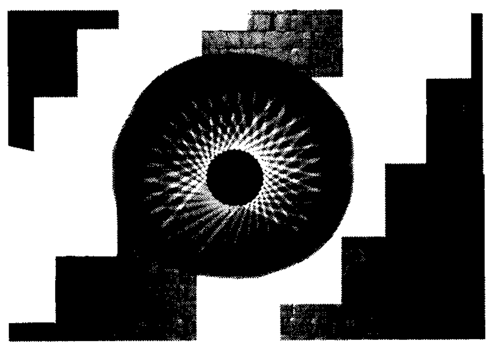
大学物理实验教程

DAXUE
WULI
SHIYAN
JIAOCHENG

主　编　熊祖钊

湖北科学技术出版社

大学物理实验教程



主　编　熊祖钊
副主编　陈克亮　杨守菊　杨　霞
　　　　陈居正　陈玉萍　黄　刚

湖北科学技术出版社

DAXUE WULI
SHIYAN JIAOCHENG

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验教程/熊祖钊主编. —武汉:湖北科学技术出版社,2004.2 (2006年12月重印)

ISBN 7-5352-3177-2

Ⅰ.大... Ⅱ.熊... Ⅲ.物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第009239号

大学物理实验教程 ⓒ 熊祖钊 主编

策　　划:
责任编辑:梁琼
封面设计:王　梅

出版发行:湖北科学技术出版社　电话:87679468
地　　址:武汉市雄楚大街268号湖北出版文化城B座12-13层　邮编:430070

印　　刷:武汉中科兴业印务有限公司　邮编:430071

787毫米×1092毫米　16开　11印张　252千字
2004年2月第1版　2006年12月第4次印刷

ISBN 7-5352-3177-2　定价:22.00元

本书如有印装质量问题 可找承印厂更换

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

绪　　论

一、物理实验课的地位和任务

物理学是建立在实验基础上的科学，物理规律的发现和物理理论的建立，都必须以严格的科学实验为基础，并受到科学实验的检验。从世界上第一个物理实验——伽俐略的斜面实验开始，许多重要实验都充分说明了这个道理，如：杨氏干涉实验确立了光的波动学说；迈克尔逊—莫雷实验证实了“以太”的不存在；赫兹的电磁波实验使麦克斯韦的电磁场理论获得普遍承认；卢瑟福的 α 粒子散射实验揭开了原子的秘密；近代的高能粒子对撞实验使人们能深入到物质最深层——原子核和基本粒子内部进行研究。

实验是物理学的基础，但在科学技术飞速发展的今天，用已确立的理论指导实验，探索新的领域，具有同等重要的地位，所以，实践——理论——再实践的辩证唯物主义认识论同样适用于物理学的发展，任何轻视实验或轻视理论的思想都是错误的。

物理实验也是推动科学技术发展的有力手段。如：精密测量、激光、半导体、大规模集成电路、电子学、真空、微波、红外线、超声波、低温等都是在物理学的基础上发展起来的，它们无一不与物理实验有着直接或间接的联系。物理实验方法也广泛应用于科学技术领域和生产部门。总之，物理实验对物理学和科学技术的发展起着重要的和直接的推动作用。

物理实验是一门独立设置的必修的基础实验课，是学生进入大学后接受科学实验基本训练的开端，是后续实验课程的基础，其任务是：

1. 使学生掌握物理实验的基本知识、基本方法和基本技能。通过实验能正确地使用和选择基本仪器，掌握一些物理量的测量技术和方法，能正确记录、处理实验数据，判断和分析实验结果，并能写出完整合格的实验报告。

2. 通过对实验的观察、测量和分析，加深对物理学某些概念、规律和理论的理解，培养并逐步提高学生观察和分析物理现象的能力及理论联系实际的独立工作能力。

3. 培养学生严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度和爱护国家财产、遵守纪律的优良品德。

二、物理实验课的基本程序

1. 实验前预习

实验前应仔细阅读实验教材，明确所做实验的目的、原理、仪器设备、步骤等，在此基础上写出预习报告，其内容为实验名称、目的、基本原理和测量公式、仪器设备、记录数据的表格。论述原理时语言要简洁明了，不得照抄书本。电学和光学实验要有电路图和光路图。

2. 实验操作

实验前先要熟悉仪器的工作原理和操作程序，并将仪器安装调整好。然后按照规定的要求，有计划、有步骤地进行实验，切不可无目的地盲目蛮干。在实验中要严格遵守操作规程，电学实验容易发生事故，所联接的电路必须经指导老师检查，确认无误后方能进行实验。

操作、观察和记录数据应认真、仔细、及时、迅速、准确。原始数据未经重复测试或无充分的理由，不允许随意涂改，因为这些被认为是错误的实验数据往往是分析、研究问题的依据。实验完毕后，整理好仪器，并将实验数据交指导教师审查签字后，方可离开实验室。

3. 实验报告

实验报告是实验工作的全面总结，要用简明的形式将实验情况完整、真实而又准确地表达出来。实验报告要求文字通顺，字迹端正，图表规范，认真讨论。

完整的实验报告是在预习报告的基础上继续完成实验数据的计算、作图、误差分析、实验结果的表达及问题讨论。如果实验内容是观察某一物理现象或验证某一物理定律，则只需扼要地写出实验的结论。问题讨论部分包括回答思考题，实验中观察到的异常现象及可能的解释等。

三、学生实验守则

1. 没有预习报告不得做实验，若预习报告不合格，须令其当堂写好后再做实验。以上两种情况都要扣分。
2. 上实验课不得迟到，迟到在 5 分钟以内者扣分，超过 5 分钟者不得参加本次实验。
3. 实验完毕，将填有实验数据的预习报告交老师审查、签字，数据不合要求者重做。实验数据不得伪造、抄袭，否则该实验成绩按不及格处理。
4. 每次实验时要交上一次实验报告，报告不合要求者退回重做。
5. 爱护公共财物，严格遵守操作规程，未经同意不得动用其他实验组仪器。
6. 讲究文明礼貌，保持实验室安静、整洁，不得高声喧哗、嬉闹、抽烟、穿背心。
7. 实验完毕必须整理好仪器，经老师同意方能离开实验室。
8. 凡因病、因事缺课者，必须出具有关部门证明方可补做实验，否则按旷课论处。

实验误差与数据处理的基础知识

物理实验的任务不仅是定性地观察各种自然现象，更重要的是定量地测量相关物理量，而对事物定量地描述离不开实验数据的处理，因此，数据处理与误差分析是物理实验课的基础。下面将从测量及误差的定义开始，逐步介绍有关误差理论和实验数据处理方法的一些基本知识。

测量与误差

一、测量与误差的基本概念

物理实验的内容大致包括三个部分：第一部分是设计或选用实验仪器，使得物理现象再现；第二部分是测量；第三部分是数据处理，通过数据处理找出各物理量之间的数学关系，从而得出实验规律。因此可以说物理现象的再现是物理实验的基础，进行测量是物理实验的中心，数据处理是物理实验的结果。

1. 测量

(1)测量。测量就是将待测物理量与选作计量标准的同类物理量进行比较，并得出倍数的过程。倍数值称为待测物理量的数值，选作的计量标准称为单位，因此，一个物理量的测量值应由数值和单位两部分组成，缺一不可。

(2)单位。按照中华人民共和国法定计量单位的规定，物理量单位均是以国际单位制(SI)为基础，其中：米(长度)、千克(质量)、秒(时间)、安培(电流强度)、开尔文(热力学温标)、摩尔(物质的量)和坎德拉(发光强度)是7个基本单位，其他物理量的单位可由这7个基本单位导出。

(3)分类。测量可分为直接测量和间接测量。

a. 直接测量：可以用测量仪器或仪表直接读出测量值的测量，称为直接测量。如用米尺测长度，用温度计测量温度，用电压表测量电压等都是直接测量，所测得的物理量如长度、温度、电压等称为直接测量值。

b. 间接测量：有些物理量无法进行直接测量，而需依据待测量与若干个直接测量值的函数关系求出，这样的测量称为间接测量。如：测量钢球的体积是通过测量钢球的直径，按公式$V=\pi D^3/6$计算得到钢球的体积。

按测量条件，测量又可分为等精度测量和不等精度测量。

等精度测量：在对某一物理量进行多次重复测量过程中，每次测量条件都相同的一系列测量。例如由同一个人用同一仪器，对同一待测量进行多次测量，每次测量结果的可靠程度相同，即为等精度测量。

不等精度测量：对某一物理量进行多次测量时，测量条件、仪器等完全不同或部分不同，各测量结果的可靠程度也就不同，这样的一系列测量称为不等精度测量。

物理实验中大都采用等精度测量。

2. 测量与误差

(1)真值。在某一状态下,被测物理量所具有的客观实际值称为真值,一般来说,用数字表示它时,应是一个无穷多位的数。

(2)测量误差。测量是在一定的条件下,使用一定的仪器,通过一定的方法,力图获得被测量的真值。但是由于实验理论的近似性,实验仪器的灵敏度和分辨能力的局限性,环境的不稳定性等因素的影响,待测量的真值是不可能测得的。测量值 N 和真值 N_0 之间总有一定的差异($\Delta N=N-N_0$),我们称这种差异为测量值的误差。

二、误差的分类

根据误差的性质和产生的原因可将误差分为系统误差和偶然误差两大类。

1. 系统误差

在同一条件下,多次测量同一物理量时,误差的大小和符号保持恒定,或者按一定规律变化的误差称为系统误差。系统误差主要来源于:

(1)测量仪器的缺陷。如仪器刻度不准,天平臂不完全等长等。

(2)实验理论和方法的不完善。如测量公式的近似性,如用伏安法测电阻没有考虑电表内阻的影响,热学实验没有考虑系统和外界的热交换等。

(3)外界条件的改变。如温度、湿度、气压的改变,影响测量结果。

(4)测量者生理或习惯偏差。如对准标志读数时,习惯偏向某一方,记录某一仪器信号时习惯滞后或超前等。

所谓按一定规律变化的误差是指误差可归结为一个或几个因素的函数。如钢尺测量长度,其误差是温度的函数,度盘偏心所引起的角度测量误差按正弦规律变化等。

系统误差可以采用一定的方法减小或消除,或对测量结果进行修正。增加测量次数不能减小系统误差,通常是根据系统误差出现的情况,找出产生误差的原因,然后有针对性地采取一定的方法去减小或消除系统误差。一般有以下几种方法可采用。

(1)加修正项。如:千分尺零点不对,可记下零点读数,对测量结果加以修正;在理论公式中对一个或几个物理量进行修正。

(2)选择适当的测量方法,抵消系统误差的影响。

① 交换测量法。如用线式电桥测电阻,把被测电阻与标准电阻交换位置测量以消除由于电阻丝不均匀而带来的比率臂倍率的系统误差。

② 补偿法。如热学实验可用加冰方法使系统的初温低于室温,以补偿升温时的热量损失。

③ 替代法。就是在测量条件不变的情况下,用已知量替代被测量以达到消除系统误差的目的。

④ 异号法。就是使系统误差在测量中出现两次且符号相反,取平均值作为测量结果,即可消除这种系统误差。

⑤ 对称测量法。即是将测量程序对某时刻对称地测量两次以达到消除系统误差的目的,它适用在精密测量中消除随时间作线性变化的系统误差。

⑥ 绕过某些不易确定或不易测量的量。

如用牛顿环测量透镜的曲率半径时，将测量公式变换成 $D=\frac{(D_m^2-D_n^2)}{4(m-n)\lambda}$ 的形式时，可用干涉环的弦的平方差代替直径的平方差，绕过了不易确定的干涉级次和由于透镜凸面和玻璃片的非紧密接触所带来的无法测量的附加光程差，还绕过了由于中心不易确定而引起的不易确定的直径的测量。

2. 偶然误差

在同一条件下多次测量同一物理量时，误差的大小和符号出现无规则变化，这种误差称为偶然误差或随机误差。它主要来源于：观察者感官判断的起伏，周围环境的干扰以及测量过程中一些不可预测的偶然因素。

从表面上看，偶然误差似乎毫无规律，但随着测量次数的增加，就显示出一定的统计规律——正态分布（或称高斯分布），它具有如下特点：

（1）有界性：绝对值很大的误差出现的概率为零。

（2）单峰性：绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

（3）对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

（4）抵偿性：正负误差的代数和为零。

通过增加测量次数可以减小随机误差，但不能完全消除。

三、测量的精密度、准确度和精确度

对于测量结果作总体评定时，一般应把系统误差和随机误差联系起来看，精密度、准确度和精确度都是评价测量结果好坏的，但这些概念的涵义是不同的，使用时应加以区别。

（1）精密度：表示测量结果的随机误差大小的程度，它是用来描述测量重复性高低的。

（2）准确度：表示测量中的系统误差大小的程度，它是指测量结果与真值符合的程度，即描述测量值接近真值的程度。

（3）精确度：是测量结果中系统误差和随机误差的综合，它是指测量结果的重复性及接近真值的程度。

四、不确定度

在测量的过程中，测量误差是普遍存在的，测量结果中包含有多种误差因素，如仪器误差，人员误差，环境误差，方法误差，调整误差，观测误差，读数误差等等。还要考虑到在很多情况下，人们对于各种误差的信息不能全面了解和掌握，特别是在那些多次重复测量中，不能充分反映出来的随机误差因素的未定系统误差。所有这些因素使得测量结果具有一定程度的不确定性。为了对测量结果不确定程度进行定量的估计，需要引入一个新的概念——不确定度。

不确定度是表征被测量的真值在某个量值范围的估计值，它表示真值在多大的可能性上处于某个范围之内，测量不确定度应该这样来估计：在修正了可定系统误差以后，把剩下的所有误差分成两类：可用统计方法计算的 A 类分量 Δ_A 和其他方法计算的 B 类分量 Δ_B，然后将两类误差按方和根的方法进行合成，合成不确定度可表示为：

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2}$$

需要指出的是，A 类分量和 B 类分量不一定与通常讲的随机误差和系统误差存在简单的对应关系，有关不确定度的计算与合成，还有许多问题需要深入讨论，有些问题还有争议。因此在本书中仍用传统的误差概念来表示测量结果的不确定度。

五、测量结果的表示：绝对误差和相对误差

在下面的讨论中，我们约定系统误差已经消除或修正，只剩下偶然误差。

根据偶然误差的高斯分布规律，n 次等精度直接测量列的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1}$$

最接近于真值，称为直接测量的最佳值和近真值，作为 n 次等精度测量的结果。随着测量次数的增加，当 $n\to\infty$ 时，其平均值即为真值。但实际上都只能做有限次测量，所以算术平均值是真值的最佳近似值。

为了把测量结果 $\overline{N}$ 和测量值的离散程度都表示出来，通常把测量结果写成 $N=\overline{N}\pm\Delta N$ 的形式。

式中 $\overline{N}$ 为测量的最近真值，它可以是单次测量值，也可以是测量列的算术平均值，既可以代表直接测量列的算术平均值，又可以代表间接测量列的算术平均值。ΔN 称为绝对误差，表示为

$$\Delta N=|N_{测}-\overline{N}| \tag{2}$$

绝对误差反映测量值偏离真值的大小。

结果表达式 $N=\overline{N}\pm\Delta N$ 并不表示测量结果仅为 $\overline{N}-\Delta N$ 和 $\overline{N}+\Delta N$ 两个值，它是表示 N 在 $\overline{N}$ 附近正负 ΔN 这个范围内包含真值(或近真值)的一定可能性(几率)。因此，不排除多次测量中有部分测量值在($\overline{N}\pm\Delta N$)之外。不同方法估算的 ΔN 表示在 $\overline{N}\pm\Delta N$ 范围内包含真值的可能性不同。

只用绝对误差还不能评价一个测量结果的优劣，还要看测量值本身的大小，为此有必要引入相对误差，其定义为

$$E=\frac{\Delta N}{\overline{N}} \tag{3}$$

相对误差一般用百分数来表示，即

$$E=\frac{\Delta N}{\overline{N}}\times 100\%$$

故又称百分误差。

当被测量值有公认理论值或标准值时，在数据的处理中还常常把测量值与理论值或标准值进行比较并用相对误差表示为

$$E_x=\frac{|测量值-理论值|}{理论值}\times 100\% \tag{4}$$

对于每一次实验的结果通常表示为：

$$N=(\overline{N}\pm\Delta N)\quad(单位)$$

$$E=\frac{\Delta N}{\overline{N}}\times 100\%$$

直接测量的误差估算

一、测量的误差计算

1. *算术平均误差*

如前所述，为了减小偶然误差，可以在同一条件下对被测量进行多次重复测量(等精度多次测量)，用多次测量的算术平均值作为被测量的最佳近似值。

设对某一物理量进行了 n 次测量，测量值分别为 x_1、x_2、$\cdots\cdots x_n$，其算术平均值为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{5}$$

$\bar{x}$ 即为该物理量的最近真值，各次测量值 x_i 与其平均值 $\bar{x}$ 的差叫做偏差。严格来讲，它与前面所述的误差是有区别的，但在精度要求不高的实验中可以忽略这种差别，即用算术平均偏差 $\delta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|$ 来代替算术平均误差 $\delta'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-A|$（其中 A 为被测量的真值）。

在多次测量中每次测量值 x_i 与算术平均值 $\bar{x}$ 的偏差为

$$\Delta x_1=x_1-\bar{x}、\Delta x_2=x_2-\bar{x}\cdots\Delta x_n=x_n-\bar{x}$$

则算术平均误差定义为

$$\overline{\Delta x}=\frac{1}{n}(|\Delta x_1|+|\Delta x_2|+\cdots+|\Delta x_n|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$$

测量结果表示为：$x=\bar{x}\pm\overline{\Delta x}$

上式称为测量结果的算术平均误差的表示方式，它表明被测量量 x 的最佳值是 $\bar{x}$，测量列中任一测量值的误差 Δx_i 近似有 57.5%的几率落在$(-\overline{\Delta x},\overline{\Delta x})$区间内。

2. 标准误差（又称均方差）

标准误差是偶然误差最通常的表示方式。当测量次数足够多时（即 $n\to\infty$）标准误差定义为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}} \tag{6}$$

当测量次数为有限时，测量列中某一次测量结果的标准误差为

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

理论表明，n 次测量的算术平均值的标准误差为 $\sigma_{\bar{x}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_x$，即

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{7}$$

$\sigma_{\bar{x}}$称为样本平均值的标准误差（或简称为标准误差）。当偶然误差用标准误差来表示时，对某一次测量结果可写成

$$x=\bar{x}\pm\sigma_x$$

对 n 次测量结果的平均值可写成

$$x=\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}$$

从偶然误差的正态分布规律可以证明：当采用标准误差时，对 x 的任何一次测量值的误差介于$[-\sigma_x,\sigma_x]$的几率为 68.3%。

我们从(7)式可以看出，$\sigma_{\bar{x}}$ 随着测量次数 n 增多而减少，但当 $n>10$ 次以后，$\sigma_{\bar{x}}$的减少极慢，因此一般重复测量 10 次即可。对于灵敏度和精确度不高的仪器，其仪器误差将掩盖偶然误差，所以测量次数应相应减少。应该指出的是，随着测量次数的减少，测量数据将严重偏离正态分布。

例题 1：用直尺测量某物体的长度 5 次，单位为 cm，其数据如下：2.32，2.34，2.36，2.30，2.37。试表示测量结果。

解:测量列的算术平均值为:

$$\bar{l}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}l_i=\frac{1}{5}(2.32+2.34+2.36+2.30+2.37)=2.34$$

算术平均误差为:

$$\overline{\Delta l}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|l_i-\bar{l}|=\frac{1}{5}(|2.32-2.34|+|2.34-2.34|+|2.36-2.34|$$
$$+|2.30-2.34|+|2.37-2.34|)=0.022\text{cm}$$

测量列的标准误差为:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i-\bar{l})^2}{n-1}}=0.029\text{cm}$$

测量列算术平均值的标准差为

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=0.013\text{cm}$$

用算术平均误差表示测量结果为

$$l=\bar{l}\pm\Delta l=(2.34\pm0.03)\text{cm}$$

$$E_1=\frac{0.022}{2.34}\times100\%=0.94\%=1\%$$

用标准差表示测量结果为

$$l=\bar{l}\pm\sigma_{\bar{x}}=(2.34\pm0.02)\text{cm}$$

$$E_2=\frac{0.013}{2.34}\times100\%=0.55\%=0.6\%$$

二、单次测量的误差估算

有些物理量是在动态下测量的,不可能对其重复测量多次;有些实验的精密度要求不高;有些间接测量中,某一个物理量的测量误差大小对测量结果影响不大。在这些情况下,对被测量量可只进行一次测量。单次测量的误差估算,一般总是估计误差的最大值。在对测量精度要求不高或不需很精确时,通常取仪器的最小分度 d 的一半来表示测量误差。测量结果表示为

$$x=x_{测}\pm\frac{d}{2}$$

对于标出精度级别的仪器、仪表,可用仪器误差作为单次测量的误差,它表示为

$$x=x_{测}\pm\Delta x_{仪}$$

仪器误差一般标在仪器上,如 50 分度的游标卡尺的 $\Delta_{仪}=0.02\text{mm}$。电学仪表的 $\Delta_{仪}=$量程×精度等级%。

对于非连续读数仪器(如电子秒表,数字仪表),其 $\Delta_{仪}$ 通常取其最小分度值。对于 0.1s 的秒表,它不能反映 0.1 秒内的时间变化,故 $\Delta_{仪}$ 也应取其最小分度值。

估计单次测量的标准差,我们可以借助极限误差的概念把 $\Delta_{仪}$ 作为极限误差,而把 $\Delta_{仪}/3$作为单次测量的标准差。

三、误差的取位和尾数处理

误差估计的最后结果一般取一位有效数字,因为它本身就是估算的,位数取多了没有多大意义。在估算过程中,为了避免由于运算过程造成新的误差,所以在运算过程中可多取 1

位有效数字。

由于影响测量结果的因素很多，所以在估算误差时采取宁大勿小原则，误差尾数的处理一般采用进位法，尾数为零则舍去。在运算过程中为了不致因取舍过多而过分影响最后结果，仍应采用四舍五入。

间接测量的误差估算

间接测量量是由直接测量量通过公式计算得来的，因为直接测量量有误差，所以间接测量量也会有误差，这就是误差的传递。

推导误差传递公式一般采用微分法，因为误差是测量结果的微小偏差，它的特性和函数的增量、自变量的增量一样，因此可以用微分法推导。

一、算术平均误差的传递

$$N=f(x、y、z\cdots) \tag{8}$$

$(x、y、z\ \cdots)$为独立的直接测量量，对(8)式全微分有：

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{9}$$

式(9)表示，当 x、y、z 有微小改变 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 时，N 改变 $\mathrm{d}N$。把 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 看作误差，就可变为误差的传递公式

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right||\Delta z|+\cdots \tag{10}$$

对于以和、差为主的函数，用式(10)比较方便；对于以积、商为主的函数应对式(8)取自然对数后再全微分比较方便。

$$\ln N=\ln f(x、y、z\cdots)$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial\ln f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\ln f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\ln f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

$$\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{\partial\ln f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial\ln f}{\partial y}\right||\Delta y|+\left|\frac{\partial\ln f}{\partial z}\right||\Delta z|+\cdots \tag{11}$$

式(10)和式(11)就是误差传递的基本公式。式中各项分别为 ΔN 和$\frac{\Delta N}{N}$的分误差。Δx、Δy、$\Delta z\cdots$的系数叫误差的传递系数。由此可见，一个量的测量误差(Δx、Δy、$\Delta z\cdots$)对于总误差$\left(\Delta N、\frac{\Delta N}{N}\right)$的贡献，不仅取决于本身误差的大小，还取决于误差传递系数。

求误差传递基本公式的步骤如下：

(1)对函数求全微分(或先取自然对数再求全微分)。

(2)合并同一变量的系数。

(3)将微分号变为误差号，各项取绝对值相加。

常用函数误差的算术合成公式如表 0-1 所示。式(10)和式(11)适用于：系统误差是主要的，而其符号又不能确定；不必区分系统误差和偶然误差；假定偶然误差在极端条件下合成的情况，这时可将各分误差取绝对值相加。算术平均误差的传递公式常用于误差分析中对实验误差的粗略估算。

二、标准误差的传递

各独立量测量结果的偶然误差是以一定方式合成的，如果用标准误差代表偶然误差，可以证明它们的合成是方和根合成。由式(10)及式(11)得

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots} \tag{12}$$

$$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots} \tag{13}$$

归纳起来求标准误差方和根合成的步骤为：

(1)对函数全微分(或先取自然对数再全微分)。

(2)合并同一变量的系数。

(3)将微分号变为误差号，各项平方相加再开平方。

常用函数标准误差的方和根合成见表 0-1。

表 0-1

函数式	算术合成(传递)公式	标准误差传递(合成)公式
$N=x+y$	$\Delta N=\Delta x+\Delta y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x-y$	$\Delta N=\Delta x+\Delta y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=xy$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x^K y^m}{z^n}$	$\frac{\Delta N}{N}=K\frac{\Delta x}{x}+m\frac{\Delta y}{y}+n\frac{\Delta z}{z}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{K^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$N=Kx$	$\Delta N=K\Delta x,\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta x}{x}$	$\sigma_N=K\sigma_x,\frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x}$
$N=K\sqrt{x}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{x}$

在进行误差合成时，当分误差对总误差的贡献很小时，可以略去不计。对式(10)和式(11)，如分误差项数量不多，可将只占最大误差 1/10 以下的分误差略去不计。而对式(12)和式(13)，由于是方和根合成，通常可将小于最大分误差 1/3 以下的分误差略去不计。这样可大大简化计算，在分析误差和计算误差时有一定的实际意义。

例题 2：用游标卡尺分别测黄铜管外直径 D 和内直径 d，各测 5 次，用米尺测其高 h，其数据如表 0-2 所示，求黄铜管体积 V，并分别用误差传递的基本公式(误差的算术合成)和方和根合成估算体积 V 的测量误差，将测量结果表示成 $V\pm\Delta V$ 的形式。

表 0-2 单位($\times10^{-3}$m)

D_i	30.00	30.05	30.10	29.95	30.00	$\overline{D}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}D_i=30.02$
$D_i-\overline{D}$	−0.02	0.03	0.08	−0.07	−0.02	$\delta_D=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\lvert D_i-\overline{D}\rvert=0.044$
d_i	9.00	9.05	8.90	8.95	9.10	$\overline{d}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}d_i=9.00$
$d_i-\overline{d}$	0.00	0.05	−0.10	−0.05	0.10	$\delta_d=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\lvert d_i-\overline{d}\rvert=0.06$
h	100.2					$\delta_h=\Delta h=0.5$

$$\sigma_{\overline{D}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(D_i-\overline{D})^2}{5(5-1)}}=0.026 \qquad \sigma_{\overline{d}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(d_i-\overline{d})^2}{5(5-1)}}=0.035$$

$$\sigma_h=\frac{\Delta h}{3}=\frac{0.5}{3}=0.17$$

解：D、d 的算术平均值 $\overline{D}$、$\overline{d}$，算术平均误差 δ_D、δ_d，算术平均值的标准误差 $\sigma_{\overline{D}}$、$\sigma_{\overline{d}}$ 以及单次测量量 h 的误差限 Δh、标准误差 σ_h 的估算值如表 0-2 所示。

$$V=\frac{\pi}{4}h(\overline{D}^2-\overline{d}^2)=\frac{3.142}{4}\times 100.2\times 10^{-3}[(30.02\times 10^{-3})^2-(9.00\times 10^{-3})^2]$$

$$=6.455\,6\times 10^{-5}(\mathrm{m}^3)$$

(1)误差的算术合成

相对误差 $$E=\frac{\delta_V}{V}=\left|\frac{1}{h}\right|\delta_h+\left|\frac{1}{D+d}+\frac{1}{D-d}\right|\delta_D+\left|\frac{1}{D+d}-\frac{1}{D-d}\right|\delta_d$$

$$=\frac{0.5}{100.2}+\left|\frac{1}{30.02+9.00}+\frac{1}{30.02-9.00}\right|\times 0.044$$

$$+\left|\frac{1}{30.02+9.00}-\frac{1}{30.02-9.00}\right|\times 0.06$$

$$=0.005+0.003\,3+0.001\,3=0.009\,6=0.96\%$$

绝对误差

$$\Delta V=\frac{\delta_V}{V}\times V=0.009\,6\times 6.455\,6\times 10^{-5}=0.062\times 10^{-5}=0.07\times 10^{-5}(\mathrm{m}^3)$$

$$V\pm\Delta V=(6.46\pm 0.07)\times 10^{-5}(\mathrm{m}^3)$$

(2)误差的方和根合成

相对误差 $$E=\frac{\sigma_V}{V}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2+\left(\frac{1}{D+d}+\frac{1}{D-d}\right)^2\sigma_{\overline{D}}^2+\left(\frac{1}{D+d}-\frac{1}{D-d}\right)^2\sigma_{\overline{d}}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.17}{100.2}\right)^2+\left(\frac{1}{30.02+9.00}+\frac{1}{30.02-9.00}\right)^2\times 0.026^2+\left(\frac{1}{30.02+9.00}-\frac{1}{30.02-9.00}\right)^2\times 0.35^2}$$

$$=0.002\,68\approx 0.27\%$$

绝对误差 $\sigma_V=\frac{\sigma_V}{V}\times V=0.002\,7\times 6.46\times 10^{-5}=0.018\times 10^{-5}=0.02\times 10^{-5}(\mathrm{m}^3)$

结果表达式 $V\pm\sigma_V=(6.46\pm 0.02)\times 10^{-5}\mathrm{m}^3$

三、测量仪器精度的选择

在进行测量时，往往对其测量精度和可靠程度有一定要求，这就面临如何设计实验的问题，下面就如何选择测量仪器及其精度作一简要介绍。

根据测量要求，利用误差传递公式(算术合成或方和根合成)将总误差合理地分配给各直接测量量的分误差，从而确定各测量仪器及其精度。

例题 3：测圆柱体密度 ρ，若质量 m 大约为 0.14kg，直径 D 大约为 0.02m，高 h 大约为 0.05m，要求 $\frac{\Delta\rho}{\rho}\leqslant 1\%$，如何确定各测量仪器及其精度？

解：由 $\rho=\frac{4m}{\pi D^2 h}$ 得

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta h}{h}\leqslant 1\%$$

采用误差均分原则

$$\frac{\Delta m}{m}=2\frac{\Delta D}{D}=\frac{\Delta h}{h}\leqslant\frac{1}{3}\%\approx 0.3\%$$

由此得

$$\Delta m\leqslant 0.3\% m=0.3\%\times 0.14=0.004\ 2(\text{kg})$$

用一般物理天平测量可以满足要求。

$$\Delta h\leqslant 0.3\% h=0.3\%\times 0.05=0.000\ 15(\text{m})$$

用最小分度为 0.05mm 的游标卡尺测量可以满足要求。

$$\Delta D\leqslant 0.15\% D=0.15\%\times 0.02=0.000\ 03(\text{m})$$

用最小分度为 0.02mm 的游标卡尺测量可以满足要求。

实际这样的分配不是太合理的，因为一般物理天平的最小分度都在 10^{-5}kg 数量级左右，$\frac{\Delta m}{m}$可落在 0.01%的数量级上，远远小于所分配给它的误差，所以可将总误差少分配给$\frac{\Delta m}{m}$一些或不分配（可忽略）。当缺少某些仪器时，可根据实际情况作非均等分配，从而在保证所要求的测量精度下选用已有的测量仪器。

有效数字及其表示

一、测量结果的有效数字

1. 有效数字的一般概念

对任何物理量的测量都存在误差，如测某一长度，结果为 $L=(1.347\ 625\pm 0.000\ 2)$m，由于绝对误差为 0.000 2m，测量值小数点后第 4 位已不可靠（可疑或欠准），所以后面的数字便没多大意义，故应将测量结果表示为 $L=(1.347\ 6\pm 0.000\ 2)$m。我们把测量结果中可靠（或准确）的数字和末位的一位可疑数字统称为测量结果的有效数字，因此 1.347 6 有五位有效数字。由此看来测量结果的有效数字位数由测量结果的绝对误差（偶然误差）决定。所以有效数字还可以定义为：可靠数字和偶然误差所在位都叫有效数字。因此任何测量结果的末位必须要与绝对误差所在位对齐。

对于直接测量量，其偶然误差值在仪器的最小分度内，所以测量结果的末位应在最小分度内估读。如用米尺测量 $L=0.142\ 5$m，末位 5 便是估计的最小分度的 1/2。若 L 恰巧是最小分度值（毫米）的整数倍，则应记作 0.142 0m，意思是估计值为零，这个零显然也是有效数字。不管是直接测量结果还是间接测量结果，夹在数字中间和数字后的零都是有效数字。

小数点的位置不改变有效数字的位数。如 0.004 25m＝4.25mm，在 0.004 25 中 4 前面零，是由于单位换算而引出的，它不算有效数字，故它只有 3 位有效数字。

2. 数值的科学表达形式

如果测量数值太小或太大，可写成 10 的方幂的形式，其有效数字位数不变。如：0.004 25m可写成 4.25×10^{-3}m；测量数值 13 400m，若误差为 200m，可把测量结果写成 $(1.34\pm 0.02)\times 10^{4}$m，它们均有三位有效数字。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com