 直線上只能有一個 P 點。由是求得之各 P 點所密佈之曲線即爲表 y 爲 x 之函數之圖線。微積分學中所討論之函數除爲無限大(1.11節)，或有間斷(1.12節)者外，其圖線多可以一連續曲線表之，如圖(1.1)。茲舉兩例如次：

例一　試畫出曲線之圖：

$$y=x^2+2x-1。$$

此圖爲一拋物線，頂點位於(−1，−2)，如圖(1.2)所示。

例二　試畫出表示一變數之最大整數之圖。

數函數之形狀有如圖(1.3)所示。在圖(1.3)中，小圈係用以表示不屬於圖線之點，此蓋因在本題中，某整數之最大整數卽為 x 而不等於 $x-1$ 故也。例如 $x=2$ 時，函數之值亦為2，而不等於1，故 ab 線上 b 端之點不屬於本圖線而用小圈以圈去之。

(1.9) 函數之普通記號及其運用　設吾人所討論之函數，其形式不受何種特別拘束，通常多用

$$f(x),\ \phi(x),\ F(x)$$

等等記號表之。此等記號之意義乃以示 x 之各種函數，切不可視為 f 乘 x，或 ϕ 乘 x，或 F 乘 x。在有些問題中，自變數 x 可勿須寫出，而表示其函數時，將之略去不寫亦無不可，例如 f，ϕ，F 等。

設 $f(x)$，$\phi(x)$，$F(x)$……係指某特別形式之函數，吾人常可將之列作方程，例如

$$f(x)=x^2+2x-1,$$

$$F(x)=4x,$$

$$\phi(x)=\log_{10}x,$$

等等。若照此規定，則 $f(3)$，$F(3)$ 及 $\phi(3)$ 之值，係指以3代方程右方 x 後所計得之各值，卽

$$f(3)=3^2+2\times3-1=14;\qquad f(a)=a^2+2a-1;$$

$$F(3)=3\times4=12;\qquad F(a+b)=4(a+b);$$

$$\phi(3)=\log_{10}3=0.477;\qquad \phi(ab)=\log_{10}(ab);$$

又　$$F[f(x)]=4[f(x)]=4x^2+8x-4,$$

而　$$F[f(3)]=F(3^2+2\times3-1)=F(14)=4\times14=56.$$

(1.10) 函數之極限 設當 x 可由任何情形趨於 c 時（但其所取之值均不等於 c），其函數 $F(x)$ 亦趨於一極限 A，則此極限常以

$$\lim_{x\to c}F(x)=A$$

表之。例如 $F(x)=x+1$，則 $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=2$。有時 x 僅可由較大於 c 或較小於 c 之數趨近 c，則其記號常分別寫為

$$\lim_{x\to c+}F(x)=A \text{ 及 } \lim_{x\to c-}F(x)=A。$$

例如 $F(x)=\sqrt{1-x}$，則 $\lim\limits_{x\to 1-}F(x)=0$，

但 $F(x)=\sqrt{x-1}$，則 $\lim\limits_{x\to 1+}F(x)=0$。

若 $f(x)$ 為 x 之有理函數（rational function），即

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n},$$

且當 $x\to c$ 時，分母之極限不等於 0，則按 (1.5) 各定理即知

$$\lim_{x\to c}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to c}(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m)}{\lim\limits_{x\to c}(b_0x^n+b_1x^{n-1}\cdots\cdots+b_n)}$$

$$=\frac{a_0\lim\limits_{x\to c}(x^m)+a_1\lim\limits_{x\to c}(x^{m-1})+\cdots\cdots+a_m}{b_0\lim\limits_{x\to c}(x^n)+b_1\lim\limits_{x\to c}(x^{n-1})+\cdots\cdots+b_n}$$

$$=\frac{a_0c^m+a_1c^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0c^n+b_1c^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}=f(c)。$$

是以若 $f(x)$ 為有理函數，而以 c 代 $f(x)$ 中之 x 時未曾遇及以 0 為分母之演算，則 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$。

設當演算 $f(c)$ 時，其中會有分母爲0之項，則 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 之值爲何，須另行考究。此等問題頗似算術中之 $\frac{a}{0}$ 或 $\frac{0}{0}$ 各數，實則並非相同。蓋吾人對於分母爲0之數，根本即認爲無意義而不加以討論。惟若分母之極限爲0，其意義與分母爲0之意義又不盡相同矣。玆特申論之。

設 $F(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$。當 $x=1$ 時，$F(x)$ 之形式變爲 $\frac{0}{0}$，照理應無意義。但若吾人所討論者非 $x=1$ 時 $F(x)$ 之值，乃 $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$，則因 $x\to 1$ 而非等於1，故可自分子及分母消去 $x-1$ 一因數，而寫

$$F(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,$$

如是 $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$。換言之，在此題中 $F(1)$ 係無意義，但 $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=2$ 則有意義！由此觀之，若分子與分母均含 $(x-c)$ 因數，則將此因數消去後，再令 $x\to c$ 即可求得 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 之值。

此外，有時須先將分母及分子乘以適當之因數，然後方能消去其中之共同因數 $(x-c)$，例如

$$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{c^2+x-3}-\sqrt{x^2-1}},$$

當 $x=2$ 時，分子及分母均爲0。玆將二者各乘以 $\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1}$ 則有

$$f(x)=\frac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x^2+x-3-x^2+1}$$

$$=\frac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x-2}$$