大學叢書

偏微分方程式理論

上冊

魏嗣鑾著

商務印書館發行

大學叢書

偏微分方程式理論

上　冊

中華民國二十五年十二月初版
(52282·3A精)
大學叢書(教本)偏微分方程式理論
上冊實價國幣壹元陸角
外埠酌加運費匯費
著作者 魏嗣鑾
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠
版權所有 翻印必究
(本書校對者王煊蕃)
周

大學叢書委員會

委　員

丁燮林君	王世杰君	王雲五君
任鴻雋君	朱經農君	朱家驊君
李四光君	李建勛君	李書華君
李書田君	李聖五君	李權時君
余青松君	何炳松君	辛樹幟君
吳澤霖君	吳經熊君	周　仁君
周昌壽君	秉　志君	竺可楨君
胡　適君	胡庶華君	姜立夫君
翁之龍君	翁文灝君	馬君武君
馬寅初君	孫貴定君	徐誦明君
唐　鉞君	郭任遠君	陶孟和君
陳裕光君	曹惠羣君	張伯苓君
梅貽琦君	程天放君	程演生君
馮友蘭君	傅斯年君	傅運森君
鄒　魯君	鄭貞文君	鄭振鐸君
劉秉麟君	劉湛恩君	黎照寰君
蔡元培君	蔣夢麟君	歐元懷君
顏任光君	顏福慶君	羅家倫君
	顧頡剛君	

自　序

爲數學作教科書,非易事也.欲論斷謹嚴,則學者或苦其瑣細而難讀,欲徒言算法,又恐其造詣不深而淺率無謂.詞不條暢,則旨意難明,而解釋過繁,又或歧義叢生.將欲求其中道,而裁剪之間,亦無極則.故爲數學作教本,不獨在我國難,在歐美亦難,惟在我國,術語之應用,尙未統一,數理之浸灌,尤不深厚,較之歐美,爲尤難耳.本書言偏微分方程式,共分兩部,其第一部專論一次偏微分方程式,第二部則專論二次偏微分方程式,此兩部所取之材,皆作者歷年在國立四川大學之講稿也.其間之論斷,旣不如德人(1) E. Kamke之義析豪芒,亦不如英人(2) H. T. H. Piaggio 之侈陳算法,獨於古今名家之理想,則力求能提綱挈領,使學者讀後,恍然知其大義之所在而不爲瑣屑之計算所蔽.德國大學教授中,求臻斯境者,以G. Scheffers (3) 及 R. Courant (4) 二氏爲最,故本書之材料,取之於此二氏者亦爲多.以作者之譾陋,誠未能追蹤二氏,而用力措意之際,企慕二氏,識者固能決也.

本書習題,計約數十,亦作者在四川大學講演後給予學生作爲課本練習者也.凡此習題,雖甚淺顯,而以爲課外練

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

習，固亦足以增進學力．大學助教徐榮中先生，既已代爲搜集，復爲之作一詳表，使各題答案，可以立得．此不獨作者感其用力之勤，讀者亦將得其助益不少也

魏嗣鑾民國廿五年三月廿日．

(1) **E. Kamke**: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig, 1930

(2) **H. T. H. Piaggio**: *Differential Equations and their Applications*, 1930.

(3) **Serret-Scheffers**: *Lehrbuch der Differential und Integralrechnung*, III. Berlin, 1914.

(4) **R. Courant**: *Vorlesungen über partille Differentialgleichungen.*

大學叢書

偏微分方程式理論

上　册

魏嗣鑾著

商務印書館發行

目　次

上　冊

偏微分方程式理論

上　册

一次偏微分方程式

§1. 舉例

凡一方程式,苟其中除獨立變數及所求之函數外,尚含有所求函數之偏微分商者,皆曰偏微分方程式.至其次數,則以其中偏微分商之最高次數定之.本著中所討論之偏微分方程式,其獨立變數之數,將常爲二,如 x 與 y 是也.其應求得之函數,將常爲一,如 $z(x, y)$ 或 $u(x, y)$ 是也.爲明瞭計,可於未言理論之前,且先舉數例,以明偏微分方程式之形式爲何如,其答案之繁複又奚似;自此而後,乃始逐漸研究其理論.

(1)　設偏微分方程式,爲

$$z_y = 0 \tag{1}$$

其答案若何?

由 (1) 知: z 不爲 y 之函數,故其答案可爲:

$$z = w(x), \tag{2}$$

$w(x)$ 者,一對於 x 之任意函數也.

(2)　設偏微分方程式爲:

$$z_{xy}=0, \tag{3}$$

其答案如何?

將(3)在 y 積分之,則得:

$$z_x=w'(x), \tag{4}$$

再將(4)在 x 上積分之,又得:

$$z=\int_a^x w'(x)dx+v(y)$$

$$=w(x)+v(y), \tag{5}$$

$w(x)$ 者,一對於 x 之任意函數,$v(y)$ 者,一對於 y 之任意函數也.

(3)　設偏微分方程式,爲:

$$z_{xy}=f(x,y), \tag{6}$$

$f(x,y)$ 者,一對於 x, y 之繼續函數也,問其答案如何?

將(6)在 y 上積分之,初得:

$$z_x=\int_b^y f(x,y)dy+w'(x), \tag{7}$$

再將(7)在 x 上積分之,復得:

$$z=\int_a^x\int_b^y f(x,y)dx\,dy+\int_a^x w'(x)dx+v(y),$$

或

$$z=\int_a^x\int_b^y f(x,y)dx\,dy+w(x)+v(y), \tag{8}$$

$w(x)$, $v(y)$ 者,一對於 x, 爲一任意之函數,一對於 y, 爲一任意之函數者也.

由上所言,已知(6)之答案,可以用(8)之形式表示矣,抑不

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

知凡為 (6) 之答案者，其形式舉必如 (8) 之範型耶，儻亦有他式非 (8) 所能涵容者耶．

今設 u 為 (6) 之另一答案，則由 (6) 可得：

$$\Omega_{xy}=z_{xy}-u_{xy}=f(x,y)-f(x,y)=0, \tag{9}$$

$\Omega_{xy}=0$ 者，亦一偏微分方程式，其形式適與 (3) 相同者也．據前此之理，其答案，當為：

$$\Omega=W(x)+V(y), \tag{10}$$

而
$$u=z-\Omega, \tag{11}$$

故
$$u=\int_a^x\int_b^y f(x,y)dx\,dy+w(x)+v(y)-W(x)-V(y), \tag{12}$$

或
$$u=\int_a\int_b^y f(x,y)dx\,dy+\varphi(x)+\psi(y), \tag{13}$$

由是可見：凡函數之能為 (6) 之答案者，其形式皆必如 (8) 之所陳者焉．

(4) 設偏微分方程式為：

$$z_x-z_y=0, \tag{14}$$

其答案如何？

今設以

$$\xi=x-y, \tag{15a}$$

$$\eta=x+y; \tag{15b}$$

則
$$z_x=z_\xi\xi_x+z_\eta\eta_x=z_\xi+z_\eta, \tag{16a}$$

$$z_y=z_\xi\xi_y+z_\eta\eta_y=-z_\xi+z_\eta, \tag{16b}$$

若以此二式，代入 (14)，則得：

$$z_\xi = 0; \tag{17}$$

此式之形式非他即(1)中之所陳者也.由是,即得:

$$z = w(\eta),$$

或

$$z = w(x+y). \tag{18}$$

(5)

$$z_x + z_y = 0, \tag{19}$$

求其答案!

今設於此,亦用(15)之轉換,則得:

$$z = w(x-y). \tag{20}$$

(6)

$$z_{xx} - z_{yy} = 0, \tag{21}$$

求其答案!

今設於此,亦用(15)之轉換,則初得:

$$z_{xx} = z_{\xi\xi} + z_{\xi\eta} + z_{\eta\xi} + z_{\eta\eta}, \tag{22a}$$

$$z_{yy} = z_{\xi\xi} - z_{\xi\eta} - z_{\eta\xi} - z_{\eta\eta}; \tag{22b}$$

由是,即得:

$$z_{\xi\eta} = 0, \tag{22c}$$

故

$$z = w(\xi) + v(\eta),$$

或

$$z = w(x-y) + v(x+y). \tag{23}$$

(7)

$$z_{xx} - \frac{1}{t^2} z_{yy} = 0, \tag{24}$$

式中 t 為常數,求其答案!

今設以

$$\xi = x, \tag{25a}$$

$$\eta = ty, \tag{25b}$$

則
$$z_{xx} = z_{\xi\xi}, \tag{26a}$$

$$z_{yy} = t^2 z_{\eta\eta}; \tag{26b}$$

由是,(24)可爲:

$$z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta} = 0, \tag{27}$$

其答案,爲:

$$z = w(\xi - \eta) + v(\xi + \eta),$$

或
$$z = w(x - ty) + v(x + ty). \tag{28}$$

(8) 今若以

$$t = i = \sqrt{-1},$$

則(24),遂爲:

$$z_{xx} + z_{yy} = 0; \tag{29}$$

此式非他,卽數學中通稱之 Potential equation 也.據頃所論,知函數之獨立變數,爲一複數者,其虛數項與實數項,皆能滿足(29),蓋自(28),知

$$f = v(x + ty) = v(x + iy),$$

可以滿足(29),而

$$v(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{30}$$

及
$$v_{xx} = \varphi_{xx} + i\psi_{xx}, \tag{31a}$$

$$v_{yy} = \varphi_{yy} + i\psi_{yy}, \tag{31b}$$

$$v_{xx} + v_{yy} = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + i(\psi_{xx} + \psi_{yy}), \tag{31c}$$

故,若
$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \tag{32}$$

則,亦必

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0, \tag{33a}$$

$$\psi_{xx}+\psi_{yy}=0. \tag{33b}$$

也.

據以上各例觀之,卽可以見一公例:凡偏微分方程式之普通答案,其間皆含有任意之函數.如偏微分方程式爲一次者,則其任意之函數爲一;如偏微分方程式爲二次者,則其任意之函數往往爲二.此中情形,於各例皆可以見,而尤以(8)例爲著.今若欲從此無窮答案之中,而取其一,則必於偏微分方程式之外,另付條件.條件之能規定惟一之答案者,其性質不一;例如$z(x, y)$所代表者,爲一曲面,則有所謂初值條件(Anfangsbedingungen; Initial conditions)者,卽要求曲面須經過某線,而此線之座標,或其他數值,咸爲已予者也.又有所謂邊值條件(Randbedingungen; Boundary condition)者,卽要求曲面須經過一緊閉之線,而此線適爲某曲面之限際,且其上之座標,或其他數值,皆爲已予者也.此二種條件之在偏微分方程式,所關甚大,後此將繼續言之.今茲姑一論例(8),以見其端.

今設所求之函數,不獨能滿足

$$\Delta z=z_{xx}+z_{yy}=0 \tag{34}$$

且其函數值,在一單位圓周上者,皆須適合於一已予之函數$\delta(\vartheta)$,此卽所謂邊值條件也.吾輩若欲求此函數,可用下法得之.

據頃所論,知

$$(x+iy)^n=r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)$$

之實數項與虛數項,皆能滿足(34);若 a_n, b_n 之值,能滿足一定之條件,則下列級數:

$$z(x,y)=\sum_0^\infty r^n(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta), \tag{35}$$

亦必能滿足(34).

今設 $\delta(\vartheta)$, 能展開爲一級數:

$$\delta(\vartheta)=\sum_0^\infty(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta). \tag{36}$$

則

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\vartheta)d\vartheta \tag{37a}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\vartheta)\cos n\vartheta d\vartheta \tag{37b}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta \tag{37c}$$

若復以此等數值,代入(35),則(35)之級數,不獨能滿足偏微分方程式,且能適合邊值條件,據級數之理論,且知如此函數,其數但能爲一,於是(8)例中所謂邊值問題者,其存在與惟一,雖未得嚴格之證明,其大略,已可見矣.

適間所論,偏微分方程式與任意函數及附帶條件之關係,若甚足異者.然以之與普通微分方程式比擬,則固不足怪也.今設有一二次之普通微分方程式於此:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{38}$$

則其普通答案：

$$y=\varphi(x;\ \alpha, \beta),$$

常涵有二常數：α與β，此乃二度無窮之曲線也．今若於此二度無窮之中，而提絜其一，則可能之道有二：其一，則給予一線質 (Linienelement)（一點之座標及通過此點之方向），而謂所求之曲線，當通過此點，其切線則復應與此點所有之方向相合，此即所謂初值條件也．其二，則給予兩點，而謂所求之曲線，須通過此兩點，此則所謂邊值條件也．故以偏微分方程式，與普通微分方程式比擬，則見下列數事，適相呼應：

普通微分方程式		偏微分方程式
普通答案	⟷	普通答案
積分常數	⟷	任意函數
初值條件	⟷	初值條件
邊值條件	⟷	邊值條件

其情形微有不同者，當普通微分方程式，爲積分常數時，在偏微分方程式，則爲任意函數耳．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com