

# 常微分方程論讲义

И. Г. 彼得罗夫斯基著

黃 克 欧 譯

胡 祖 熾 校 訂



人 民 教 育 出 版 社

# 常微分方程論讲义

И. Г. 彼得罗夫斯基著

黃克歐譯

胡祖熾校訂

(修訂本)

榆林高专图书馆



0044154

人民教育出版社

本书原系根据苏联国立技术理論书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的彼得罗夫斯基 (И. Г. Петровский) 著“常微分方程論讲义” (Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений) 1949 年第三版譯出。在本版 (新一版) 出版时, 譯者又根据 1952 年出版的原书增訂版 (第四版) 重新校訂了一遍, 补譯了新版中增加的部分。

原书曾荣获 1951 年度斯大林二等奖, 并經苏联高等教育部审定为綜合大学数理系教科书。

## 常微分方程論讲义

И. Г. 彼得罗夫斯基著

黄克欧譯

北京市书刊出版业营业许可证出字第 2 号

人民教育出版社出版 (北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

统一书号 K13010·257 开本 850×1168  $\frac{1}{32}$  印张 6 $\frac{14}{16}$

字数 163,000 印数 32,001—33,500 定价 (6) ¥0.70

1953 年 10 月商务初版 (共印 8,500)

1957 年 1 月新 1 版

1959 年 5 月第 2 版 (修订本) 1964 年 4 月北京第 10 次印刷

# 序 言

为中譯本而作

1936—40 年間我在沙拉托夫大学与莫斯科大学教过这份讲义，此后为了几次出版曾修訂多次（第一版是 1939 年出版）。在这些修訂工作中，A. M. 巴拉班諾夫(Барабанов)、A. Д. 米希奇斯(Мышкис)及 O. A. 阿列依尼克(Олейник)給了我很大的帮助。

在这讲义及在以后为了出版的修訂工作中，我力求选择常微分方程論中的最主要的与最基本的部分。

O. A. 阿列依尼克及 A. Д. 米希奇斯編輯了習題安排在本書之中。这往往是一些比較难解的習題，因此讀者如果不能很容易地解决这类習題，也无須乎惶惑不安。这类習題大大地扩大了本書的基本內容。

我極重視，我的書被譯成偉大的中国人民的語言，如果这書对于优秀的中国青年起作用的話，我是很高兴的。

И. 彼得罗夫斯基

1953 年 4 月 2 日于莫斯科

## 第一版序言

这个讲义我曾在 1936—1937 学年度在沙拉托夫国立大学和莫斯科大学講授过（在莫斯科大学講授时会稍加修改）。我不想叙述尽可能多的能用于各种特殊类型微分方程的积分方法；用俄文写的教程中已經有了充分完备地叙述了这些方法

的教程。我也不打算叙述常微分方程理論的各部分。在整个理論中我只選擇了几个題目，而力求把它們叙述得尽可能地完全而且严格，如同現在大多数数学学科中所叙述的一样。我没有假定我的学生知道分析函数的理論，所以对于学习本書所必須有的关于这个理論的知識，我或者是加以解釋，或者是确切地指出在那里可以找到它們。

我應該感謝巴拉班諾夫(А. И. Барабанов)，因为他的筆記是叙述前 21 节的基础。并应感謝斯捷帕諾夫(В. В. Степанов)、加里別尔(С. А. Гальперн)及米希奇斯(А. Д. Мышкис)，因为他們审查了我的全部稿子，并作了一系列寶貴的指示。

И. 彼得罗夫斯基

一九三九年

## 第四版序言

当准备这版本时，阿列依尼克与米希奇斯給我很大的帮助。特别是米希奇斯在这版本中添写了有关却潑雷金定理的一节。阿列依尼克与米希奇斯增添了一些新習題。同以前一样，这些習題大多数都不是簡單的練習。这些習題的大部分扩充了本書的基本內容，可用于課程作业。

И. 彼得罗夫斯基

# 目 录

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 序言 .....                                                              | 3  |
| 第一版序言 .....                                                           | 3  |
| 第四版序言 .....                                                           | 4  |
| <b>第一部分 含一个未知函数的一阶微分方程式</b>                                           |    |
| 第一章 一般概念 .....                                                        | 1  |
| § 1. 定义 例题 .....                                                      | 1  |
| § 2. 几何解释 问题的推广 .....                                                 | 2  |
| 第二章 最简单的微分方程式 .....                                                   | 8  |
| § 3. 形状如 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 的方程式 .....                            | 8  |
| § 4. 形状如 $\frac{dy}{dx} = f(y)$ 的方程式 .....                            | 11 |
| § 5. 可分离变数的微分方程 .....                                                 | 13 |
| § 6. 齐次微分方程 .....                                                     | 16 |
| § 7. 线性微分方程 .....                                                     | 18 |
| § 8. 全微分方程 .....                                                      | 20 |
| § 9. 积分因式 .....                                                       | 23 |
| 第三章 通論 .....                                                          | 28 |
| § 10. 欧拉(Euler)折綫 .....                                               | 28 |
| § 11. 阿尔最拉(Arzela)定理 .....                                            | 30 |
| § 12. 用裴雅乐(Peano)法证明微分方程 $y' = f(x, y)$ 的解存在 .....                    | 33 |
| § 13. 阿斯古德(Osgood)关于解的唯一性的定理 .....                                    | 39 |
| § 14. 关于欧拉折綫的补充說明 .....                                               | 43 |
| § 15. 逐次逼近法 .....                                                     | 44 |
| § 16. 压缩映象原理 .....                                                    | 50 |
| § 17. 压缩映象原理的几何解釋 .....                                               | 55 |
| § 18. 关于具有正则右端的微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 的<br>豪西(Cauchy)定理 ..... | 58 |
| § 19. 微分方程解的可微分次数 .....                                               | 63 |
| § 20. 解对于开始值的和对于方程右端的依賴性 .....                                        | 63 |
| § 21. 阿达馬(Hadamard)引理 .....                                           | 68 |
| § 22. 关于解对參变数的依賴性的定理 .....                                            | 70 |
| § 23. 奇点 .....                                                        | 75 |
| § 24. 奇曲綫 .....                                                       | 80 |
| § 25. 积分曲綫族的全局性态 .....                                                | 82 |
| § 26. 导数未解出的微分方程 .....                                                | 86 |

|           |    |
|-----------|----|
| § 27. 包絡綫 | 96 |
|-----------|----|

## 第二部分 常微分方程組

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| 第四章 通論                                                   | 100 |
| § 28. 化任意方程組为一阶方程組                                       | 100 |
| § 29. 几何意义·定义                                            | 101 |
| § 30. 基本定理的叙述                                            | 104 |
| § 31. 运算方程組的压缩映象原理                                       | 111 |
| § 32. 压缩映象原理对于微分方程組的应用                                   | 115 |
| 第五章 綫性微分方程組通論                                            | 118 |
| § 33. 定义·自微分方程組的一般理論导出的推論                                | 118 |
| § 34. 一阶齐次組的基本定理                                         | 121 |
| § 35. 隆斯基行列式的表达式                                         | 126 |
| § 36. 据已給的基本解組造出齐次綫性微分方程組                                | 128 |
| § 37. 对于 $n$ 阶微分方程式之推論                                   | 129 |
| § 38. 綫性齐次微分方程式的降阶                                       | 132 |
| § 39. 二阶齐次綫性方程式的解的零点                                     | 134 |
| § 40. 一阶非齐次綫性方程組                                         | 137 |
| § 41. 对于 $n$ 阶非齐次綫性方程式的推論                                | 139 |
| § 42. 却發雷金关于微分不等式的定理                                     | 141 |
| 第六章 常系数綫性微分方程組                                           | 146 |
| § 43. 預先应注意的事项                                           | 146 |
| § 44. 关于化为典則形式的定理                                        | 148 |
| § 45. 綫性变换的不变式                                           | 154 |
| § 46. 初等因子                                               | 157 |
| § 47. 齐次方程組的基本解組的求法                                      | 160 |
| § 48. 对于 $n$ 阶齐次方程式的应用                                   | 165 |
| § 49. 非齐次方程組的特解求法                                        | 167 |
| § 50. 化微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}$ 为典則形式 | 170 |
| § 51. 解的李浦諾夫(Ляпунов)稳定性                                 | 172 |
| § 52. 一个物理学的例题                                           | 179 |
| 附录 含一未知函数的一阶偏微分方程式                                       | 184 |
| § 53. 殆綫性偏微分方程式                                          | 184 |
| § 54. 常微分方程組的第一积分                                        | 192 |
| § 55. 拟綫性偏微分方程式                                          | 195 |
| § 56. 非綫性偏微分方程式                                          | 198 |
| § 57. 法甫(Pfaff)微分方程式                                     | 208 |
| 俄中名辞对照表                                                  | 213 |

# 第一部分 含一个未知函数的一阶微分方程式

## 第一章 一般概念

### § 1. 定义 例题

一自变数  $x$ ，和它的函数  $y$  以及这个函数的导函数  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  间的形状如下的关系式：

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{几阶常微分方程}$$

叫做  $n$  阶常微分方程式。 設用一个  $x$  的函数  $\varphi(x)$  代替上式中的  $y$ ，用  $\varphi'(x)$  代  $y'$ ， $\dots$ ，用  $\varphi^{(n)}(x)$  代  $y^{(n)}$ ，若上式变成一个恒等式，則函数  $y = \varphi(x)$  叫做这微分方程式的解。如不特別声明，本書中所考虑的数量仅取实数(有限)值，而所考虑的函数都是單值的。

可見在常微分方程式中，未知函数仅是一个自变数的函数。与这相反，在偏微分方程式中的未知函数，則是几个自变数的函数。以后凡說到微分方程式，如非特別申明，都指常微分方程式而言。

微分方程的解是一个函数关系。

許多自然科学問題都可引到常微分方程式。現在用下面两个例题來說明这一事实。

例 1. 設一点沿  $Ox$  軸运动，其速度  $f(t)$  为已知。設  $f(t)$  是連續的有界函数，此外并假定当  $t = t_0$  时，这点之横坐标为  $x_0$ 。試求該点运动的規律，这就是說，求該点之横坐标与時間的函数关系。

这一問題能化到求微分方程式

常微分方程的解

常微分方程是一个数量关系  
偏微分方程是几个变量的关系

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

中当  $t=t_0$  时的值变为  $x_0$  的那个解。由积分学就知道这解可用公式

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

得出。

**例 2.** 已知镭的分解的速率与剩余的镭的质量成正比例。设已知剩余的镭在  $t_0$  时为  $R_0$  克, 试求在任何时间  $t$  镭的质量。

用  $c(c>0)$  表比例常数, 则上述问题可变成求微分方程式

$$\frac{dR}{dt} = -cR$$

的一个解, 这解当  $t=t_0$  时的值等于  $R_0$ 。这样的解就是函数

$$R = R_0 e^{-c(t-t_0)}.$$

由上面两个例题知道, 许多个函数能同时满足同一个微分方程式。所以要确定这未知函数, 不但要先知道它所满足的微分方程式, 还应该预先指定当自变数取一个定值时, 未知函数所取之值 (开始值)。以上两个例题中, 开始值都唯一地决定了微分方程式的解。

微分方程式理论的基本问题是: 求已给微分方程式的所有解, 并且研究这些解的性质。求一个微分方程式的解, 叫做积分这个微分方程式。

## § 2. 几何解释 问题的推广

我们现在来研究下列形状的微分方程式:

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

这里  $f(x, y)$  是确定于  $(x, y)$  平面某一个区域  $G$  ① 上的函数。对这区域上任一点, 方程式(1)规定其解的圖綫在这点的切綫斜率。設在  $G$  的每一点  $(x, y)$  用一綫段表示由  $f(x, y)$  的值所定出的切綫方向②, 則得一方向場; 而前述求微分方程式的解的問題, 即可叙述为: 求一曲綫  $y = \varphi(x)$ , 使这曲綫在每一点都有由方程(1)规定的切綫[我們也时常这样說: 这曲綫的方向由方程(1)規定]。

从几何观点来看, 問題这样提法, 有下列几个不够自然的情况:

1) 要求曲綫在区域  $G$  的任一点  $(x, y)$  之斜率等于  $f(x, y)$ , 因而我們須将平行于  $Oy$  軸的方向除外。

2) 我們只考虑  $x$  的單值函数的圖綫。因此我們不考虑与一垂直于  $x$  軸的直綫有两个或两个以上的交点的曲綫。

所以我們將稍为推广上述問題的提法, 就是: 我們准許这方向場中在某些点的方向可以平行于  $Oy$  軸。在这些点上, 以  $Ox$  軸为标准的斜率虽无意义, 但可采用以  $Oy$  軸为标准的斜率。因此, 除微分方程式(1)外, 我們同时还考虑方程式

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x, y), \quad (1')$$

当  $f(x, y) \neq 0$  时, 这里的  $f_1(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$ ; 若第一方程式无意义, 而第二个方程式有意义, 我們就用第二个方程式。在这里我們將假定: 在  $G$  的每一点上这两个函数  $f$  与  $f_1$  中至少有一个是有

① 区域  $G$  是指具有下列两个性質的非空点集: (1)  $G$  之任一点都是  $G$  的內点, 即此点有一邻域完全属于  $G$ ; (2) 点集  $G$  是連通的, 即  $G$  之任意两点都可用有限条完全属于  $G$  的直綫段所組成的折綫連接起来。

所謂一区域的界点, 就是这区域中的点的不属于这区域的極限点。所有的界点全部叫这区域的边界。

一区域  $G$  连同它的边界叫做閉区域  $G$  (又名閉包)。

② 我們不区别一綫段的两个方向。

意义的；在而且仅在  $f$  无意义的点上，方有  $f_1 = 0$ ，在而且仅在  $f_1$  无意义的点上，方有  $f = 0$ 。于是我們可将积分微分方程式 (1) 及 (1') 的問題改述如下：在区域  $G$  內求所有的曲綫<sup>①</sup>，使曲綫上任何一点的方向，都由方程式 (1) 或 (1')<sup>②</sup> 所規定。这些曲綫叫做方程式 (1) 与 (1') 的积分曲綫，也就是由 (1) 及 (1') 規定的方向場的积分曲綫。显然方程 (1) 的解的圖綫都是方程式 (1) 及 (1') 的积分曲綫，但并非方程 (1)、(1') 所有的积分曲綫，都是方程 (1) 的解的圖綫。以后如已明白指出：

$$f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

則与方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (2)$$

在一起的方程式

$$\frac{dx}{dy} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)} = f_1(x, y) \quad (2')$$

将不再写出。

有时我們把这样的方程写为关于  $x$  与  $y$  比較对称的形状如下：

$$Mdx - Ndy = 0. \quad (3)$$

在两个函数  $M(x, y)$  与  $N(x, y)$  都有意义而且两个函数中至

① 当  $t$  在某一区間  $(a, b)$  內取各值时，由方程  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  所定出的点  $(x, y)$  的集合叫做曲綫；这里的  $a$  可为  $-\infty$ ,  $b$  也可为  $+\infty$ 。我們更假定  $\varphi(t)$  与  $\psi(t)$  都有連續导函数，且恒有  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ 。如此，則此曲綫上一点  $x_0 = \varphi(t_0)$ ,  $y_0 = \psi(t_0)$  附近的一段若不能看作以  $x$  为自变数的連續可微的函数  $y = y(x)$  的圖綫，就可看作以  $y$  为自变数的連續可微的函数  $x = x(y)$  的圖綫。因为假定  $\psi'(t_0)$  与  $\varphi'(t_0)$  不会都等于 0，倘使  $\varphi'(t_0) \neq 0$ ，于是由于  $\varphi'(t)$  的連續性， $\varphi'(t)$  在某一区間  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  內必保持一定的符号。所以对  $t$  的这些值必可自  $x = \varphi(t)$  單值的解出  $t$ ，設由此得  $t = \lambda(x)$ ，把它代  $y = \psi(t)$ ，即得  $y = \psi[\lambda(x)]$ ，这就是說  $y$  是  $x$  的函数。

在这曲綫概念的定義中，我們不但預先假定了方程的解的可微性，而且假定了它的連續可微性。在本書中只考虑这样的解。

② 有时方向場內不仅只在  $G$  的內部給定，也在其边界的某一部分或全部边界上給定，此时积分曲綫則不仅经过  $G$  的內部，也经过它的边界的某些部分了。

少有一个不等于零的区域上, 方程(3)的方向場是确定的。

例 1. 方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (4)$$

除原点以外, 处处规定了方向場。这方向場如图 1 所示。任一如此定出的方向都经过坐标原点。显然, 对任何一数  $k$ , 函数

$$y = kx \quad (5)$$

都是方程式(4)的解。这方程式所有的积分曲线都可用关系式

$$ax + by = 0 \quad (6)$$

表出, 此处  $a, b$  是两个不同时为 0 的任意常数。Oy 轴是其积分曲线, 但不是解的曲线。

因方程式(4)在坐标原点不能规定方向場, 所以直线(5)与(6)上应当将原点去掉才是积分曲线。所以更正确的说, 方程(4)的积分曲线不是那些经过原点的整条直线, 而是那些从原点出发的“半直线”(原点不计算在半直线之内)。

例 2. 方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (7)$$

除原点外, 处处规定了方向場, 如图 2 所示。方程式(4)及(7)在同一点  $(x, y)$  上所规定的两方向互相垂直。显然, 一切以坐标原点为圆心的圆都是方程(7)的积分曲线。而函数

$$\begin{cases} y = +\sqrt{R^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} \end{cases} \quad (-R < x < +R)$$

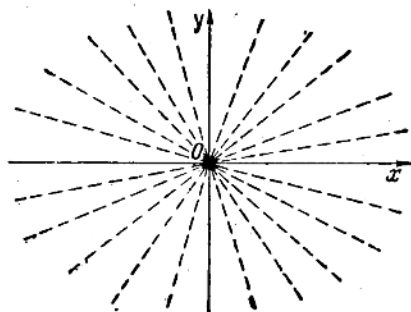


图 1

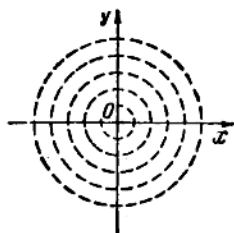


图 2

都是方程(7)的解。

現在規定下列几个名詞的定义:

1. 为簡便計,有时用“经过点 $(x_0, y_0)$ 的解”这一句話来代替“经过点 $(x_0, y_0)$ 的解的圖綫”。

2. 若适当地选择一個函数  $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  中的常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , 能使它变成已給微分方程式的圖綫在区域  $G$  內的任一个解, 則这函数叫做这微分方程式在区域  $G$  的通解。

3. 方程  $\Phi(x, y)=0$  的圖綫若是微分方程式(1)、(1')的积分曲綫, 則  $\Phi(x, y)=0$  叫做微分方程(1)、(1')的一个积分。

4. 若适当地选择常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  之值代入方程

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)=0$$

后, 能自这方程  $\Phi=0$  得到已給的微分方程的在区域  $G$  內任一积分曲綫, 則  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)=0$  叫做这微分方程在区域  $G$  內的通积分①。

例如, 在例題 1 中, (5)式是方程式(4)在除去  $Oy$  軸的整个  $(x, y)$  平面上的通解, 而(6)式是这方程式在除去坐标原点的整个  $(x, y)$  平面上的通积分。同样在例題 2 中, 函数

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2}$$

是在整个的半平面  $y>0$  內的通解; 而

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (8)$$

是这微分方程式把坐标原点除外的整个  $(x, y)$  平面內的通积分。方程式(4)除了积分曲綫(6)以外, 沒有其他积分曲綫, 而方程(7)除了积分曲綫(8)外, 亦沒有其他积分曲綫。这一事实将于 § 5 中証明之。

① 在数学文献中还有关于通解和通积分概念的别的定义。

## 習 題

1. 平面上何種區域沒有邊界？
2. 繪出下列方程式的積分曲線：

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{|xy|}, \quad b) \frac{dy}{dx} = \frac{|x+y|}{x+y}, \quad B) \frac{dy}{dx} = -\frac{x+|x|}{y+|y|},$$

$$r) \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{當 } y \neq x \text{ 時,} \\ 1 & \text{當 } y = x \text{ 時,} \end{cases} \quad \text{Д) } \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{當 } y \neq x \text{ 時,} \\ 0 & \text{當 } y = x \text{ 時.} \end{cases}$$

並指出這些方程在什麼區域上能定出方向場。

3. 設給有曲線  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $a < t < b$ , 而  $\varphi(t)$  及  $\psi(t)$  滿足第 4 頁脚注 1 中的條件。設  $a < a' < b' < b$ , 求證：

a) 可以把閉區間  $a' \leq t \leq b'$  分成有限個互相連接的區間, 使這曲線對應於每一個這樣的區間內的一段是一個有連續導數的單值函數  $y = y(x)$  的圖線, 或者是同樣性質的函數  $x = x(y)$  的圖線。

б) 有這樣的常數  $\varepsilon > 0$ , 使對於所有的  $t' (a' \leq t' \leq b')$ , 這曲線對應於  $t' \leq t \leq t' + \varepsilon$  的一段不會自己相交。

в) 曲線上對應於  $t = t_1, t = t_2 (a' \leq t_1 < t_2 \leq b')$  之點為端點的一段弧長與  $t_2 - t_1$  的比值為有界並大於某一定正數。

4. 是否下列兩個要求是互相無關的：

a) 方向場中沒有平行於  $Oy$  軸的方向；

б) 所有的積分曲線是  $x$  的函數的圖線。

5. 試求顯然包含着方程 (1) 的解的所有的極大點與極小點 (也可能包含其他點) 的軌跡方程。

設函數  $f(x, y)$  是可微的, 試求顯然包含着方程式 (1) 的解的拐點的軌跡方程。

6. 若在區域的定義中不用折線段而改用曲線段, 或只用不與自身相交的曲線段, 求證區域這樣的定義同原來的定義是一樣的。

7. 曲綫通常由方程式  $f(x, y)=0$  給定。設函数  $f$  在整个  $(x, y)$  平面上确定而且連續地可微, 又設

$$[f(x, y)]^2 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2 > 0, \quad (*)$$

而点集  $f(x, y)=0$  是非空的。試証: 这点集是有限条或可数条彼此无公共点的曲綫組成的, 而  $(x, y)$  平面的每一有限部分只与这些曲綫中的有限条的曲綫相交。同时, 这些曲綫中的每一条或者是閉的, 或者是自身不相交而两端趋于无穷的曲綫。

倘使条件  $(*)$  不滿足, 則点集  $f(x, y)=0$  是怎样的? 若函数  $f(x, y)$  只在某一区域  $G$  上确定, 則这个命题将有怎样的变化?

## 第二章 最簡單的分微方程式

### § 3. 形狀如 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 的方程式

**第一种情形** 設  $f(x)$  在  $a < x < b$  时連續。我們知道这微分方程式的一个解是函数

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

$[x_0$  及  $x$  都在区間  $(a, b)$  內]; 而其他任意一个解与这解仅相差一个常数。即其一切积分曲綫都可以由一积分曲綫平行于  $Oy$  軸移动而得。其通解是如下的函数:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi + C.$$

在条形区域  $a < x < b$  內給了一点  $(x_0, y_0)$ , 經過这点必有一积分曲綫, 常数  $C$  也可唯一地决定:  $C = y_0$ 。即經過条形区域  $a < x < b$

內任一點 $(x_0, y_0)$ 必有而且僅有一積分曲線，它就是

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

**第二種情形** 設當  $x \rightarrow c$  ( $a < c < b$ ) 時,  $f(x) \rightarrow \infty$ , 但  $f(x)$  在區間  $(a, b)$  內其他各點都連續。  $x=c$  處的方向場由方程  $\frac{dx}{dy} = 0$  規定。

此時, 愈靠近直線  $x=c$  時, 方向場愈來愈陡。不過在開區域  $a < x < c$  及  $c < x < b$  內, 情況和第一種情形一樣。例如, 點  $(x_0, y_0)$  若在条形區域  $a < x < c$  內, 則過這點有一條而且只有一條積分曲線在這長條內, 其方程是

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

若積分  $\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$  當  $x \rightarrow c-0$  時收斂, 則這曲線當  $x \rightarrow c-0$  時必趨於直線  $x=c$  上某一定點(圖 3)。

反之, 若積分  $\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$  發散, 則當  $x \rightarrow c-0$  時曲線  $y=y(x)$  漸近地趨於直線  $x=c$  (圖 4)。

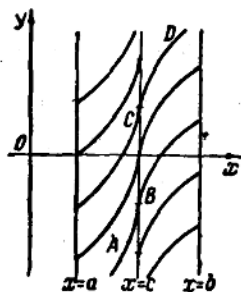


圖 3

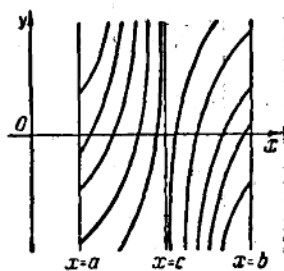


圖 4

在長条  $c < x < b$  內积分曲綫的形状亦可类似地討論。圖 3 及圖 4 繪出了两种可能的情形。但繪出圖 3 时，我們更假定了：当  $x \rightarrow c-0$  时，积分

$$\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \quad a < x_0 < c \quad (9)$$

收斂，且  $x \rightarrow c+0$  时积分

$$\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi, \quad c < x_0 < b \quad (10)$$

也收斂，而且假定当  $x \rightarrow c$  时  $f(x) \rightarrow +\infty$ 。繪出圖 4 时則假定积分 (9)、(10) 当  $x \rightarrow c-0$  及  $x \rightarrow c+0$  时都發散。

直綫  $x=c$  也是积分曲綫。

現在我們来看在条形区域  $a < x < b$  內所有的积分曲綫。若积分 (9)、(10) 当  $x \rightarrow c$  时收斂，則过一定点  $A(x_0, y_0)$ ，必有无穷条积分曲綫。因为，若  $a < x_0 < c$ ，則如圖 3 中所画出的  $ABCD$  的任意一条曲綫都是积分曲綫。

若当  $x \rightarrow c \pm 0$  时，积分 (9)、(10) 收斂，而

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = -\infty,$$

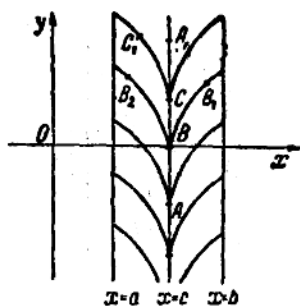


圖 3a

則积分曲綫的形状可用圖 3a 表示。此时过直綫  $x=c$  上每一点  $A$  有无穷条积分曲綫，例如，圖 3a 中的  $AA_1$ ,  $ABE_1$ ,  $ACC_1$ ...等。經過条形区域  $a < x < c$  或  $c < x < b$  的内部任一定点，例如，經過  $B_1$ ，此时則仅有一条积分曲綫  $B_1BA$  經過。象曲綫  $B_1BB_2$  因在  $B$  点有一尖点 (взлом)，