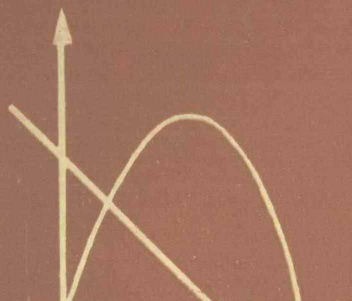
经济数学（一）

数学分析



湖北财经学院数学教研

经济数学（一）

数学分析

湖北财经学院数学教研室

一九八三年八月

目　　录

第一章　集合与函数

第二章　极限与连续

第三章 导数与微分

第四章 中值定理及微分学的应用

第五章 积分法

第六章　级数

第七章　多元函数

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongb

第一章　集合与函数

函数是数学分析的基本概念，也是研究经济量之间互相联系和变化规律的重要工具。本章首先介绍集合的有关知识，然后用集合的方法讨论函数的概念和性质，并简略地叙述在经济领域中常用的一些初等函数。

第一节　集　　合

一、集合的概念

集合是现代数学最基本的概念之一，集合的概念和方法已经渗透到几乎所有的数学领域中，然而集合又是现实生活中最常见且最易为人们所理解的概念。例如，武汉市的全体居民；某工厂的全部机床；全部直角三角形；一切自然数等等。这些不同的事物由于有共同的某种属性而集中在一起，就组成了一个集合。下面给出集合的定义。

定义1.（集合）具有某种属性的事物的全体称为集合，简称集。集合中的每个事物称为集合的元素。

集合中的元素有确定的含义，即任何一个元素与已知集合的关系只有两种可能，或者属于这个集合，或者不属于这个集合，二者必居其一且只居其一，不容半点含混。

通常用大写字母A、B、C、…　来表示集合，用小写字母a、b、x、y、…　来表示集合的元素。如果A是一个集合，x是A的元素，则称x属于A，记作$x\in A$；x不是A的元素，则称x不属于A，记作$x\overline{\in} A$。

先看几个集合的例子。

例 1 某班教室里的全体学生组成集合 A，全体男学生组成集合 B，全体女学生组成集合 C。

例 2 数学上一些常用的数集，有习惯的记号，例如：全体自然数组成的集合记为N；全体有理数组成的集合记为Q；全体无理数组成的集合记为U；全体实数组成的集合记为 R。容易判断：$2\in N$，$2\in Q$，$2\in R$，而$2\overline{\in}U$；$\sqrt{2}\in U$，$\sqrt{2}\in R$，而$\sqrt{2}\overline{\in}N$，$\sqrt{2}\overline{\in}Q$。

例 3 全体奇数组成集合 A，全体偶数组成集合 B。

例 4 平面xoy以原点为园心的单位园上的所有点组成集合M。

例 5 方程$x^2-3x+2=0$的全部实根组成集合 A。

例 6 方程$x^2+1=0$的实根组成集合 A。

集合一般有两种表示法。

一是列举法。把集合的元素一一列出，并用花括号括起来，这种方法称为列举法。例如在例 3 中，$A=\{1,3,5,7,\cdots\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$。在例 5 中，$A=\{1,\ 2\}$。

另一种是示性法。用集合的元素所具有的公共属性来表示集合的方法称为示性法。设集合为A，元素为x，公共属性为P，集合A可记为

$$A=\{x\mid x\text{具有属性}P\}$$

例 3 中，$A=\{x\mid x=2n-1,\ n\in N\}$

$B=\{x\mid x=2n,\ n\in N\}$

例 4 中，$M=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\}$

例 5 中，$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$

如果集合中的元素只有有限个，则称这类集合为有限集合，否则称为无限集合。例如：例 5 中 $A=\{1,\ 2\}$ 为有限集

合；例 4 中，$M=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$为无限集合。

不含任何元素的集合称为空集，记作Φ，例如在例 6 中 $A=\Phi$。

只含一个元素的集合称为单元素集合。例如：

$E=\{x \mid x-1=0\}=\{1\}$是单元素集合。

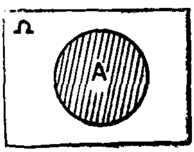
由所研究的事物（元素）的全体组成的集合称为全集（或称为空间），记为Ω。在例 1 中，$\Omega=\{$某班的全体学生$\}$。全集是相对的，例如讨论的问题在实数范围内，实数集是全集；在整数范围内，整数集是全集。

定义2（包含与相等）设A、B为二集合，如果A的每一个元素都属于B，则称A是B的子集，或称A包含于B，或称B包含A，记作$A\subset B$或$B\supset A$。如果$A\subset B$，且$B\subset A$，则称A与B相等，记作$A=B$。

例如，在例 1 中$B\subset A$，$C\subset A$。在例 2 中，$N\subset Q\subset R$。

显然，如果$A\subset B$，$B\subset C$，则有$A\subset C$。

为了直观地表示集合及相互关系，可以把集合表示为平面上的的几何图形（如图1.1）。



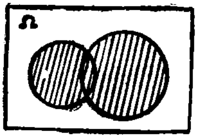
（图1.1）

图中的矩形表示全集Ω（空间），矩形里的园表示集合A。这种图称为维恩图。

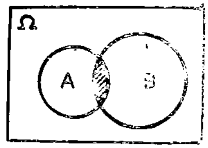
二、集合的运算

定义3 设A、B是两个集合，由A与B的全体元素所组成的集合，称为A与B的并，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{或}x\in B\} \quad \text{（如图1.2）}$$



A∪B （图1.2）



A∩B （图1.3）

由定义 3 易知，集合的并有以下简单性质：

（1） $(A\cup B)\supset A$，$(A\cup B)\supset B$；

（2） $A\cup A=A$，$A\cup\Phi=A$，$A\cup\Omega=\Omega$。

定义4 设A、B是两个集合，由A与B的全部公共元素所组成的集合，称为A与B的交，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}$$ （如图1.3）。

由定义 4 可知，集合的交有以下性质：

（1） $(A\cap B)\subset A$，$(A\cap B)\subset B$；

（2） $A\cap A=A$，$A\cap\Phi=\Phi$，$A\cap\Omega=A$。

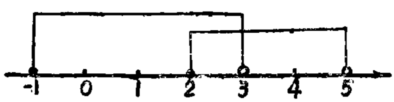
下面看几个集合的并与交的例子。

例 7 由例2 $\Omega=\{\text{有理数}\}$，$U=\{\text{无理数}\}$，$R=\{\text{实数}\}$，于是$Q\cup U=R$，$Q\cap U=\Phi$，$Q\cap R=Q$，$Q\cup R=R$。

例 8 设$A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid 2\leqslant x<5\}$

则$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x<5\}$，$A\cap B=\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

（如图1.4）



（图1.4）

例 9 设 $A=\{a \mid a$是某班的共青团员$\}$

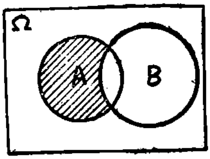
$B=\{b \mid b$是某班的三好学生$\}$

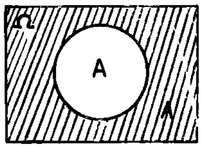
则 $A\cup B=\{x \mid x$是某班的共青团员或三好学生$\}$

$A\cap B=\{y \mid y$是某班共青团员中的三好学生$\}$

定义5 设A、B是两个集合，由属于A但不属于B的全体元素所组成的集合，称为A与B的差，记作$A-B$，即

$A-B=\{x \mid x\in A$ 但$x\overline{\in} B\}$ （如 图1.5）





$A-B$ （图1.5） $\overline{A}$图（1.6）

定义6 设有全集Ω，且$A\subset\Omega$，由Ω中不属于A的全体元素所组成的集合称为A的补集，记为$\overline{A}$，即

$\overline{A}=\{x \mid x\in\Omega$ 但$x\overline{\in} A\}$ （如图1.6）

显然，补集有以下性质：

（1） $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\Phi$；

（2） $(\overline{A})=A$；

（3） 如果$A\subset B$，则$\overline{A}\supset\overline{B}$。

例10 在例2中设全集$\Omega=R$，则

$R-Q=U$，$R-U=Q$，$Q-U=Q$，$\overline{Q}=U$，$\overline{U}=Q$。

例11 在例 8 中，若设全集$\Omega=R$，则

$A-B=\{x \mid -1<x<2\}$

$\overline{A}=\{x \mid x\leqslant-1$或$x\geqslant3\}$

例12 某车间的产品中，设$A=\{$全部合格品$\}$，$B=\{$全部不合格品$\}$，$\Omega=\{$全部产品$\}$，则 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongb

三、集合运算的性质

对于集合A、B、C，有以下运算性质：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

(3)分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

证　我们只证分配律的第一个公式，其它公式请读者自证。设$x\in(A\cup B)\cap C$，则$x\in(A\cup B)$且$x\in C$。即$x\in A$或$x\in B$，且$x\in C$。若$x\in A$且$x\in C$，则有$x\in A\cap C$，而若$x\in B$且$x\in C$，则$x\in B\cap C$。

所以　$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

因此　$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

反之，设$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，则

$x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C$

因此　$x\in A$且$x\in C$或$x\in B$且$x\in C$

若　$x\in A$且$x\in C$

则有　$x\in A\subset A\cup B$且$x\in C$

故　$x\in(A\cup B)\cap C$

而$x\in B$且$x\in C$时

则　$x\in B\subset A\cup B$且$x\in C$

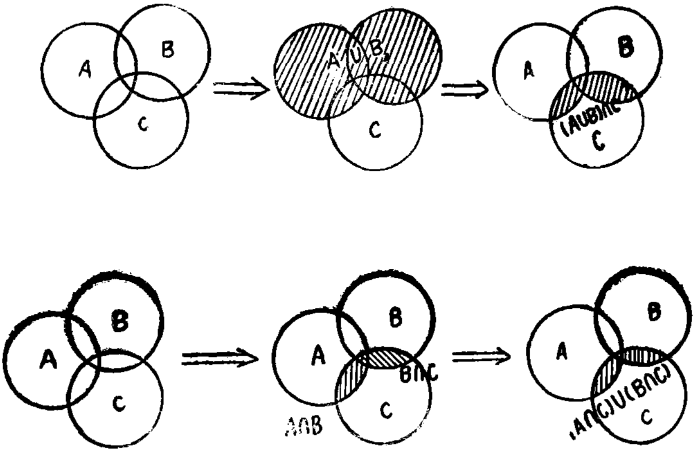
故　$x\in(A\cup B)\cap C$

不管怎样，总有$x\in(A\cup B)\cap C$

即　$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$

最后得　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

分配律的第一个公式也可以用维恩图说明。（图1.7）



（图1.7）

例13　利用集合运算性质化简下式：

$$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

解

$$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$
$$=[(A\cup\overline{A})\cap B]\cup(A\cap\overline{B})$$
$$=[\Omega\cap B]\cup(A\cap\overline{B})$$
$$=B\cup(A\cap\overline{B})=(B\cup A)\cap(B\cup\overline{B})$$
$$=(B\cup A)\cap\Omega=B\cup A$$

第二节　映　　射

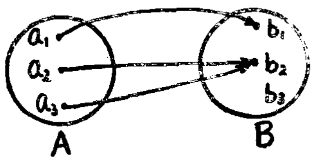
前面介绍了集合的概念及集合的运算，本节将进一步讨论集合之间的关系，即映射，这是集合的另一个基本概念。

定义7 设A、B是两个非空集合，如果存在一个确定的对应法则f，使得任一个元素$a\in A$，通过f有唯一的元素$b\in B$与之对应，则称f是一个从A到B的映射，记作

$$f: A\longrightarrow B \quad \text{或} A\xrightarrow{f}B。$$

也记作 $$a\xrightarrow{f}b \quad \text{或} b=f(a)$$

b称为a（在映射f下）的象，a称为b的原象（图1.8）。称A为映射f的定义域，而$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}(\subset B)$称为$f$的值域。



（图1.8）

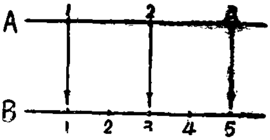
下面看几个映射的例子。

例1 设A、B分别表示某商店的全部商品和它们的价格所组成的集合，f表示每个商品都有唯一确定的价格这个对应法则。则f是一个由商品集合A到价格集合B的映射，即$A\xrightarrow{f}B$。B中的每个价格是象，对应的A中的商品为原象。

例2 设A表示平面上所有三角形的集合，R^+表示正实数集合，f表示A中的每个三角形与它的面积对应的法则，则f是一个由A到R^+的映射，即$A\xrightarrow{f}R^+$。对A的任一元素a（三角形），它的象$f(a)$（面积）是一个正实数；反之，每一正实数是一个三角形的面积。映射的定义域为A，值域为R^+，即

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}=R^+$$

例3 设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，f表示对应法则：$a\xrightarrow{f}2a-1$，则f是一个由A到B的映射(图1.9)

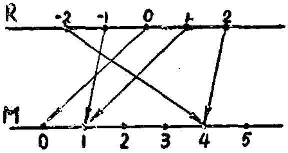


（图1.9）

A是映射f的定义域，值域

$$f(A)=\{1,\ 3,\ 5\}\subset B。$$

例4　设R为实数集，M为非负实数集合，f表示对应法则：$a\xrightarrow{f}b=a^2$，则f是一个由R到M的映射(图1.10)。0、±1、±2的象分别是0，1，4。±1是R中两个不同的元素，但它们却有共同的象。这说明在映射中同一个象可以有不同的原象。



(图1.10)

在映射的定义中需注意：

（1）记号f与$f(a)$不同，f表示对应法则，$f(a)$表示a的象，即$f(a)=b$。

（2）对每一个$a\in A$，有唯一的象$b=f(a)$与之对应；反之，对每一个$b\in B$可以有不同的原象与之对应。

（3）在映射中a遍取定义域A，象b不一定遍取集合B，即值域$f(A)\subset B$。如果$f(A)=B$，则称f为A到B上的映射，或称全射。如果$f(A)\neq B$，则称f为A到B内的映射。

映射的定义保证了对每一个$a\in A$对应唯一的象$b=f(a)$；但是对每一个象$b\in B$不一定有唯一的原象。即对A中两个不同的元素$a_1\neq a_2$，可能有相同的象，即　$b=f(a_1)=f(a_2)$。如果$a_1\neq a_2$，有$f(a_1)\neq f(a_2)$，既保证了A中不同元素在B中有不同的象，也保证了B中的每个元素在A中只有唯一的原象。从而引出了一种重要的映射。

定义8　（一一映射）　设f：$A\to B$是由A到B上的映射，如果A中任意二元素$a_1\neq a_2$，有

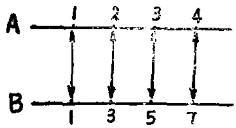
$$f(a_1)\neq f(a_2)$$

则称f为由A到B的一一映射。

例如在例 2 中，映射 f：$A\to B$是由A到B上的映射，但是不同的三角形（同底等高）可以有相同的面积，即 $a_1\neq a_2$，可能有$f(a_1)=f(a_2)$，故不是一一映射。例 3 中虽然满足 $a_1\neq a_2$，$f(a_1)\neq f(a_2)$，但f是由A到B内的映射，故不是一一映射。

例5 设$A=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$，$B=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

f为对应法则：$a\xrightarrow{f}b=2a-1$，则f是由A到B的一一映射（图1.11）。显然对任意一个元素$a\in A$在B中有唯一的象；反之，对任一元素$b\in B$，在A中有唯一的原象。



(图1.11)

定义9 （逆映射）设f为由A到B的一一映射，如果对任意$b\in f(A)$，有唯一的$a\in A$与之对应，并使得$f(a)=b$，则称这个映射为映射f的逆映射，记作

$$B\xrightarrow{f^{-1}}A，或 f^{-1}(b)=a$$

例如例 5 中f是A到B的一一映射，f的逆映射f^{-1}是

$$b\xrightarrow{f^{-1}}a=\frac{b+1}{2}$$

逆映射f^{-1}的定义域是f的值域B，逆映射f^{-1}的值域是f的定义域A。

在例4中f是由R到M的映射，但不是一一映射，故f没有逆映射。事实上，对任意$b\in M$，在R中都有两个元素$\pm\sqrt{b}$与之对应，所以逆映射f^{-1}不存在。

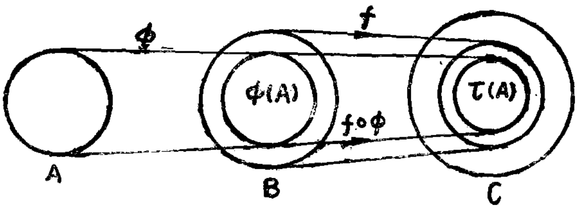
定义10（复合映射）设φ为A到B的映射，f为B到C的映射，如果对任意$a\in A$，有$\tau(a)=f[\varphi(a)]$与之对应，则

称由A到C上的映射τ为φ，f的复合映射，记作

$$\tau = f \circ \varphi$$

复合映射$f \circ \varphi$表示先作映射φ后作映射f；而$\varphi \circ f$则表示先作映射f后作映射φ。这两种复合映射是不相同的，即复合映射的顺序一般是不可交换的。

可以用维恩图表示复合映射（图1.12）



（图1.12）

例6 设$A=\{1, 2, 3\}$，如果φ和f都是由A到A的映射，其中

$$\varphi(1)=2,\quad \varphi(2)=3,\quad \varphi(3)=1$$
$$f(1)=2,\quad f(2)=1,\quad f(3)=3$$

则$\tau = f \circ \varphi$是A到A的复合映射。

$$\tau(1)=(f \circ \varphi)(1)=f[\varphi(1)]=f(2)=1$$
$$\tau(2)=(f \circ \varphi)(2)=f[\varphi(2)]=f(3)=3$$
$$\tau(3)=(f \circ \varphi)(3)=f[\varphi(3)]=f(1)=2$$

另外，$\mu=\varphi \circ f$也是A到A的复合映射，则

$$\mu(1)=(\varphi \circ f)(1)=\varphi[f(1)]=\varphi(2)=3$$
$$\mu(2)=(\varphi \circ f)(2)=\varphi[f(2)]=\varphi(1)=2$$
$$\mu(3)=(\varphi \circ f)(3)=\varphi[f(3)]=\varphi(3)=1$$

由此可见，$f \circ \varphi \neq \varphi \circ f$（图1.13）

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongb