University Physics

大学物理编写组　编著

大学物理

（下册）

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学物理

下册

大学物理编写组　编著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学物理. 下册/《大学物理》编写组编著. 一天津:
天津大学出版社,2010. 2
ISBN 978-7-5618-3408-4

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①大…　Ⅲ. ①物理学—高等学校—
教材　Ⅳ. ①04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 022183 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022－27403647　邮购部:022－27402742
印　　刷	天津泰宇印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	169mm×239mm
印　　张	17.75
字　　数	380 千
版　　次	2010 年 2 月第 1 版
印　　次	2010 年 2 月第 1 次
印　　数	1—4 500
定　　价	28.00 元

前　　言

作为现代科学技术发展源泉的物理学，始终影响着人类的发展和进步。物理学也是学习其他学科知识与技术的基础。“大学物理”是高等院校许多专业学生必修的重要基础课程之一，同时也与其他课程的学习密切相关。除为今后的专业发展打好物理基础外，在培养高素质人才的过程中，它也是不可替代的，尤其在建立唯物主义世界观、培养创新精神与科学思维能力方面，更有其独特的作用。

长期以来，为适应不同时期教学要求，天津大学先后编写出版了四套教材，分别是：杨仲耆等编的《大学物理学》(高等教育出版社，1980，1981，1982)；李金锷主编的《大学物理》(天津大学出版社，1981；科学出版社，2001)；陈宜生、李增智主编的《大学物理》(天津大学出版社，1999)；霍炳海主编的《大学物理》(天津大学出版社，2001)。在当今科学技术迅速发展，交叉学科不断涌现的背景下，物理学思想与方法在各个领域中得到广泛的应用。原有教材的内容与篇幅有必要进行充实与调整。在我校教务处、理学院及物理系领导的关怀与支持下，我们根据非物理类教学指导委员会近期提出的“教学基本要求”，并结合多年的教改成果与教学经验，吸取我校原有教材的精华，编写了这部教材。

编写此套书的指导思想：(1)基本教材内容简练，以基本概念、规律及研究方法为主，力求做到重点突出，教师好用，学生好读；(2)适当调整经典与近代内容的比例，讲解经典内容时注意其在新科技中的应用，赋予时代气息；(3)辅助教材中所选内容与讲授深度适合学生的接受能力，以激发学生继续学习与探索的激情。

在本教材的组织编写过程中，笔者承担了策划、审稿和定稿工作。参加基本教材的编写人员有：力学部分，王莱；分子动理论，王克起；热力学，霍炳海；电磁学，吴亚非；振动与波、光学，李增智；狭义相对论，顾洪恩；量子物理、原子核与基本粒子，周佩瑶。

由于水平有限，衷心希望使用此书的老师和同学对我们提出批评与指正。

林家逖

目 录

第11章 振动

就运动形态而言，物质的运动可以分为机械运动、热运动、电磁运动等；而就运动形式而言，物质的运动又可分为平动、转动和振动。振动是物质的一种基本运动形式。自然界中到处都存在着振动。例如，一切正在发声的物体都在振动，人的心脏有规律的跳动也是振动，机器的运转、海浪的起伏以及地震也都是振动，同样，交流电路中的电流和电压也在振动，即使晶体中的原子也都在不停地振动着。物体在某一位置(通常是平衡位置)附近所作的周期性的往复运动称为**机械振动**。本章主要讨论机械振动的特征和规律。

振动的基本特征之一是其**周期性**。广义地说，任何一个物理量随时间的周期性变化都称为振动。例如，电磁场中的电场强度和磁感应强度都可能随时间作周期性变化，这种振动称为电磁振动或电磁振荡。各种振动形式的机理虽然不尽相同，但都有着类似的规律性，可以用同一类数学方程来描述。因此，研究一种振动形式的规律，有助于理解其他振动形式的规律。

振动有简单和复杂之别。最简单的振动是**简谐振动**。它也是最基本、最重要的振动。任何复杂的振动都可以认为是由许多简谐振动合成的。

11.1 简谐振动

11.1.1 简谐振动方程

简谐振动可以用一个弹簧振子来演示。如图11-1所示，将质量为m的物体(可视为质点)系于一端固定弹簧的自由端，放置于光滑水平面上，当弹簧的质量忽略不计时，该系统就构成一个**弹簧振子**。将物体沿水平方向自平衡位置移开一些距离(以使弹簧产生形变)后释放，物体便在水平面上作往复的自由振动。

为了描述这种自由振动，可以沿水平方向建立一个坐标轴X，用来描述物体所在的位置。将坐标原点O设定在弹簧的松弛位置(即原长位置)，在此位置弹簧没有形变，物体所受的合外力为零。物体所受合外力为零(或合外力矩为零)的位置称为**平衡位置**。当物体离开平衡位置的位移为x亦即物体的位置坐标为x时，物体所受的合外力即为弹簧的弹性力。依据胡克定律，此力可表示为

$$F=-kx$$

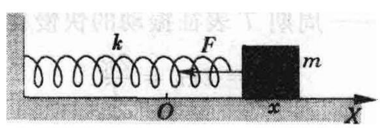

图11-1 弹簧振子的简谐振动

式中k为弹簧的**劲度系数**，简称**劲度**。由上式可知，物体所受的合外力与物体离开平衡位置的位移成正比，方向与位移方向相反，始终指向平衡位置，习惯上称

这种力为**线性恢复力**或**线性弹性力**。线性恢复力是物体作简谐振动的根本原因。

依据牛顿运动定律,物体运动的微分方程为 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$,整理后可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \tag{11.1.1}$$

式中,$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$,$x$ 是物体所在的位置坐标,表示物体离开平衡位置的位移。式(11.1.1)就是描述**简谐振动的微分方程**。若其他物理量(如电流、电压、密度等)满足式(11.1.1),则可断定该物理量也作简谐振动。

微分方程式(11.1.1)的解可写作正弦、余弦、复数等函数形式,本书采用余弦函数形式,其解可以写为

$$x=A\cos(\omega_0t+\phi) \tag{11.1.2}$$

式中,A、ϕ 为积分常数。式(11.1.2)描述了简谐振动的全过程,指明了作简谐振动物体任意时刻 t 所在的位置 x,该式称为**简谐振动的运动方程**。凡物理量与时间的关系可以表示成如式(11.1.2)所示的余弦(或正弦)函数形式的,则该物理量必作简谐振动。

由简谐振动运动方程(11.1.2)可以得到作简谐振动物体的速度 v 和加速度 a 的方程,即

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega_0A\sin(\omega_0t+\phi)=\omega_0A\cos(\omega_0t+\phi+\frac{\pi}{2}) \tag{11.1.3}$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2A\cos(\omega_0t+\phi)=-\omega_0^2x \tag{11.1.4}$$

以上两式表明,作简谐振动物体的速度、加速度也是以余弦函数形式变化的,因而其速度和加速度也在作简谐振动。式(11.1.4)还表明作简谐振动物体的加速度与位移成正比,方向与位移相反,这无疑是弹性(合外力)所导致的必然结果。为了使简谐振动的特征更加清晰,下面进一步讨论式(11.1.2)中各物理量所表示的物理意义。

11.1.2 描述简谐振动的特征物理量

1. 振幅 A

振幅是振动物体离开平衡位置的最大位移,反映振动强弱程度。振幅的单位为米(m)。

2. 角频率 ω

在一般情况下,角频率用 ω 表示。角频率表征振动的快慢程度及周期性。角频率越大,振动越快。也可以用每秒振动的次数 —— 频率 ν 或完成一次全振动所用的时间 —— 周期 T 表征振动的快慢程度及周期性,它们与角频率的关系为

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T} \tag{11.1.5}$$

角频率 ω 的单位为弧度/秒(rad/s),周期 T 的单位为秒(s),频率 ν 的单位为秒$^{-1}$(s^{-1}),称为赫兹(Hz)。

振动系统作自由振动时，都是以振动系统的**固有角频率** ω_0（或**固有频率** ν_0、**固有周期** T_0）振动。任何振动系统都有决定于振动系统本身性质的固有角频率 ω_0，它可以通过对振动系统所建立的形式如式(11.1.1) 的简谐振动动力学方程而得到。例如弹簧振子的固有角频率 ω_0 为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11.1.6}$$

相应的固有频率 ν_0 和固有周期 T_0 分别为

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11.1.7}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{11.1.8}$$

3. 相位($\omega t + \phi$)

($\omega t + \phi$) 称为振动系统在 t 时刻的相位，其中 ϕ 是振动系统在 $t = 0$ 时刻的相位，称为**初相位**。相位的单位为弧度(rad)。相位($\omega t + \phi$) 既出现在简谐振动的运动方程式(11.1.2) 中，也出现在速度、加速度的表达式(11.1.3)、(11.1.4) 中。已知相位便可确定振动物体的运动状态，所以相位是一个非常重要的物理量。在振动的描述中，相位是相对的，重要的是**相位差**的概念。相位差反映了两个振动步调上的差异。比较式(11.1.2)、(11.1.3) 和(11.1.4) 可知，作简谐振动的物体速度超前其位移 $\pi/2$ 相位，或称位移滞后速度 $\pi/2$ 的相位；而加速度与位移反相位。依据相位($\omega t + \phi$)，可以进一步理解角频率 ω 的含义。角频率是相位的时间变化率，角频率越大，相位随时间变化得越快，因而物体振动得越快。在振动过程中，相位($\omega t + \phi$) 随时间作周期性的变化，相位每变化 2π，振动的物体完成一次全振动。

振幅、角频率和初相位是描述简谐振动的三个重要物理量。知道了这三个物理量，就可以完全确定振动系统在任一时刻的运动状态。通常称振幅 A、角频率 ω 和初相位 ϕ 为描述简谐振动的三个特征物理量。

一个作简单谐振动的系统，它的固有角频率 ω_0 由式(11.1.1) 确定。对于弹簧振子，则由式(11.1.6) 所确定。但振动系统的振幅 A 和初相位 ϕ 则因初始时刻物体的运动状态(位移和速度) 不同而有所不同，所以知道了振动系统的固有角频率 ω_0 后，可由 $t = 0$ 时刻物体的运动状态来决定振动系统的振幅 A 和初相位 ϕ。把 $t = 0$ 代入式(11.1.2) 和式(11.1.3) 得

$$x_0 = x\,|_{t=0} = A\cos\phi$$
$$v_0 = v\,|_{t=0} = -\omega_0 A\sin\phi$$

由以上两式即可解得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \tag{11.1.9}$$

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \tag{11.1.10}$$

式中，x_0 和 v_0 表示 $t=0$ 时刻弹簧振子的位移和速度，称为**初始条件**。由式(11.1.9)和式(11.1.10)即可求得弹簧振子的振幅和初相位，就可以完全确定该简谐振动的位移和时间的函数关系，从而也就完全确定了该简谐振动。

利用三角函数与复数的关系，简谐振动也可表示为 $x = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\phi)}$，或

$$x = A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{11.1.11}$$

式中，$A' = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 也是复数，称为**复振幅**。

复振幅是一个不含时间的物理量，因此它是由初始条件决定的。采用复振幅表示的优点是，它不仅包括了振幅，还包括了初相位。复振幅综合反映了简谐振动的振幅和初相位的信息。应该注意，由于采用了余弦函数表示简谐振动，所以式(11.1.11)只有实部有意义。

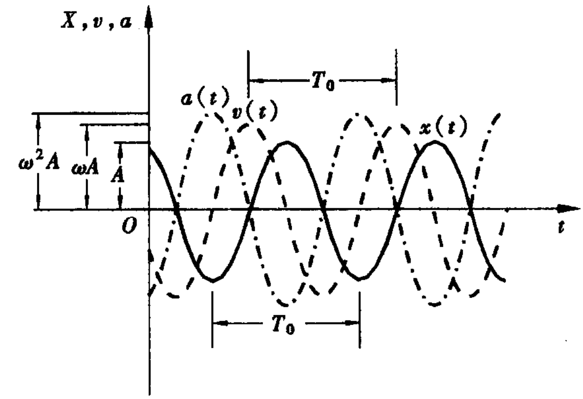

图 11-2 用曲线表示简谐振动

11.1.3 简谐振动的图示法

为了直观地表示简谐振动，可以采用图示法。如图 11-2 所示，以时间 t 为横坐标轴，位移 X 为纵坐标轴，可将式(11.1.2)中简谐振动的 $x(t)$ 函数关系描绘出来，称为**振动曲线**。图中还画出了相应的 $v(t)$ 曲线和 $a(t)$ 曲线。

简谐振动还可以用**旋转矢量**来表示。如图 11-3 所示，自坐标原点画一条长度等于振幅 A 的矢量 $\boldsymbol{A}$，开始时($t=0$)，让矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 X 轴的夹角等于振动的初相位 ϕ，令矢量 $\boldsymbol{A}$ 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 绕坐标原点 O 沿逆时针方向旋转，则 t 时刻矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 X 轴上的投影就表示振动的位移 x。这种表示简谐振动的方法称为**旋转矢量法**。旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示了简谐振动的三个特征物理量 A、ω_0 和 ϕ，它的端点 P 在坐标轴上的投影坐标描绘了简谐振动。端点 P 作匀速圆周运动，其运动轨迹是一个圆，因此旋转矢量法又叫**参考圆法**。另外，由端点 P 的线速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}}$ 在 X 轴上的投影也可以描绘简谐振动物体的速度随时间的变化情况，由端点 P 的向心加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}$ 在 X 轴上的投影还可以描绘简谐振动物体的加速度随时间的变化情况。旋转矢量法在确定简谐振动的相位变化及进行简谐振动的合成时特别有用。

在历史上，意大利著名物理学家伽利略用他自制的望远镜在 1610 年发现了木星的四颗卫星。根据伽利略的观测资料，在地球上的观察者看来，卫星作简谐振动。由简谐振动与匀速圆周运动的关系，可判断这些卫星在绕木星作匀速圆周运动。这是简谐振动与匀速圆周运动之间密切关系的很好实例。

例题 11-1 把两个劲度系数分别为 $k_1 = 3\times10^3\ \mathrm{N/m}$ 和 $k_2 = 1.5\times10^3\ \mathrm{N/m}$ 的轻质弹簧串接在一起，一端固定，另一端与一质量 $m = 0.1\ \mathrm{kg}$ 的小物块相连，置于光滑水平台面上，如图 11-4 所示。把物块自平衡位置拉开一段距离后释放，物块将在平衡

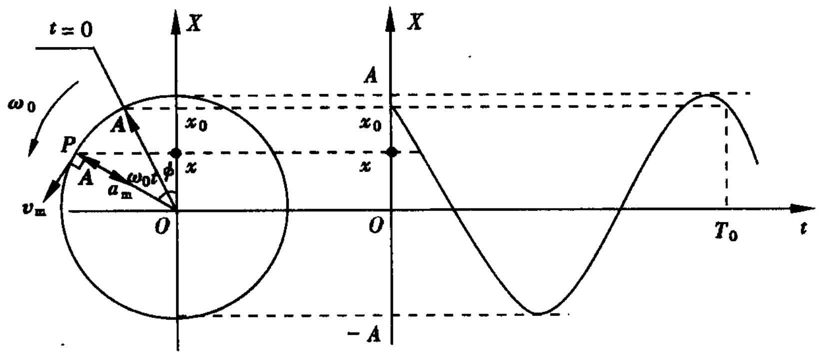

图 11-3　用旋转矢量的投影表示简谐振动

位置附近往复运动。问：

(1) 物块的运动是否为简谐振动；

(2) 设 $t=0$ 时，物块位于 $x_0=4$ cm 处，且具有 $v_0=300$ cm/s 的速度，写出物块的运动方程；

(3) 求物块从初始($t=0$)状态运动到 $x_1=4$ cm，$v_1=-300$ cm/s 的状态所需的最短时间。

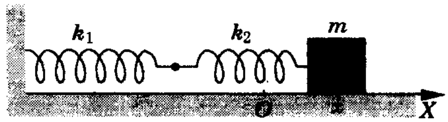

图 11-4　例题 11-1 图

解　(1) 以平衡位置(两弹簧均未发生形变)作为坐标原点 O，建立如图所示的坐标系。当物块的位置坐标为 x 时，设弹簧 k_1 的形变量为 x_1，弹簧 k_2 的形变量为 x_2，则有

$$x=x_1+x_2$$

忽略弹簧本身的质量，由两弹簧的受力分析可知

$$k_1x_1=k_2x_2$$

把两弹簧的组合视为一个弹簧，其等效劲度系数为 k，则有

$$kx=k_1x_1=k_2x_2$$

以上三个方程联立可得等效劲度系数

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

由于 k_1 和 k_2 均为常量，所以 k 亦为常量，其值为

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=\frac{3\times10^3\times1.5\times10^3}{3\times10^3+1.5\times10^3}\ \text{N/m}=10^3\ \text{N/m}$$

由以上分析可知，物块在运动过程中所受的合外力为线性恢复力 $F=-kx$，物体将作简谐振动。

(2) 设物块的运动方程为

$$x=A\cos(\omega_0t+\phi)$$

式中，$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{10^3}{0.1}}$ rad/s $=100$ rad/s。由题目所给的初始条件得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}}=\sqrt{4^2+\frac{(300)^2}{(100)^2}}\ \mathrm{cm}=5\ \mathrm{cm}$$

$$\phi=\arctan(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0})=\arctan(-\frac{300}{100\times 4})=\mathrm{acrtan}(-\frac{3}{4})$$

利用旋转矢量可以简便直观地判定，此 ϕ 角应在第四象限，其值为

$$\phi=\arctan(-\frac{3}{4})=-0.64\ \mathrm{rad}$$

因此，所求物块的运动方程为

$$x=5\cos(100t-0.64)\ \mathrm{cm}$$

(3) 设所需的最短时间为 t_1。由旋转矢量图很容易判定，与 $x_1=4$ cm、$v_1=-300$ cm/s 的状态相对应的相位应为 $\phi_1=0.64$ rad，依题意有

$$\omega_0 t_1-0.64=100t_1-0.64=0.64\ \mathrm{rad}$$

由此得

$$t_1=\frac{0.64+0.64}{100}\ \mathrm{s}=1.28\times 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

11.1.4 简谐振动的能量

振动系统具有能量。现仍以图 11-1 所示的水平弹簧振子为例来讨论简谐振动系统的能量问题。当物体的位移为 x，速度为 v 时，系统的弹性势能 E_p 和动能 E_k 分别为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t+\phi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\phi)$$

因此，弹簧振子系统的总机械能

$$E=E_p+E_k=\frac{1}{2}kA^2\equiv\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \tag{11.1.12}$$

由此可知，弹簧振子的总机械能不随时间改变，即系统的机械能守恒。这也是简谐振动的一个显著特征。

式(11.1.12)还表明弹簧振子的总能量与振幅的平方成正比。这一结论对其他的简谐振动也是正确的。振幅不仅给出了简谐振动的运动范围，而且还反映了振动系统总能量的大小，或者说反映了振动的强度。

此外，还可以求出弹簧振子的势能和动能对时间的平均值 $\overline{E}_p$ 和 $\overline{E}_k$。根据物理量对时间的平均值的定义可得

$$\overline{E}_p=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}E_p\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E}_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}E_k\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\phi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

即弹簧振子的势能平均值和动能平均值(可分别称为平均势能和平均动能)相等并且

均等于总机械能的一半。这一结论也同样适用于其他简谐振动。

例题 11-2　LC 振荡是一个非力学的简谐振动的例子。如图 11-5 所示，用电源 ε、电容 C 和电感 L 组成电路。先将电键 K 接到电源 ε 一侧，使电源给电容器充电，然后再将电键 K 打向另一侧接通 LC 回路。此后即可通过电流计 G 观察到回路中产生了大小和方向都交替变化的电流。用两种方法讨论电容器极板上的电荷以及回路中的电流随时间的变化规律。

解　**方法 1**：利用基尔霍夫回路电压方程。

设某时刻 t，电容器极板上的电量为 q，以箭头表示回路电流 i 和感生电动势 ε_L 的正方向，在忽略电流计和导线电阻的情况下，有

$$-\varepsilon_L - u_C = 0$$

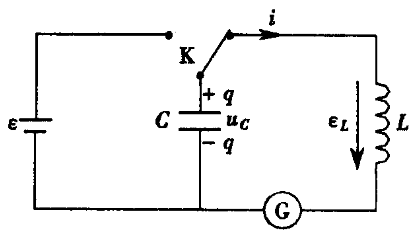

图 11-5　LC 振荡

因为

$$u_C = \frac{q}{C}, i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$$

代入上式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{LC} = 0 \qquad (11.1.13)$$

这也是一个类似式(11.1.1) 那样的微分方程。因此可知电容器极板上的电量也是按简谐振动形式变化的，上式的解为

$$q = q_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

LC 回路振荡的固有角频率 ω_0 和固有频率 ν_0 分别为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

回路电流的表达式为

$$i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \omega_0 q_{\mathrm{m}}\sin(\omega_0 t + \phi)$$

即回路中的电流也按简谐振动的形式变化。这种电流称为振荡电流。而图 11-5 所示的电路则称为 LC 振荡电路。

方法 2：利用能量关系。

从能量角度分析，也可以得到 LC 回路微分方程式(11.1.13)。在电流计和导线电阻忽略不计以及不考虑磁辐射的前提下，可知系统电磁能量没有任何耗散，所以系统能量守恒。设某一瞬时，电容器极板上的电量为 q，流过回路的电流为 i，则系统的电磁能量可以表示为

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

由于系统的能量不随时间改变，于是有　$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q}{C}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Li\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$

将 $i = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$ 代入即得　$\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{q}{LC} = 0$

11.1.5 其他简谐振动

1. 单摆(数学摆)

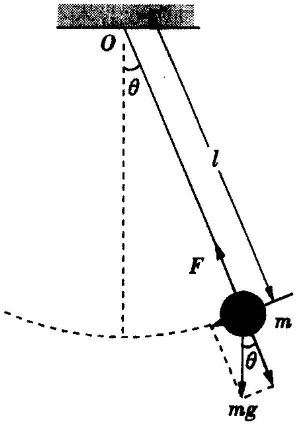

图 11-6 单摆

将一个小球(视为质点)系于不可伸长、质量可忽略不计的细绳下端,将细绳上端固定,如图 11-6 所示。当细绳处于铅垂方位时,小球处于平衡状态。将小球略为偏离其平衡位置,使得细绳与铅垂方向成一较小角度 θ(一般在 5° 以内),然后释放,小球就会左右摆动起来。设小球的质量为 m,细绳的长度为 l,用坐标 θ 作为描写小球位置的变量,并规定小球在平衡位置右方时 θ 为正,在左方时 θ 为负。作用在小球上的力有两个,一个是小球自身的重力 mg,另一个是细绳的张力 F。将重力分解为互相垂直的两个分力:一个分力与细绳的张力 F 平行,大小为 $mg\cos\theta$;另一个分力沿小球的运动方向,大小为 $mg\sin\theta$,方向指向小球的平衡位置。前一个分力与细绳张力的合力,其方向与小球运动方向垂直,对小球的切向运动不起作用;后一个分力则直接影响小球切向运动,若只考虑小球的切向运动,则小球的运动微分方程为

$$ma_{\tau} = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$$

当 θ 很小(即小于 5°)时,$\sin\theta \approx \theta$,上式变为

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\theta \tag{11.1.14}$$

即是说,小球所受的切向力与角坐标 θ 成正比,方向指向平衡位置,所以小球作简谐振动。稍加整理,式(11.1.14) 可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{11.1.15}$$

此式称为**单摆**或**数学摆**的运动微分方程。其相应的运动方程也应具有式(11.1.2) 所示的形式

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{11.1.16}$$

式中,$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 为单摆振动的固有角频率。

与此相应,单摆振动的固有频率和固有周期分别为

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

式(11.1.16) 中的 θ_{m} 称为角振幅,ϕ 为初相位,它们均由初始条件决定。当单摆的摆长

一定时，其振动周期由单摆所在地区的重力加速度决定，所以可以通过测量单摆振动的周期来确定单摆所在地区的重力加速度。

下面比较一下弹簧振子和单摆。在弹簧振子的情形下，物体所受的合外力为弹簧所施加的弹性力；在单摆的情形下，物体所受的切向力并不是弹性力，而是其重力的切向分力(参见图 11-6)，但在θ很小(小于 5°) 时，此力与角坐标(或称角位移)θ成正比，方向指向平衡位置。这些性质与弹性力十分相似，因此称为准弹性力。凡一种力，虽然不是弹性力，但它和物体的位移(或角位移) 的关系跟弹性力相似，就把它叫做**准弹性力**。

通过前面的讨论，可以得到这样的结论：受弹性力或准弹性力作用的物体(视为质点) 必作简谐振动。从能量角度分析，作简谐振动的系统必定是保守系统，其机械能守恒。振动角频率仅由系统本身的性质决定。这样的振动系统称为**简谐振子或谐振子**。

2. 复摆(物理摆)

考察一个在重力力矩作用下绕水平固定转轴 O 摆动的刚体，如图 11-7 所示。设刚体的质量为 m，它对于固定转轴 O 的转动惯量为 I，质心位于 C 点，质心与转轴 O 的距离为 l。摆动时，令 OC 线与铅垂线之间的夹角为θ，并规定 OC 线在平衡位置的右方时θ为正，在左方时θ为负。刚体在重力力矩的作用下运动，根据转动定律，刚体运动的微分方程为

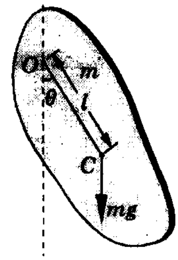

图 11-7　复摆

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mgl\sin\theta$$

当θ很小(小于 5°) 时，$\sin\theta\approx\theta$，上式变为

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mgl\theta$$

此式表明，刚体所受的合外力矩为线性恢复力矩。将此式稍加整理后可以写成如下形式的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgl}{I}\theta=0 \tag{11.1.17}$$

此方程与式(11.1.1) 具有相同的形式，因而也是一种简谐振动。作简谐振动的这种刚体称为**复摆或物理摆**。方程式(11.1.17) 的解可以表示成

$$\theta=\theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{11.1.18}$$

式中，$\omega_0=\sqrt{\dfrac{mgl}{I}}$ 为复摆的固有角频率，而角振幅θ_{m}和初相位ϕ则由初始条件决定。将式(11.1.18) 对时间求导数，可得复摆振动的角速度和角加速度表达式。

也可以换个角度，从能量关系分析得出复摆(单摆也一样) 的运动微分方程。选刚体在平衡位置时的重力势能为零，则当角位移为θ时系统的机械能(即动能与势能之和) 可以表示为

$$E=mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}I\Omega^2$$

式中，$\Omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 为刚体摆动的角速度。

由于刚体摆动过程中仅有重力(保守力)对系统做功,所以系统机械能守恒,故

$$\frac{dE}{dt} = mgl\ \sin\theta\frac{d\theta}{dt} + I\Omega\frac{d\Omega}{dt} = 0$$

将 $\Omega = \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ 代入后得到 $\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\sin\theta = 0$

当 θ 很小(小于 5°) 时,$\sin\theta \approx \theta$,上式变为 $\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$

这便是式(11.1.17) 所表示的复摆运动的微分方程。

在前面讨论单摆和复摆时,用角坐标 θ 表示物体所在的位置,通常称像单摆和复摆这样用角坐标来描述的简谐振动为角谐振动;与此对应,称像弹簧振子那样用线坐标(如 x) 所描述的简谐振动为线谐振动。

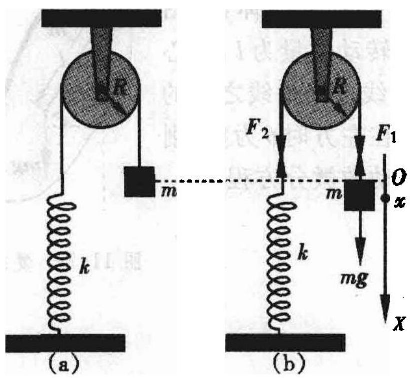

图 11-8 例题 11-3 图

例题 11-3 在如图11-8(a) 所示的系统中,轻弹簧的一端固定,另一端经由细绳通过一个定滑轮被质量为 m 的小物体拉伸。滑轮半径为 R,转动惯量为 I,弹簧的劲度系数为 k。令整个系统在平衡位置附近作微小振动,在振动过程中细绳与滑轮无相对滑动。不计摩擦损耗以及细绳和弹簧的质量,试确定系统振动时的固有角频率。

解 **方法 1**:利用牛顿定律和转动定律。

建立如图 11-8(b) 所示的坐标系,取物体所在的平衡位置为坐标原点 O,此时弹簧的形变量为 x_0,且有 $mg = kx_0$。在振动过程中,物体作平动,定滑轮作定轴转动。当物体的坐标为 x 时,对物体和定滑轮分别列方程,有

$$mg - F_1 = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_1R - F_2R = F_1R - k(x_0 + x)R = \frac{I}{R}\frac{d^2x}{dt^2}$$

由以上两方程可得 $\qquad mgR - k(x_0 + x)R = (mR + \frac{I}{R})\frac{d^2x}{dt^2}$

注意到 $\qquad mgR - kx_0R = 0$

所以有 $\qquad -kx = (m + \frac{I}{R^2})\frac{d^2x}{dt^2}$

整理后得到 $\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kR^2}{mR^2 + I}x = 0$

由此可知,系统作简谐振动,其固有角频率 $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2}{mR^2 + I}}$

方法 2:利用机械能守恒定律。

由于系统在振动过程中仅有物体的重力和弹簧的弹力做功，所以整个系统的机械能守恒。选物体在其平衡位置处势能为零，当物体坐标为 x 时，系统机械能可表示为

$$E=-mgx+\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2R^{-2}+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2$$

由机械能守恒可得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-mg\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{I}{R^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k(x_0+x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

整理后可得　$$-mg+\left(m+\frac{I}{R^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx_0+kx=0$$

由于 $-mg+kx_0=0$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{kR^2}{mR^2+I}x=0$$

可知系统作简谐振动，其固有角频率　$$\omega_0=\sqrt{\frac{kR^2}{mR^2+I}}$$

例题 11-4　质量为 m_1 的盘子系于竖直悬挂的质量可忽略不计的轻弹簧下端，弹簧劲度系数为 k，平衡时弹簧伸长了 l。一质量为 m_2 的砝码自 h 高度自由下落掉在盘上，与盘作完全非弹性碰撞后成为一体。以砝码掉在盘上的瞬时作为计时起点，求盘子的位移与时间的函数关系。

解　设弹簧原长为 l_0，依题意画出如图 11-9 所示的示意图。本题由三个物理过程所组成。其一是砝码自由下落，其二是砝码与盘子作完全非弹性碰撞；其三是砝码与盘子碰撞后合为一体共同运动。建立如图所示的坐标系，以盘子和砝码的平衡位置作为坐标原点 O，此时弹簧伸长量为 L，应有下列关系式存在

$$m_1g=kl$$
$$(m_1+m_2)g=kL$$

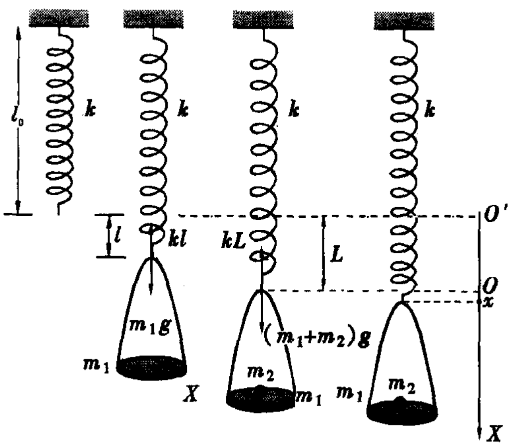

图 11-9　例题 11-4 图

规定竖直向下为 X 轴的正方向，当盘子与砝码在运动过程中其坐标为 x 时，依据牛顿运动定律可得

$$(m_1+m_2)g-k(L+x)=(m_1+m_2)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

由于 $(m_1+m_2)g=kL$，上式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m_1+m_2}x=0$$